

А.М. Кутушев и Н.С. Голубева

ОСНОВЫ
РАДИО-
ЭЛЕКТРОНИКИ

ОСНОВЫ РАДИО- ЭЛЕКТРОНИКИ



А. М. КУГУШЕВ и Н. С. ГОЛУБЕВА

ОСНОВЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ЛИНЕЙНЫЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ



«ЭНЕРГИЯ»

МОСКВА 1969



6П2.15
К88
УДК 621.3

Кугушев А. М. и Голубева Н. С.
К88 Основы радиоэлектроники. (Линейные электромагнитные процессы). М., «Энергия», 1969.
880 стр. с 534 илл.

В книге изложены основы теории линейных электромагнитных процессов в средах (электродинамика) и в цепях (теория линейных цепей). Процессы описываются на основе уравнений электромагнитного поля (уравнения Максвелла). В дополнительной главе приводится краткое изложение применяемого математического аппарата.

Книга может служить учебным пособием для студентов радиоэлектронных и электротехнических специальностей вузов, а также будет полезна аспирантам и инженерам.

6П2.15

3-3-12
308-68

Кугушев Александр Михайлович
и Голубева Нина Сергеевна

Основы радиоэлектроники

Редактор *Р. М. Малинин*
Переплет художника *А. М. Кувшинникова*
Технический редактор *В. В. Зеркаленкова*
Корректор *Л. К. Гольшева*

Сдано в набор 16/IV 1968 г.	Подписано к печати 21/I 1969 г.	Т-02616
Формат 84×108 ^{1/32}	Бумага типографская № 2	Усл. печ. л. 46,2
Уч.-изд. л. 43,86	Тираж 55 000 экз.	Цена 2 р. 38 к. Зак. 552

Издательство «Энергия». Москва, Ж-114, Шлюзовая наб., 10.

Владимирская типография Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Гор. Владимир, ул. Победы, д. 18-б

ПРЕДИСЛОВИЕ

На современном этапе развития радиоэлектроника является областью всестороннего практического использования учения об электрических явлениях и имеет два основных направления: электроэнергетику и электросигнализацию. В первом случае имеет место непосредственное использование электромагнитной энергии во всевозможных технологических процессах; при этом электрическая энергия преобразуется в другие виды энергии. Во втором случае электромагнитная энергия используется для осуществления всевозможных видов сигнализации и для управления различными технологическими процессами; при этом электрическая энергия является носителем сигналов информации.

В настоящее время в электроэнергетике уже используют токи высокой частоты и для передачи электроэнергии без проводов начинают использовать сверхвысокие частоты и даже частоты, соответствующие волнам оптического диапазона. Взаимное преобразование и коммутацию переменного и постоянного тока уже сравнительно давно осуществляют с помощью вакуумных электронных устройств; в настоящее время для этих целей широко используют и электронные приборы из твердого тела. Широкое применение получают новые, немеханические источники электрической энергии, а также устройства непосредственного преобразования тепловой энергии в электрическую.

Радиосвязь, телевидение, радиотелеуправление являются важнейшими отраслями электросигнализации. Радиоэлектроника как электросигнализация является основой технических средств кибернетики и вычислительной техники.

Широкое использование электромагнитной энергии в энергетических и сигнализационных процессах объясняется сравнительной простотой преобразования ее из одного вида в другой и возможностью передачи ее на расстояние.

Научно-техническим содержанием радиоэлектроники является изучение процессов передачи электроэнергии, процессов преобразования электрической энергии одного вида в другой и взаимопреобразование неэлектрических и электрических процессов. Все эти процессы изучаются в диапазоне от самых низких частот до частот, соответствующих оптическим и еще более коротким электромагнитным волнам.

Процессы передачи электрической энергии в основном являются линейными процессами, а процессы преобразования — нелинейными.

Несмотря на большое разнообразие видов электроэнергетики и электросигнализации, математические и физические основы их едины. В связи с этим представляется целесообразным дисциплину «Основы радиоэлектроники» рассматривать, как сумму дисциплин: «Теоретические основы электротехники» и «Теоретические основы радиотехники».

В методическом отношении изучение основ радиоэлектроники должно вестись главным образом дедуктивно рассматривая все вопросы технического использования учения об электричестве в более общем виде и применительно ко всему многообразию видов электроэнергетики и электросигнализации.

В настоящей книге содержится изложение линейных электромагнитных процессов, вследствие чего она является как бы первой частью всего содержания радиоэлектроники.

Изучение радиоэлектроники требует широкого привлечения многих разделов математики: теории функций комплексного переменного, операционного исчисления, уравнений математической физики, матричного и тензорного анализа, математической топологии (теории графов) и т. д. В связи с этим в конце книги дается краткое изложение математического аппарата, используемого при изложении основного материала.

Линейные электромагнитные процессы в книге делятся на процессы в средах (линейная теория электромагнитного поля) и процессы в цепях (теория линейных це-

пей). Изложение начинается с теории электромагнитного поля, что позволяет глубже проникнуть в истинную природу электромагнитных явлений в цепях. В основе изложения лежат уравнения Максвелла и вытекающие из них основные законы электромагнитного поля, граничные условия и волновые уравнения.

Напряжение и ток вводятся как интегральные характеристики электромагнитного поля, а сопротивление, индуктивность и емкость — как интегральные характеристики среды. Уравнения цепей постоянного тока (закон Ома и уравнения Кирхгофа) получаются из точных уравнений Максвелла. Цепи переменного тока рассматриваются на основе приближенных уравнений Максвелла для квазистационарного поля. Передача энергии в цепях с сосредоточенными и распределенными постоянными интерпретируется с помощью вектора Пойнтинга.

Книга соответствует учебному плану радиоспециальностей Московского высшего технического училища им. Баумана (МВТУ).

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A, \bar{A}** — векторный потенциал.
 \dot{A} — то же в комплексной форме.
 A_m — амплитуда векторного потенциала.
 \dot{A}_m — комплексная амплитуда векторного потенциала.
 a — обобщенная расстройка контура.
 a — радиус.
 a — ускорение.
- B, \bar{B}** — вектор магнитной индукции.
 \dot{B} — то же в комплексной форме.
 B_n — нормальная составляющая вектора **B**.
 B_m — амплитуда магнитной индукции.
 B_m — комплексная амплитуда магнитной индукции.
 B_τ — тангенциальная составляющая вектора **B**.
 b — реактивная проводимость.
 C — емкость электрическая.
 C_0 — погонная емкость длинной линии.
 c — скорость света.
 D — диаметр.
- D, \bar{D}** — вектор электрической индукции.
 \dot{D} — то же в комплексной форме.
 D_n — нормальная составляющая вектора **D**.
 D_m — амплитуда электрической индукции.
 \dot{D}_m — комплексная амплитуда электрической индукции.
 D_τ — тангенциальная составляющая вектора **D**.
 E — электродвижущая сила (э. д. с.) в цепи постоянного тока или ее действующее значение в цепи переменного тока.
- E, \bar{E}** — вектор напряженности электрического поля.
 \dot{E} — комплексное значение э. д. с.
- $\dot{E}, \dot{\bar{E}}$** — вектор напряженности электрического поля в комплексной форме.
 E_m — амплитуда э. д. с.
 E_m — амплитуда напряженности электрического поля.
 \dot{E}_m — комплексная амплитуда напряженности электрического поля.

- E_d — действующее значение напряженности электрического поля.
 \dot{E}_d — комплексное действующее значение напряженности электрического поля.
 $E^{ст}, \bar{E}^{ст}$ — вектор напряженности стороннего электрического поля.
 $\dot{E}^{ст}, \dot{\bar{E}}^{ст}$ — то же в комплексной форме.
 $E_m^{ст}$ — амплитуда напряженности стороннего электрического поля.
 $\dot{E}_m^{ст}$ — комплексная амплитуда напряженности стороннего электрического поля.
 E_o, \bar{E}_o — вектор напряженности электрического поля отраженной волны.
 e — мгновенное значение э. д. с.
 f — частота.
 F — сила.
 \mathbf{F} — вектор силы.
 F_{ih} — тензор натяжений электромагнитного поля.
 F_{ih} — тензор напряженности электромагнитного поля.
 \hat{f} — объемная плотность сил.
 f_{ih} — тензор индукции.
 G — коэффициент направленного действия антенны.
 G_0 — то же в главном направлении.
 \underline{g} — действительная проводимость.
 $\mathbf{H}, \bar{\mathbf{H}}$ — вектор напряженности магнитного поля.
 $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\bar{\mathbf{H}}}$ — то же в комплексной форме.
 H_n — нормальная составляющая вектора \mathbf{H} .
 H_m — амплитуда напряженности магнитного поля.
 \dot{H}_m — комплексная амплитуда напряженности магнитного поля.
 H_s — напряженность магнитного поля насыщения.
 H_τ — тангенциальная составляющая вектора \mathbf{H} .
 H_d — действующее значение напряженности магнитного поля.
 \dot{H}_d — комплексное действующее значение магнитного поля.
 \mathbf{H}_o — вектор напряженности магнитного поля отраженной волны.
 h_d — действующая высота антенны.
 I — величина постоянного тока или действующее значение переменного тока.
 \dot{I} — комплексное действующее значение переменного тока.
 I_m — амплитуда переменного тока.
 i — мгновенное значение электрического тока.
 $\mathbf{J}, \bar{\mathbf{J}}$ — вектор плотности тока.
 \mathbf{I} — 4-вектор плотности тока.
 J_m — амплитуда плотности тока.
 \dot{J}_m — комплексная амплитуда плотности тока.

$J_{\text{пов}}$ — значение поверхностной плотности тока.
 $\mathbf{j}_{\text{ст}}, \bar{\mathbf{j}}_{\text{ст}}$ — вектор плотности стороннего тока.
 $\mathbf{j}_{\text{ст}}, \dot{\mathbf{j}}_{\text{ст}}$ — то же в комплексной форме.
 $J_m^{\text{ст}}$ — амплитуда плотности стороннего тока.
 $\mathbf{j}_m^{\text{ст}}$ — комплексная амплитуда плотности стороннего тока.
 $K(j\omega)$ — коэффициент передачи четырехполюсника.
 k — коэффициент связи.
 \dot{k} — комплексная постоянная распространения.
 k_0 — комплексная постоянная распространения в направляющей системе или в четырехполюснике.
 $\mathbf{k}, \dot{\mathbf{k}}$ — комплексный вектор постоянной распространения.
 L — индуктивность.
 L — логарифмическое затухание.
 $L_{ik} (i \neq k)$ — взаимная индуктивность.
 L_0 — погонная индуктивность длинной линии.
 $\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}$ — вектор длины.
 l — длина.
 l_r — резонансная длина.
 M — взаимная индуктивность.
 \bar{M} — намагниченность.
 $\mathbf{M}, \bar{\mathbf{M}}$ — вектор намагниченности.
 M_s — намагниченность насыщения.
 M_{ik} — тензор поляризации.
 m — масса электрона.
 \bar{m} — коэффициент модуляции.
 $\mathbf{P}, \bar{\mathbf{P}}$ — вектор поляризации.
 P — мощность.
 \dot{P} — комплексная мощность.
 P_0 — действительная мощность.
 $P_{0 \text{ из}}$ — действительная мощность излучения.
 P_r — реактивная мощность.
 \dot{P}_E — комплексный коэффициент прохождения по электрическому полю.
 \dot{P}_H — комплексный коэффициент прохождения по магнитному полю.
 p_{mt} — амплитуда момента магнитного диполя.
 \mathbf{p}_{mt} — комплексная амплитуда момента магнитного диполя.
 $p_{\text{эт}}$ — амплитуда момента электрического диполя.
 $\mathbf{p}_{\text{эт}}$ — комплексная амплитуда момента электрического диполя.
 p_m — давление магнитного поля.
 \mathbf{p}_m — момент магнитного диполя.
 \mathbf{p}_m — то же в комплексной форме.
 $p_{\text{э}}$ — давление электрического поля.
 $\mathbf{p}_{\text{э}}$ — момент электрического диполя.

- \dot{P}_0 — то же в комплексной форме.
- $P_{эм}$ — давление электромагнитного поля.
- Q — добротность системы.
- q — электрический заряд.
- R — действительное сопротивление.
- $R_{из}$ — сопротивление излучения антенны.
- R_m — сопротивление магнитной цепи.
- R_0 — погонное сопротивление длинной линии.
- R_1, R_i — внутреннее сопротивление генератора.
- r — радиус.
- S — поверхность.
- $S(j\omega)$ — спектральная характеристика (плотность).
- T — температура.
- T — период.
- t — время.
- U — разность потенциалов; действующее значение напряжения.
- \dot{U} — комплексное действующее значение напряжения.
- u — мгновенное значение напряжения.
- u, \bar{u} — вектор скорости равномерного движения одной инерциальной системы относительно другой.
- u — значение вектора скорости u .
- V — объем.
- V — скалярный электрический потенциал точки.
- v, \bar{v} — вектор скорости.
- $\dot{v}, \bar{\dot{v}}$ — то же в комплексной форме.
- v — скорость распространения.
- $v_{(1)}, v_{(2)}$ — фазовые скорости распространения в первой и второй средах.
- $v_{гp}$ — групповая скорость.
- v_{ϕ} — фазовая скорость.
- v_3 — скорость распространения энергии.
- W — энергия.
- w — плотность энергии.
- w — общее количество витков обмотки.
- w' — количество витков на единицу длины обмотки.
- w_0 — среднее значение плотности энергии.
- w_m — плотность магнитной энергии.
- w_3 — плотность электрической энергии.
- X — реактивное сопротивление электрической цепи.
- $Y = g + jb$ — комплексная проводимость электрической цепи.
- y — полная проводимость (модуль).
- $Z = R + jX$ — комплексное сопротивление электрической цепи.
- Z, \bar{Z} — вектор Герца.
- Z_i — комплексное внутреннее сопротивление генератора.
- Z_0 — волновое сопротивление.
- Z_{0H} — волновое сопротивление направляющей системы при волне Н.
- Z_{0E} — волновое сопротивление направляющей системы при волне Е.

- z — полное сопротивление электрической цепи (модуль).
 $\underline{\alpha}$ — постоянная затухания.
 $\vec{\alpha}$ — вектор постоянной затухания.
 $\underline{\beta}$ — фазовая постоянная.
 $\vec{\beta}$ — вектор фазовой постоянной.
 Γ_E — комплексный коэффициент отражения по электрическому полю.
 Γ_H — комплексный коэффициент отражения по магнитному полю.
 Γ_U — комплексный коэффициент отражения по напряжению.
 Δ — эквивалентная глубина проникновения поля.
 Δf — ширина частотного спектра.
 δ — декремент затухания.
 δ_a — угол электрических потерь.
 δ_m — угол магнитных потерь.
 ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость.
 ϵ_0 — электрическая постоянная.
 ϵ_a — абсолютная диэлектрическая проницаемость.
 $\epsilon_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a$ — комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость.
 ϵ'_a — действительная часть комплексной абсолютной диэлектрической проницаемости.
 ϵ''_a — мнимая часть комплексной абсолютной диэлектрической проницаемости.
 ϵ_{ik} — относительная тензорная диэлектрическая проницаемость.
 η — коэффициент полезного действия.
 θ — комплексный угол падения.
 $\theta_{кр}$ — критический угол полного отражения.
 κ — поверхностная плотность заряда.
 λ — длина волны.
 Λ, λ_v — длина волны в направляющей системе.
 $\lambda_{кр}$ — критическая длина волны.
 λ_r — резонансная длина волны.
 λ_c — собственная длина волны.
 μ — относительная магнитная проницаемость.
 μ_0 — магнитная постоянная.
 μ_a — абсолютная магнитная проницаемость.
 $\tilde{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a$ — комплексная абсолютная магнитная проницаемость.
 μ'_a — действительная часть комплексной абсолютной магнитной проницаемости.
 μ''_a — мнимая часть комплексной абсолютной магнитной проницаемости.
 μ_{ik} — относительная тензорная магнитная проницаемость среды.

- $\mu_{эф}$ — относительная эффективная магнитная проницаемость.
 ρ — объемная плотность заряда.
 ρ — то же в комплексной форме.
 ρ_m — амплитуда объемной плотности заряда.
 ρ_m — комплексная амплитуда объемной плотности заряда.
 $\rho^{ст}$ — объемная плотность стороннего заряда.
 $\rho^{ст}$ — то же в комплексной форме.
 $\dot{\rho}_m^{ст}$ — амплитуда объемной плотности стороннего заряда.
 $\dot{\rho}_m^{ст}$ — комплексная амплитуда объемной плотности стороннего заряда.
 σ — удельная проводимость среды.
 σ_{ik} — тензорная проводимость среды.
 σ_{Π} — эквивалентная отражающая площадь радиолокационной цели.
 τ — линейная плотность заряда.
 τ — время запаздывания сигнала в четырехполюснике.
 τ — длительность импульса.
 τ_0 — постоянная времени цепи.
 φ — фаза.
 φ — скалярный потенциал.
 $\chi_{э}$ — электрическая восприимчивость.
 χ_M — магнитная восприимчивость.
 $\chi_{ik}^{(э)}$ — тензорная электрическая восприимчивость.
 $\chi_{ik}^{(M)}$ — тензорная магнитная восприимчивость.
 Ψ — потокоцепление.
 ψ — фаза.
 Ω — круговая частота модуляции.
 ω — круговая частота.
 ω_H — частота прецессии электронов в ферромагнитной среде или плазме.
 ω_0 — собственная круговая частота контура или резонатора без потерь.
 ω_r — резонансная круговая частота.
 ω_n — несущая круговая частота.
 ω_c — собственная круговая частота контура или резонатора с потерями.
 $\omega_{ср}$ — круговая частота среза фильтра.
 Φ — поток магнитной индукции.
 Φ — 4-вектор-потенциал.
 Φ_i ($i=1, 2, 3, 4$) — составляющие 4-вектор-потенциала.
 $\mathbf{P}, \dot{\mathbf{P}}$ — вектор Пойнтинга.
 $\dot{\mathbf{P}}, \ddot{\mathbf{P}}$ — комплексный вектор Пойнтинга.
 P_0 — среднее значение вектора Пойнтинга за период.

Общие математические обозначения

- $\mathbf{A}, \bar{\mathbf{A}}$ — вектор.
 $|\mathbf{A}|$ или A — модуль.
 A_n — нормальная составляющая вектора \mathbf{A} .
 A_τ — тангенциальная составляющая вектора \mathbf{A} .
 $A_i (i=1, 2, 3)$ — проекции вектора на оси декартовой системы координат.
 $A = a + jb$ — комплексная величина.
 $A^* = a - jb$ — сопряженное значение комплексной величины.
 A_{nm} — значения корней функции Бесселя.
 B_{nm} — значения корней производной функции Бесселя.
 e — основание натурального логарифма.
 $\mathbf{e}_i (i=1, 2, 3)$ — орты (единичные векторы) декартовой системы координат.
 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_z$ или $\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \bar{\mathbf{e}}_z$ — орты цилиндрической системы координат.
 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\vartheta$ или $\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\alpha, \bar{\mathbf{e}}_\vartheta$ — орты сферической системы координат.
 $H_n^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода n -го порядка.
 $H_n^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля второго рода n -го порядка.
 $J_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка.
 j — мнимая единица.
 $N_n, n_0(x)$ — функция Неймана n -го порядка.
 \mathbf{n}_0 — орт нормали.
 $P_n(x)$ — полином Лежандра.
 $\mathbf{r}, \underline{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор.
 $T_n(x)$ — полином Чебышева первого рода.
 $U_n(x)$ — полином Чебышева второго рода.
 $x_i (i=1, 2, 3)$ — оси декартовой системы координат.
 $\delta(x)$ — дельта-функция, или функция Дирака.
 δ_{ik} — символ Кронекера, единичный тензор второго ранга.
 ε_{ikl} — символ Леви-Чивита, единичный тензор третьего ранга.

Символы математических операций

- $\|a_{ik}\|$ — матрица.
 $\|t_{ik}\|$ — тензор второго ранга.
 $|a_{ik}|$ — определитель.
 $[\mathbf{A}\mathbf{B}]$ или $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ — векторное произведение.
 $(\mathbf{A}\mathbf{B})$ или $\mathbf{A}\mathbf{B}$ — скалярное произведение.
 Grad — четырехмерный градиент.
 grad — градиент (дифференциальная операция в трехмерном пространстве).
 Div — дивергенция четырехмерная.
 div — дивергенция (дифференциальная операция в трехмерном пространстве).
 Rot — четырехмерный ротор.
 rot — ротор (дифференциальная операция в трехмерном пространстве).

- ∇ — оператор Гамильтона (набла).
 Δ — оператор Лапласа.
 \square — оператор Гамильтона в четырехмерном пространстве.
 \square^2 — оператор Даламбера.
 \int_S — интеграл по поверхности S .
 \oint_S — интеграл по замкнутой поверхности S .
 \int_L — интеграл по контуру L .
 \oint_L — интеграл по замкнутому контуру L .
 \int_V — интеграл по объему V .



ВВЕДЕНИЕ

Элементарными носителями электричества являются протоны, электроны и позитроны; при этом большинство электрических явлений есть результат перераспределения электронов. Кажущееся различие между явлениями, создаваемыми неподвижными и движущимися зарядами, исторически привело к установлению понятий «электричество» и «магнетизм». Однако в силу единства своей природы они объединяются понятием «электромагнитные явления» (процессы).

Любой электромагнитный процесс, изменяющийся во времени, можно представить в виде ряда или интеграла Фурье (§ Д-7), т. е. в виде спектра частот. Частота и длина волн электромагнитных колебаний в вакууме с ошибкой менее 10^{-4} связаны соотношением

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{f} [\text{м}].$$

В радиоэлектронике изучается широкий диапазон электромагнитных колебаний — от сверхнизких частот до частот, соответствующих оптическим и еще более коротким волнам (см. табл. П-1 и П-2 приложения).

Электромагнитные процессы, происходящие в различных технических устройствах, при изучении можно разделить на процессы, происходящие в средах, и процессы, происходящие в цепях. Первые исследуются методом теории электромагнитного поля, вторые — методом теории электрических цепей.

Деление на среды и цепи является условным. Действительно, в самом общем случае электромагнитные процессы происходят в неоднородных средах, т. е. в пространстве, заполненном ограниченными объемами вещественной материи с различными электромагнитными свой-

ствами — проводниками, диэлектриками и т. д. Если линейные размеры неоднородностей превышают длину электромагнитной волны, то следует рассматривать «среду»; если неоднородности меньше длины волны — надо рассматривать «цепи». Поэтому в одном и том же техническом устройстве электромагнитный процесс при низких частотах (при длинных волнах) исследуется с помощью теории цепей, а при высоких частотах (при коротких волнах) — с помощью теории поля. Однако имеется целый ряд устройств, например магнитные цепи электрических машин, в которых процессы и при низких частотах исследуются методами теории поля, и имеются другие устройства, например волноводные линии передачи сверхвысоких частот, которые успешно исследуются методом теории цепей.

Линейные электромагнитные процессы описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, которые определяются параметрами сред и цепей. Среды и цепи с постоянными параметрами называются линейными. Основное свойство линейных процессов состоит в выполнении принципа наложения (суперпозиции) и в неизменности состава спектра частот.

Деление на линейные и нелинейные среды и цепи условно. Линейные среда или цепь при малых значениях поля или тока становятся нелинейными при больших значениях этих величин.

Изучение электромагнитных процессов является предметом электродинамики. Задачи ее могут быть сведены:

к уравнениям квантовой электродинамики, учитывающим дискретную природу не только вещества, но и поля, и пригодными поэтому даже в случаях, когда длина электромагнитной волны меньше размеров молекул и атомов;

к дифференциальным или интегральным уравнениям классической электродинамики, являющимся частным случаем уравнений квантовой электродинамики, учитывающим только волновые свойства поля, в которых вещество рассматривается как «сплошная» среда; эти уравнения пригодны лишь в случаях, когда длина электромагнитной волны больше межмолекулярных размеров.

Квантовая электродинамика рассматривает излучение энергии как прерывистое испускание порций энер-

гии — фотонов, движущихся со скоростью света в вакууме, причем число фотонов, излучаемых в течение одного периода колебаний, равно по порядку величин

$$n_{\phi} \approx P \lambda^2 \cdot 10^{16}.$$

Здесь P — мощность излучения [вт], а λ — длина волны в вакууме [м].

Волновая трактовка электромагнитного излучения допустима при условии $n_{\phi} \gg 1$, т. е. когда $P \lambda^2 \gg 10^{-16}$. Отсюда следует, что электромагнитное поле можно рассматривать как волновой процесс лишь при сравнительно больших значениях произведения $P \lambda^2$.

В настоящей книге изучение электромагнитных процессов ведется, исходя из волновой природы. При изучении процессов в средах используется дифференциальная форма уравнений с понятиями электрической и магнитной напряженностей поля, проводимости и проницаемостей среды (теория электромагнитного поля). При изучении процессов в цепях используется интегральная форма уравнений с понятиями напряжения и тока, действительного и реактивного сопротивлений цепи (теория линейных цепей). При этом применяется международная система единиц СИ (приложение, табл. П-3).

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1-1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ

Электрические заряды, расположенные в пространстве, испытывают силовое взаимодействие. При этом изменение величины или положения любого заряда в данный момент времени, спустя некоторый промежуток времени, вызывает изменение сил, действующих на другие заряды. Это означает, что распространение в пространстве изменения сил взаимодействия происходит с конечной скоростью и что заполняющая пространство среда участвует в передаче этого изменения. На основании этого можно утверждать, что непосредственного взаимодействия заряда с зарядом не существует, а *каждый заряд создает электромагнитное поле, действующее на другой заряд, зависящее от координат пространства и времени и распространяющееся с конечной скоростью.*

Электромагнитное поле создается электрическими зарядами, независимо от того, движутся они или находятся в покое.

Электромагнитное поле может быть исследовано с помощью «пробного» заряда, малого по размерам и по величине, вследствие чего предполагается, что он практически не искажает исследуемое поле.

В самом общем случае электромагнитное поле характеризуется действующей на пробный электрический заряд q_n силой:

$$\mathbf{F} = q_n \mathbf{E} + q_n [\mathbf{v} \mathbf{B}]. \quad (1-1-1)$$

На основании этого электромагнитное поле можно характеризовать выражением

$$\frac{\mathbf{F}}{q_n} = \mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (1-1-2)$$

Здесь \mathbf{E} — напряженность электрического поля $[\text{в/м}]$, которая может быть определена как сила, действующая на единичный неподвижный заряд (при $E=1 \text{ в/м}$ сила, действующая на заряд в 1 к, численно равна $1 \text{ н}=0,102 \text{ кГ}$);

\mathbf{v} — скорость движущегося пробного заряда $[\text{м/сек}]$;

\mathbf{B} — магнитная индукция $[\text{вб/м}^2]$, определяющая действующую на движущийся заряд и, следовательно, и на провод длиной l с током i силу, численно равную 1 н при $B=1 \text{ вб/м}^2$, если $li=1 \text{ м} \cdot \text{а}$.

Линии, в любой точке которых направление вектора \mathbf{E} совпадает с касательной, называются *электрическими силовыми линиями* (см. § Д-3). Линии, в любой точке которых направление вектора \mathbf{B} совпадает с касательной, называются *силовыми линиями магнитной индукции*.

Электромагнитное поле называется однородным, если во всех точках пространства плотность силовых линий одинакова, т. е. если \mathbf{E} и \mathbf{B} от координат пространства не зависят.

Из выражения (1-1-1) следует, что направление силы, действующей на неподвижный положительный заряд, совпадает с направлением вектора \mathbf{E} , а направление действующей на подвижный заряд добавочной силы перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{v} и \mathbf{B} . С направлением вектора \mathbf{B} совпадает ось, вокруг которой вращается внесенный в исследуемое поле пробный заряд.

Таким образом, электромагнитное поле характеризуется двумя векторными величинами \mathbf{E} и \mathbf{B} или шестью скалярными E_i и B_i . Для определения этих величин необходимо иметь шесть скалярных уравнений. Однако число их можно уменьшить, характеризуя поле векторным потенциалом \mathbf{A} и скалярным потенциалом φ , которые связаны с \mathbf{E} и \mathbf{B} следующими выражениями:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad (1-1-3)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1-1-4)$$

Для нахождения \mathbf{A} и φ необходимо только четыре скалярных уравнения.

Количественная характеристика электромагнитного поля, помимо выражения (1-1-2), с использованием (1-1-3) и (1-1-4) может быть представлена выражением

$$\frac{\mathbf{F}}{q_n} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{A}]. \quad (1-1-5)$$

Скалярный φ [в] и векторный \mathbf{A} [вб/м] потенциалы характеризуют энергию электромагнитного поля.

1-2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДЫ

Электромагнитное поле существует как в пространстве, не содержащем вещества (вакуум), так и в пространстве, заполненном веществом.

Под действием электромагнитного поля, характеризующегося векторами \mathbf{E} и \mathbf{B} , в вещественной среде возникает движение свободных зарядов, смещение зарядов, связанных молекулярной структурой вещества, и изменяется ориентация оси вращения элементарных зарядов.

Количественно эти явления определяются выражениями:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}; \quad (1-2-1)$$

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_{\epsilon}) \epsilon_0 \mathbf{E}; \quad (1-2-2)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{(1 + \chi_m) \mu_0}, \quad (1-2-3)$$

в которых

\mathbf{J} — плотность тока проводимости [а/м²];

\mathbf{D} — электрическая индукция [к/м²];

\mathbf{H} — напряженность магнитного поля [а/м];

σ — удельная проводимость среды [сим/м], $1/\sigma$ — удельное сопротивление среды [ом·м];

$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^9}$ — электрическая постоянная [ф/м];

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ — магнитная постоянная [гн/м];

χ_{ϵ} — электрическая восприимчивость вещества;

χ_m — магнитная восприимчивость вещества.

При наличии сторонних источников выражение (1-2-1) переписывается в виде

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ст}) \quad (1-2-1a)$$

или

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^{ст}). \quad (1-2-1б)$$

Здесь $\mathbf{E}^{ст}$ и $\mathbf{J}^{ст}$ — соответственно стороннее поле и сторонняя плотность тока, которые возбуждают изучаемое электромагнитное поле (в системе уравнений считаются заданными).

Сторонние источники, создающие $\mathbf{E}^{ст}$ или $\mathbf{J}^{ст}$, могут быть как электрического происхождения (другое, «стороннее» электромагнитное поле), так и неэлектрического (преобразователи неэлектрической энергии в электрическую). Примерами последних служат: гальванический элемент, в котором химическая энергия преобразуется в электрическую, мотор-генератор, преобразующий механическую энергию в электрическую, и др.

Уравнение (1-2-1a) выразит обобщенный закон Ома в дифференциальной форме.

Величины σ , χ_a и χ_m являются параметрами вещественной среды. Для вакуума каждая из этих величин равна нулю.

Строго говоря, указанные параметры относятся к «сплошной» (непрерывной) среде, каковой не является пространство, заполненное веществом, состоящим из элементарных частиц, распределенных в вакууме. Однако мы можем рассматривать вещественную среду как «сплошную», если длина электромагнитной волны значительно превышает межмолекулярные расстояния. В этом случае электромагнитные параметры среды определяются как средние значения внутри элементарного объема, размеры которого, однако, много меньше длины волны. При электромагнитных волнах инфракрасного диапазона и еще более коротких такое усреднение недопустимо, так как в этом случае электромагнитная волна оказывается сравнимой и даже меньше межмолекулярных расстояний любого вещества.

Величины

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_a &= (1 + \chi_a) \epsilon_0 = \epsilon \epsilon_0, \\ \mu_a &= (1 + \chi_m) \mu_0 = \mu \mu_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2-4)$$

называются соответственно абсолютной диэлектрической и абсолютной магнитной проницаемостью среды, а величины ϵ и μ — относительной диэлектрической и магнитной проницаемостью.

Среда называется однородной, если ее параметры не зависят от координат, линейной, если параметры не зависят от величин напряженностей электрического и магнитного полей, изотропной, если они не зависят от направления векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Параметры изотропной среды σ , χ_e и χ_m являются скалярными величинами. Если параметры среды зависят от координат, то такая среда называется неоднородной.

Если параметры среды не зависят от координат пространства и величин напряженностей электрического и магнитного полей, но при этом по крайней мере один из параметров зависит от направления последних, то среда называется однородной, линейной и анизотропной; в этом случае σ , χ_e или χ_m являются тензорными величинами. Например, электрическая восприимчивость в этом случае будет выражаться тензором (Д-2-10):

$$\chi_{ik} = \begin{vmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{vmatrix}.$$

Поэтому в анизотропной среде

$$J_i = \sigma_{ik} E_k;$$

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_{ik} E_k;$$

$$B_i = \mu_0 \mu_{ik} H_k,$$

т. е. вектор \mathbf{J} не параллелен \mathbf{E} , вектор \mathbf{D} не параллелен \mathbf{E} и вектор \mathbf{B} не параллелен \mathbf{H} .

Анизотропия наблюдается у большинства кристаллов. Примером может служить кварц, проводимость которого в направлении главной оси кристалла в 300 раз больше, чем в перпендикулярном. В некоторых веществах анизотропия возникает под воздействием внешних сил. Например, анизотропия проводимости возникает в металлах при неравномерном нагревании (термоэлектрический эффект) или под действием магнитного поля (эффект Холла). В плазме, в ферритах и некоторых других веществах анизотропия возникает под действием постоянного магнитного или электрического поля.

Если внешние силы, изменяющие параметры среды, являются функциями времени, то и ее параметры становятся функциями времени, например:

$$\chi(t) = \chi_0(1 + m \cdot \sin \Omega t).$$

В этом случае среда называется параметрической. Явления, происходящие в таких средах, описываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами и сопровождаются изменением состава спектра частот.

Электромагнитные параметры в общем случае обладают дисперсией, т. е. зависят от частоты поля. В частности, при частоте $\omega \rightarrow \infty$ значения ϵ и μ стремятся к единице, поскольку подвижность элементарных зарядов при этом относительно мала и процессы, приводящие к отличию \mathbf{D} от $\epsilon_0 \mathbf{E}$ и \mathbf{B} от $\mu_0 \mathbf{H}$, не успевают происходить.

Если проводимость $\sigma > 10^{-10}$, то среда называется проводящей. В технике проводящие среды делят на проводники, для которых $\sigma > 10^4$ сим/м, и полупроводники, для которых $10^4 > \sigma > 10^{-10}$ сим/м. Среда, для которой $\sigma < 10^{-10}$ сим/м, называется непроводящей (изолятором). Под идеально проводящей средой подразумевается гипотетическая среда, у которой $\sigma = \infty$.

Вещество, у которого $\chi_a \neq 0$ называется диэлектриком; по величине проводимости диэлектрик относится к изоляторам; у «идеального» диэлектрика (изолятора), как и в вакууме, $\sigma = 0$.

Вещество, у которого $\chi_m \neq 0$, называется магнетиком; по величине проводимости магнетики в большинстве случаев относятся к проводникам, реже — к полупроводникам и изоляторам.

Вещество с малой проводимостью ($\sigma < 10^{-5}$ сим/м), у которого $\chi_m > 0$ и $\chi_a > 0$, называется магнитодиэлектриком.

Проводники разделяют на проводники первого рода и второго рода; у проводников первого рода проводимость с повышением температуры уменьшается, а у проводников второго рода — возрастает.

Проводники первого рода. К ним относятся металлы, в которых между положительными ионами кристаллической решетки под действием внешнего электрического поля движутся электроны проводимости, представляющие плазму твердого тела в металле. Перемещение за-

рядов в этом случае не связано с химическим изменением проводника.

Плотность тока проводимости может быть выражена формулой

$$\mathbf{J} = en \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \quad [a/cm^2]. \quad (1-2-5)$$

Здесь e — заряд электрона $[к]$;

n — число электронов в единице объема $[см^{-3}]$,
(для одновалентного металла $n = 10^{22} \div 10^{23}$);

ρ — объемная плотность заряда $[к/см^3]$, движущегося со средней скоростью \mathbf{v} $[см/сек]$.

В технике наибольшее значение плотности тока обычно не превышает $1000 \text{ } a/cm^2$, ввиду чего $v < 1 \text{ } см/сек$, т. е. много меньше скорости теплового движения электронов в металлах. Значения проводимости для различных металлов приведены в табл. П-4 приложения.

Зависимость проводимости металлов от температуры определяется формулой

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \alpha T}, \quad (1-2-6)$$

где T — температура в $^{\circ}C$;

σ_0 — проводимость при $0^{\circ}C$;

α — температурный коэффициент (при $0^{\circ} \leq T \leq 100^{\circ}C$ он равен $(3,3 \div 6,2) \cdot 10^{-3} \cdot град^{-1}$).

Проводники второго рода. К их числу относят электролиты, т. е. растворы кислот, солей и щелочей, в которых происходит диссоциация нейтральных молекул на положительные и отрицательные ионы. Под действием электрического поля возникает перемещение ионов, т. е. возникает ток проводимости, приводящий к химическому изменению электролита. Плотность тока в электролите определяется выражением

$$\mathbf{J} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-, \quad (1-2-7)$$

в котором ρ_+ , ρ_- и \mathbf{v}_+ , \mathbf{v}_- — объемные плотности и средние скорости положительных и отрицательных ионов. Оба слагаемых $\rho_+ \mathbf{v}_+$ и $\rho_- \mathbf{v}_-$ направлены в одну сторону. С ростом температуры число диссоциированных молекул возрастает, вследствие чего проводимость электролита увеличивается. Удельные проводимости различных электролитов указаны в табл. П-5 приложения.

Проводником второго рода является также плазма — ионизированный газ, в котором часть молекул или

все они диссоциированы на электроны и положительные ионы; в целом, такая плазма всегда нейтральна, чем она и отличается от плазмы твердого тела, которая в большинстве случаев является заряженной (например, электронная плазма в металлах). Поведение плазмы в электромагнитном поле и ее проводимость рассматриваются во 2-й и 5-й главах.

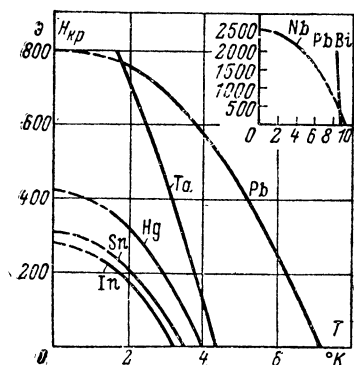


Рис. 1-1. Критические значения напряженности магнитного поля $H_{кр}$ в зависимости от температуры для некоторых сверхпроводников.

Полупроводник — вещество, проводимость которого осуществляется за счет движения ионов решетки или электронов. В первом случае ток сопровождается переносом вещества, что приводит к разрушению полупроводника; практического значения такие полупроводники почти не имеют. Большое практическое значение имеют электронные полупроводники, носителями зарядов которых являются электроны и «дырки», образующие плазму твердого тела. Удельные проводимости различных полупроводников приведены в табл. П-6 приложения.

Сверхпроводник. У некоторых металлов, их сплавов и соединений при температурах, близких к абсолютному нулю, $\sigma \rightarrow \infty$ (практически $\sigma \approx 10^{21}$ сим/м) и $\chi_m = -1$. Это состояние вещества называется сверхпроводимостью, а температура, при которой она наступает, называется температурой перехода $T_{пер}$; она определяется атомной структурой вещества и зависит от магнитного поля; при превышении критического значения напряженности этого поля $H_{кр}$ сверхпроводимость исчезает. Зависимость $H_{кр}$ от температуры выражается формулой

$$H_{кр} \approx H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_{пер}} \right)^2 \right] \quad (1-2-8)$$

и графически представлена на рис. 1-1. Здесь $H_0 = H_{кр}$ при $T = 0^\circ \text{K}$.

В табл. П-7 приложения приведены сверхпроводящие элементы и указаны их температуры перехода. Следует отметить, что состояние сверхпроводимости наблюдается не только в постоянном поле, но и в переменных полях с частотой до 10^{10} гц ($\lambda = 3$ мм).

Диэлектрики (приложение, табл. П-8) отличаются от проводников тем, что в них практически нет свободных зарядов, которые под действием поля могут перемещаться по всему объему. В основном диэлектрик состоит либо из электрически нейтральных молекул, либо из ионов, связанных неэлектрическими силами так, что перемещение зарядов невозможно. Только под действием электрического поля большой напряженности может произойти нарушение этих связей; в результате этого в диэлектрике возникает нестабильный ток проводимости и молекулярная структура диэлектрика изменяется. Это явление называется электрическим пробоем, а величина поля, при которой происходит пробой, — электрической прочностью изолятора (табл. П-9 приложения).

Основным свойством диэлектрика является индуцированная поляризация, т. е. смещение в нем связанных зарядов под действием внешнего электрического поля. В результате этого образуются пары — электрические диполи. В общем случае электрический диполь — это два одинаковых по величине, но разноименных по знаку заряда, расположенных на некотором расстоянии l . Количественно электрический диполь характеризуется электрическим моментом

$$\mathbf{p}_э = ql, \quad (1-2-9)$$

который направлен от отрицательного заряда к положительному.

Индукцированная поляризация характеризуется вектором поляризации \mathbf{P} , который выражает отличие электрической индукции в среде от индукции в вакууме,

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} \text{ [к/м}^2\text{]}; \quad (1-2-10)$$

с учетом выражения (1-2-2),

$$\mathbf{P} = \chi_э \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (1-2-11)$$

С другой стороны, вектор поляризации определяется как электрический момент единицы объема, т. е.

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_э}{\Delta V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{эi} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{l}_i. \quad (1-2-12)$$

Здесь Δp_3 — электрический момент элементарного объема ΔV ;

n — число элементарных диполей в единице объема;

p_{3i} — момент i -го элементарного диполя.

Индукированная поляризация состоит из электронной, ионной и ориентационной составляющих. Электронная поляризация — смещение электронов от-

носительно ядра в пределах атома — имеет место во всех диэлектриках.

Ионная поляризация — взаимное смещение отрицательных и положительных ионов кристаллической решетки вещества; она возрастает с увеличением температуры и имеет место при всех частотах, вплоть до частот, соответствующих диапазону инфракрасных лучей.

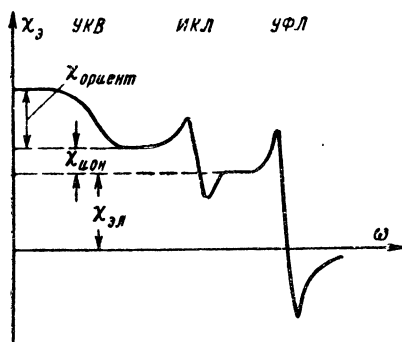


Рис. 1-2. Зависимость электрической восприимчивости χ_3 от частоты.

Ориентационная поляризация имеет место в диэлектрике, молекулы которого обладают собственным электрическим моментом с хаотической ориентацией их в отсутствие внешнего электрического поля. Такие молекулы называют полярными; под действием внешнего поля E они ориентируются в соответствующем направлении.

Процессы смещения электронов, ионов и ориентация молекул происходят в электрическом поле не мгновенно. Время, в течение которого равновесного состояния достигает $1/e = 0,37$ всех частиц, называется *временем релаксации*; оно тем меньше, чем меньше масса частиц. Наименьшее время релаксации у электронов. Если период изменения поля сравним со временем релаксации ориентационного, ионного или электронного механизма поляризации либо меньше его, то смещение молекул, ионов или электронов не будет «успевать» за изменением поля. С увеличением частоты поля постепенно уменьшается вклад в поляризацию среды ориентационного меха-

низма поляризации, а затем и ионного. Это приводит к зависимости электрической восприимчивости χ_a и связанной с ней диэлектрической проницаемости ε от частоты поля. Общий вид зависимости χ_a от частоты приведен на рис. 1-2. В частности, относительная диэлектрическая проницаемость воды равна 80 при частотах, меньших $3 \cdot 10^{10}$ гц, и 1,77 в оптическом диапазоне.

Поляризуемость, а следовательно, и значения χ_a и ε с увеличением температуры уменьшаются, так как ориентирующее действие электрического поля уменьшается тепловыми колебаниями.

Численные значения χ_a большинства диэлектриков не превышают нескольких десятков единиц. В табл. П-10 приложения приведены значения $\varepsilon = (1 + \chi_a)$ некоторых диэлектриков.

В анизотропных диэлектрических средах вектор \mathbf{P} не совпадает с вектором \mathbf{E} и аналогично (1-2-11) на основании (Д-2-22) выражается в виде

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ik}^a E_k = \varepsilon_0 (\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}) E_k.$$

Сегнетоэлектрики (ферроэлектрики) — диэлектрики, у которых аналогично ферромагнетикам существует поляризация областей (доменов) в отсутствии внешнего поля; это так называемая спонтанная поляризация, обусловленная внутренним строением молекул. Во внешнем поле происходит ориентация доменов, и величина ε составляет несколько тысяч единиц.

Магнетики делятся на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Характеризуются они вектором намагниченности \mathbf{M} , каковой аналогичен вектору поляризации \mathbf{P} в диэлектрике и определяется выражением

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu - 1) \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H}. \quad (1-2-13)$$

Численно вектор намагниченности равен приросту напряженности магнитного поля в веществе по сравнению с вакуумом. Из последнего выражения следует, что магнитная индукция в магнетике описывается выражением

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (1-2-14)$$

С другой стороны, вектор \mathbf{M} определяется как магнитный момент единичного объема вещества, т. е.

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}_M}{\Delta V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{Mi}. \quad (1-2-15)$$

Здесь Δp_m — магнитный момент элементарного объема ΔV ;

n — число элементарных магнитных диполей в единице объема;

p_{mi} — момент i -го элементарного диполя $[a \cdot m^2]$.

В общем случае магнитный диполь с моментом

$$p_m = n_0 Si \quad (1-2-16)$$

создается при прохождении тока i по замкнутому контуру, ограничивающему площадь S . Направление момента совпадает с положительным направлением нормали n_0 (см. § Д-3) к площади S .

Элементарным магнитным диполем является движущийся по орбите электрон, обладающий орбитальным магнитным моментом p_{me} . Кроме того, электрон обладает собственным спиновым моментом. Во внешнем магнитном поле H возникает прецессия вектора магнитного момента электрона; наличие ее приводит к появлению у электрона дополнительного орбитального магнитного момента $p_{мепр}$, направленного против вектора H .

У диамагнетиков в силу их структуры магнитный момент атома p_{ma} , определяемый магнитными моментами электронов, в отсутствие внешнего магнитного поля равен нулю. При наличии же внешнего поля, вследствие возникновения отрицательного прецессионного магнитного момента $p_{мепр}$, магнитный момент атома становится отрицательным, и намагниченность данного вещества будет направлена против поля; в результате у диамагнетиков $\chi_m < 0$.

У парамагнетиков в силу их структуры магнитный момент атома p_{ma} не равен нулю и в отсутствие внешнего поля. Однако вследствие хаотической ориентации атомных моментов намагниченность парамагнитного вещества равна нулю. В присутствии внешнего поля происходит соответствующая ориентация собственных атомных моментов; при этом $p_{ma} \gg p_{мепр}$ и суммарный магнитный момент вещества направлен по полю; в результате у парамагнетиков $\chi_m > 0$.

В ферромагнетиках существуют отдельные макроскопические области — домены с линейными размерами порядка 10^{-3} см; внутри каждого домена все элементарные моменты параллельны друг другу. Вследствие этого ка-

ждый домен обладает собственным магнитным моментом, величина которого определяется структурой вещества и не зависит от внешних полей. Однако в отсутствие внешнего поля магнитные моменты доменов ориентированы хаотически, и суммарный магнитный момент вещества равен нулю. При наличии внешнего магнитного поля происходит ориентация магнитных моментов доменов по полю, вследствие чего $B \gg H$ и $\chi_m \gg 1$.

У ферромагнетиков значение μ зависит от величины напряженности магнитного поля H , а максимальные значения μ достигаются порядка нескольких тысяч. Ферромагнетик способен удерживать магнитную индукцию в отсутствие внешнего поля.

Магнитная проницаемость, как и диэлектрическая, зависит от частоты; при $\omega \rightarrow \infty$ μ стремится к единице, причем быстрее, чем ϵ .

При некоторой напряженности магнитного поля H_s , моменты всех доменов ориентируются в одном направлении, и при дальнейшем увеличении напряженности поля намагниченность вещества остается практически неизменной. Это явление называется *магнитным насыщением*, а соответствующая намагниченность — намагниченностью насыщения M_s .

В табл. П-11 приложения приведены значения μ для различных магнетиков.

Некоторые ферромагнитные вещества, имеющие определенную кристаллическую структуру, при намагничивании характеризуются тензором μ_{ik} . К ним относятся ферриты, применяемые в устройствах сверхвысоких частот.

1-3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Экспериментально установлены следующие законы.

Закон о возбуждении магнитного поля токами (Ампера):

$$\oint_{\partial L} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum i \quad (1-3-1)$$

— циркуляция (Д-3-25а) напряженности магнитного поля \mathbf{H} по контуру равна сумме токов, охватываемых этим контуром (рис. 1-3). Это означает, что *причиной магнитного поля является ток*.

Закон электромагнитной индукции (Фарадея):

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1-3-2)$$

— циркуляция напряженности электрического поля \mathbf{E} по контуру равна изменению потока индукции Φ [вб] через площадь, ограниченную этим контуром (рис. 1-4). Это означает, что *причиной вихревого электрического поля является изменение магнитного потока.*

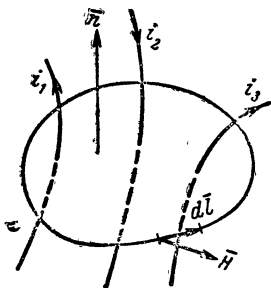


Рис. 1-3. К закону полного тока.

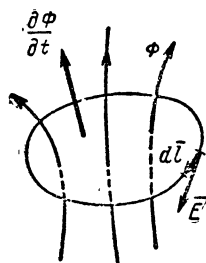


Рис. 1-4. К закону электромагнитной индукции.

Закон взаимодействия электрических зарядов (Кулона):

$$\mathbf{F} = e_r \frac{qq'}{4\pi\epsilon_a r^2} \quad (1-3-3)$$

— сила взаимодействия зарядов обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

В правые части уравнений (1-3-1) и (1-3-2), согласно (Д-3-26), могут быть сделаны подстановки

$$i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} \quad (1-3-4)$$

и

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (1-3-5)$$

определяющие электрический ток i и поток магнитной индукции Φ через данную поверхность S .

В общем случае правую часть уравнения (1-3-1) можно записать в виде

$$\sum i = \int_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{см}}) d\mathbf{S}. \quad (1-3-6)$$

Здесь \mathbf{J} — плотность токов проводимости, определяемая выражением (1-2-1),

$$\mathbf{J}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-3-7)$$

— плотность токов смещения. С учетом выражения (1-2-10)

$$\mathbf{J}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1-3-7a)$$

Первое слагаемое в правой части последнего выражения определяет ток поляризации, каковым является смещение зарядов в пределах молекул под воздействием переменного электрического поля на диэлектрик. Действительно, пусть за время dt электрическое поле \mathbf{E} изменяется на величину $d\mathbf{E}$, что вызывает смещение зарядов диполя на $d\mathbf{l}$ и изменение дипольного момента \mathbf{p} , согласно выражению (1-2-9), на величину

$$d\mathbf{p} = q d\mathbf{l} = q \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt = q \mathbf{v} dt,$$

где \mathbf{v} — скорость смещения связанных разноименных зарядов друг относительно друга.

При этом изменение вектора поляризации, согласно (1-2-12), определится выражением

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{l}_i = \mathbf{v}_0 \sum_{i=1}^n q_i = \rho_{\text{св}} \mathbf{v}_0,$$

где \mathbf{v}_0 — средняя скорость смещения разноименных зарядов друг относительно друга, $\rho_{\text{св}}$ — объемная плотность одноименных зарядов.

Аналогично (1-2-5) обозначим:

$$\mathbf{J}_{\text{поляри}} = \rho_{\text{св}} \mathbf{v}_0,$$

где $\mathbf{J}_{\text{поляри}}$ — плотность тока поляризации. Ток поляризации, как и ток проводимости, сопровождается магнитным полем.

Второе слагаемое в правой части выражения (1-3-7а) не связано с движением каких-либо заряженных частиц и характеризует изменение электрического поля, которое приводит к возникновению магнитного. Эта величина имеет размерность плотности тока и называется током смещения в вакууме. Как токи проводимости и поляризации, так и ток смещения в вакууме, связаны с магнитным полем.

Подставляя выражения (1-3-6) и (1-3-7) в (1-3-1), получаем первое интегральное уравнение электромагнитного поля:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \quad (1-3-8)$$

Подставляя выражение (1-3-5) в (1-3-2), получаем второе интегральное уравнение электромагнитного поля:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1-3-9)$$

Полагая в выражении (1-3-3), что $q' \ll q$, и рассматривая q' как пробный заряд, можно определить напряженность электрического поля \mathbf{E} , создаваемого зарядом q , в точке расположения пробного заряда в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1-3-10)$$

На основании этого выражения, с учетом выражений (1-2-2) и (1-2-4), определяя поток электрической индукции через поверхность сферы радиуса r , можно написать уравнение

$$q = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S}, \quad (1-3-11)$$

выражающее теорему Гаусса: поток электрической индукции через замкнутую поверхность S равен электрическому заряду, расположенному в объеме, ограниченном этой поверхностью. В общем случае заряд можно представить в виде

$$q = \int_V \rho dV, \quad (1-3-12)$$

где ρ [к/м³] — объемная плотность заряда. Подставляя последнее выражение в (1-3-11), получаем третье интегральное уравнение

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \quad (1-3-13)$$

являющееся обобщением опытного факта о прерывности электрических силовых линий на поверхности зарядов.

Используя выражение (1-1-4), на основании формулы (Д-3-17) можем написать:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

следовательно,

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0.$$

На основе этого, применяя теорему Остроградского — Гаусса (Д-3-30), получаем четвертое интегральное уравнение, выражающее непрерывность линий магнитной индукции:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (1-3-14)$$

Электрический ток определяется величиной заряда, проходящего через данную поверхность S в единицу времени, т. е.

$$i = - \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (1-3-15)$$

Отсюда на основании выражений (1-3-4) и (1-3-12) можно написать интегральное уравнение непрерывности тока, выражающее закон сохранения заряда:

$$\oint_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (1-3-16)$$

1-4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Общую математическую формулировку основных законов электромагнитных процессов дал Максвелл (1873 г.) в виде дифференциальных уравнений электромагнитного поля. Эти уравнения, являясь универсальными, позволяют решать все задачи, относящиеся как к по-

стоянным, так и к переменным полям, но только до частот, соответствующих волнам, длина которых значительно превышает расстояния между элементарными частицами вещества, заполняющего частично или полностью исследуемое пространство.

Первое уравнение Максвелла, обобщающее закон полного тока, получается из интегрального уравнения (1-3-8) при использовании теоремы Стокса (Д-3-28):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1-4-1)$$

Второе уравнение Максвелла, обобщающее закон электромагнитной индукции, получается аналогичным образом из интегрального уравнения (1-3-9) с использованием теоремы Стокса (Д-3-28):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1-4-2)$$

Третье уравнение Максвелла, обобщающее закон о прерывности линий электрической индукции, получается из интегрального уравнения (1-3-13) с использованием теоремы Остроградского — Гаусса (Д-3-30):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (1-4-3)$$

Четвертое уравнение Максвелла, обобщающее закон о непрерывности линии магнитной индукции, получается аналогичным образом — из интегрального уравнения (1-3-14) с использованием той же теоремы:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1-4-4)$$

Пятое дифференциальное уравнение, обобщающее закон сохранения заряда, получается аналогично — из интегрального уравнения (1-3-16) с использованием теоремы Остроградского — Гаусса:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1-4-5)$$

Для проводящей среды последнее уравнение принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (1-4-6)$$

Это означает, что поле вектора \mathbf{J} соленоидально (Д-3-38), т. е. линии тока замкнуты. Действительно, заменяя левую

часть равенства (1-4-5) с использованием выражений (1-2-1), (1-4-3) и (1-2-2), находим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_a} \rho = 0. \quad (1-4-7)$$

Решением этого уравнения является выражение

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_a} t}, \quad (1-4-8)$$

которое означает, что в проводящей среде заряд убывает по экспоненте и не зависит от приложенного поля \mathbf{E} . В проводниках, где σ велика, заряды исчезают весьма быстро. Время, в течение которого плотность заряда убывает в $e=2,72$ раза, называется временем релаксации. Для металлов время релаксации имеет порядок 10^{-17} сек. Поэтому можно считать $\rho=0$ и равенство (1-4-6) справедливым при переменном поле с частотой $f \leq 10^{15}$ гц.

Итак, мы имеем следующую систему дифференциальных уравнений электромагнитного поля, дающих пространственно-временное описание электромагнитного процесса:

$$\left. \begin{aligned} \text{I } \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ \text{II } \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \text{III } \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; \\ \text{IV } \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\ \text{V } \operatorname{div} \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (1-4-9)$$

Для описания электромагнитных процессов в линейных изотропных и однородных средах можно пользоваться уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \text{I } \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \\ \text{II } \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \\ \text{III } \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_a; \\ \text{IV } \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-4-10)$$

Для описания линейных процессов в анизотропных средах система дифференциальных уравнений включает тензорные параметры (см. § Д-2).

$$\left. \begin{aligned} \text{I } \operatorname{rot}_i \mathbf{H} &= \sigma_{ik} E_k + \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} \frac{\partial E_k}{\partial t}; \\ \text{II } \operatorname{rot}_i \mathbf{E} &= -\mu_0 \mu_{ik} \frac{\partial H_k}{\partial t}; \\ \text{III } \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ik} E_k &= \rho; \\ \text{IV } \mu_0 \frac{\partial}{\partial x_i} \mu_{ik} H_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-4-11)$$

Уравнения (1-4-10) и (1-4-11) удовлетворяют принципу суперпозиции.

На зависимости характеристик поля от времени основана следующая классификация электромагнитных полей.

Нестационарное поле — поле, быстро меняющееся во времени; создается переменным током большой частоты. Такое поле описывается всей системой уравнений Максвелла (1-4-9).

Квазистационарное поле создается переменным током «низкой частоты», при котором можно полагать:

$$\varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \ll \sigma \mathbf{E}; \quad (1-4-12)$$

вследствие этого уравнение I системы (1-4-9) можно переписать в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \approx \sigma \mathbf{E}. \quad (1-4-13)$$

Стационарное поле — поле, создаваемое равномерно движущимися зарядами, т. е. постоянным током. Полагая в уравнениях системы (1-4-9), что $\partial/\partial t = 0$, а $\mathbf{J} \neq 0$, уравнения I и II этой системы можно переписать в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (1-4-14)$$

Статическое поле — поле в пространстве без токов, неизменное во времени. Электрическое поле, создаваемое неподвижными зарядами, называется *электростатическим*. Магнитное поле, создаваемое равномерно движущимися зарядами, траектории которых, однако, не входят в излучаемую область, называется *магнитостатическим*. Положив в уравнениях (1-4-10) $\partial/\partial t = 0$ и $\mathbf{J} = 0$, по-

лучим две независимые системы уравнений: электростатики

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho \end{aligned} \right\} \quad (1-4-15)$$

и магнитостатики

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-4-16)$$

1-5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Уравнения Максвелла позволяют находить поле в любой момент времени как для любой точки области V , ограниченной поверхностью S («внутренняя» задача электродинамики), так и для любой точки вне этой области («внешняя» задача электродинамики). Однако для решения этих уравнений необходимы дополнительные условия, позволяющие определить постоянные интегрирования. К таким условиям относятся условия на границах разнородных сред.

Граничное условие для нормальных составляющих вектора магнитной индукции \mathbf{B} определяется интегральным уравнением (1-3-14):

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

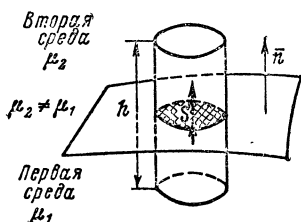


Рис. 1-5. К граничным условиям для нормальных составляющих векторов \mathbf{B} и \mathbf{D} .

Рассмотрим цилиндр, пересекающий поверхность раздела двух сред (рис. 1-5), высота которого $h \rightarrow 0$. Магнитные поля на верхнем и нижнем основаниях цилиндра ввиду их малости считаем однородными, а поток через боковую поверхность цилиндра — равным нулю (так как высота цилиндра стремится к нулю). Тогда в пределе согласно упомянутому уравнению поток, входящий в площадку S' , расположенную на поверхности раздела, со стороны первой среды, должен быть равным потоку, выходящему из нее в сторону второй среды. При этом

$$B_{n(2)} = B_{n(1)} \quad (1-5-1)$$

и

$$H_{n(2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n(1)}. \quad (1-5-2)$$

Следовательно, нормальные составляющие вектора магнитной индукции на границе двух сред непрерывны, а нормальные составляющие вектора напряженности магнитного поля претерпевают скачок.

Граничное условие для нормальных составляющих вектора электрической индукции \mathbf{D} определяется аналогично предыдущему с помощью уравнения (1-3-11):

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q.$$

В пределе согласно этому уравнению, разность между потоком, выходящим из площадки S' в сторону второй среды, и потоком, входящим в него со стороны первой среды, равна распределенному на этой площадке заряду $q' = \kappa S'$, где κ — поверхностная плотность заряда [κ/m^2], распределенного на площадке S' . Окончательно имеем:

$$D_{n(2)} - D_{n(1)} = \kappa, \quad (1-5-3)$$

т. е. при наличии поверхностных зарядов нормальные составляющие вектора электрической индукции на границе двух сред терпят разрыв.

Если же поверхностные заряды отсутствуют, то

$$D_{n(2)} = D_{n(1)} \quad (1-5-4)$$

и

$$E_{n(2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n(1)}, \quad (1-5-5)$$

т. е. в этом случае нормальные составляющие вектора электрической индукции непрерывны, а нормальные составляющие вектора напряженности электрического поля претерпевают скачок.

Граничное условие для тангенциальных составляющих вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} получается из интегрального уравнения (1-3-9).

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Рассмотрим контур, расположенный частью в одной среде, частью в другой (рис. 1-6). Считаем контур малым и полагаем, что электрическое поле на отдельных его участках однородно. В пределе при $h \rightarrow 0$ и $l_2 \rightarrow l_1$ правая часть уравнения обращается в нуль. В результате этого $E_{\tau(2)} l_2 - E_{\tau(1)} l_1 = 0$ и, следовательно,

$$E_{\tau(2)} = E_{\tau(1)}. \quad (1-5-6)$$

При этом

$$D_{\tau(2)} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_{\tau(1)}, \quad (1-5-7)$$

т. е. на границе раздела двух сред тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} непрерывны, а тангенциальные составляющие вектора электрической индукции \mathbf{D} претерпевают скачок.

Граничное условие для тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля \mathbf{H} определяется уравнением (1-3-8), т. е.

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}$$

и, аналогично предыдущему случаю, в пределе при $h \rightarrow 0$

$$H_{\tau(2)} - H_{\tau(1)} = \lim_{h \rightarrow 0} Jh = J_{\text{пов}}, \quad (1-5-8)$$

где $J_{\text{пов}}$ — поверхностная плотность тока [а/м], равная величине тока, проходящего в бесконечно тонком слое через единицу длины линии, перпендикулярной направлению тока. Таким образом, тангенциальные составляющие вектора напряженности магнитного поля на границе двух сред терпят разрыв, величина которого равна поверхностной плотности тока в бесконечно тонком слое. Хотя такой ток является абстракцией (может иметь место лишь на поверхности идеально проводящей среды), однако введение его приобретает физический смысл при

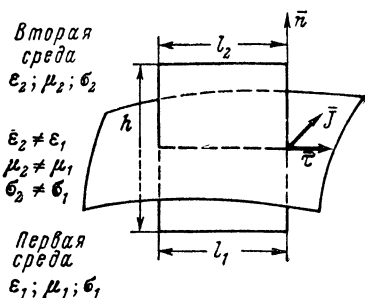


Рис. 1-6. К граничным условиям для тангенциальных составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} .

высокочастотном поле. При этом в хорошо проводящей среде ток течет только в очень тонком поверхностном слое, в пределах которого происходит скачок вектора \mathbf{H} и за которым поле практически отсутствует (см. § 2-7 и 3-3).

Если поверхностный ток отсутствует, то

$$H_{\tau(2)} = H_{\tau(1)}, \quad (1-5-9)$$

$$B_{\tau(2)} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{\tau(1)}, \quad (1-5-10)$$

т. е. при отсутствии тока на поверхности раздела двух сред тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля непрерывны, а тангенциальные составляющие вектора магнитной индукции претерпевают скачок.

Граничные условия на поверхности раздела двух сред иллюстрирует табл. 1-1.

Граничные условия для вектора плотности тока получим из условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля (1-5-6). С учетом выражения (1-2-1)

$$\frac{J_{\tau(1)}}{J_{\tau(2)}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (1-5-11)$$

Условие для нормальных составляющих найдем из выражения (1-3-16), учитывая, что $\rho = \text{div } \mathbf{D}$. Аналогично нахождению граничных условий для нормальных составляющих \mathbf{B} и \mathbf{D} , получим:

$$J_{n(1)} + \frac{\partial D_{n(1)}}{\partial t} = J_{n(2)} + \frac{\partial D_{n(2)}}{\partial t};$$

с учетом выражения (1-5-3)

$$J_{n(1)} = J_{n(2)} + \frac{\partial \kappa}{\partial t}. \quad (1-5-12)$$

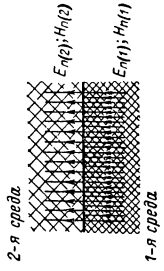
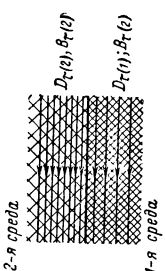
При $\kappa=0$ или в случае стационарного поля $\left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} = 0\right)$

$$J_{n(1)} = J_{n(2)}. \quad (1-5-13)$$

Таким образом, тангенциальные составляющие тока на поверхности раздела претерпевают скачок, а его нормальные составляющие при отсутствии поверхностных зарядов или в случае стационарного поля непрерывны.

Таблица 1-1

Граничные условия на поверхности раздела двух сред

Составляющие	Уравнения	Условия	Графическая интерпретация
Нормальные	$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q$	$B_n(2) = B_n(1)$ $D_n(2) - D_n(1) = \kappa$ <p style="text-align: center;">при $\kappa = 0$</p> $D_n(2) = D_n(1)$	 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1, E_n(2) < E_n(1)$ $\mu_2 > \mu_1, H_n(2) < H_n(1)$
Тангенциальные	$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$	$H_\tau(2) - H_\tau(1) = J_{\text{пов}}$ <p style="text-align: center;">при $J_{\text{пов}} = 0$</p> $H_\tau(2) = H_\tau(1)$ $E_\tau(2) = E_\tau(1)$	 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1, D_\tau(2) > D_\tau(1)$ $\mu_2 > \mu_1, B_\tau(2) > B_\tau(1)$

1-6. ЭНЕРГИЯ И СИЛЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Теорема Умова — Пойнтинга, выражающая закон сохранения энергии электромагнитного поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] + \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + (\mathbf{J}\mathbf{E}) = 0, \quad (1-6-1)$$

вытекает из уравнений I и II системы (1-4-9). Действительно, вычитая из уравнения I, умноженного скалярно на \mathbf{E} , уравнение II, умноженное скалярно на \mathbf{H} , и используя формулу (Д-3-23) векторного анализа, получим уравнение (1-6-1).

Интегрируя выражение (1-6-1) по произвольному объему V и применяя теорему Остроградского — Гаусса (Д-3-30), получим теорему Умова — Пойнтинга в интегральной форме:

$$\oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{S} + \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV + \int_V (\mathbf{J}\mathbf{E}) dV = 0. \quad (1-6-2)$$

В общем случае на основании обобщенного закона Ома (1-2-1а) можно написать:

$$\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma - \mathbf{E}^{\text{сг}}.$$

Подставляя это выражение в (1-6-2), получаем:

$$\begin{aligned} \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{S} + \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV + \\ + \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV - \int_V \mathbf{J}\mathbf{E}^{\text{сг}} dV = 0, \end{aligned}$$

или

$$\oint_S \Pi d\mathbf{S} + \frac{\partial W}{\partial t} + P + P^{\text{сг}} = 0, \quad (1-6-3)$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{W}{\tau_a} + P^{\text{сг}} = 0, \quad (1-6-3a)$$

где τ_a — время релаксации:

$$1/\tau_a = \frac{\oint_S \Pi d\mathbf{S} + \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV}{W}. \quad (1-6-3б)$$

Уравнение (1-6-3) выражает баланс мощностей в интегральной форме. Первый член выражает мощность, проходящую через поверхность S , ограничивающую объем V .

$$P_S = \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}, \quad (1-6-4)$$

где \mathbf{P} [вт/м²] — вектор Пойнтинга, равный

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (1-6-5)$$

Выражение (1-6-4) определяет в самом общем случае передачу электромагнитной энергии. В частном случае

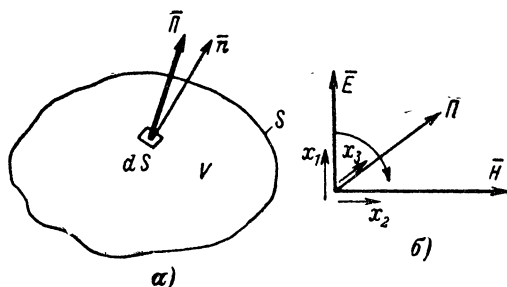


Рис. 1-7. К уравнению баланса мощностей.

a — взаимное расположение векторов \mathbf{P} и \mathbf{p} ;
 b — взаимное расположение векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{p} .

оно представляет мощность, излучаемую с помощью антенны или светового прожектора. В другом частном случае это может быть мощность, отводимая из данного объема с помощью проводов или волновода, пересекающих поверхность, ограничивающую эту область. Если $\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} < 0$, то энергия входит в данную область V через поверхность S ; если же $\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} > 0$, то энергия выходит из этой области.

Физический смысл вектора Пойнтинга — поток энергии, проходящий в единицу времени через единицу поверхности S . Направление вектора \mathbf{P} определяет направление движения энергии (рис. 1-7).

Рассматривая дискретную природу электромагнитного поля, вектор Пойнтинга можно определить по формуле

$$\mathbf{P} = \mathbf{n}_0 N h f, \quad (1-6-5a)$$

в которой \mathbf{n}_0 — орт нормали к поверхности S ; N — число фотонов, проходящих в одну секунду через поверхность площадью 1 м^2 ; $h = 6,625 \cdot 10^{-34} [\text{дж} \cdot \text{сек}]$ — постоянная Планка; f — частота колебаний электромагнитного поля.

В уравнении (1-6-3) $W [\text{дж}]$ — энергия, запасенная в объеме V , определяемая с учетом (1-2-2), (1-2-3) и (1-2-4) формулой

$$W = \int_V \frac{\epsilon_a E^2 + \mu_a H^2}{2} dV, \quad (1-6-6)$$

и $\partial W / \partial t$ — изменение этой энергии за единицу времени.

Третий член уравнения (1-6-3)

$$P = \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV = \int_V \sigma E^2 dV \quad (1-6-7)$$

выражает мощность, поглощаемую проводящей средой внутри объема V , т. е. переход электромагнитной энергии в тепло по закону Джоуля — Ленца.

Последний член уравнения (1-6-3)

$$P^{\text{ст}} = - \int_V (\mathbf{J} \mathbf{E}^{\text{ст}}) dV \quad (1-6-8)$$

определяет мощность сторонних источников, находящихся внутри объема V . Если $P^{\text{ст}} < 0$, то источники отдают энергию полю; если $P^{\text{ст}} > 0$, то они отбирают энергию у поля.

При $P^{\text{ст}} > 0$ имеем:

$$- \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial t} + P + P^{\text{ст}},$$

т. е. приток мощности через поверхность, ограничивающую данный объем, расходуется на изменение энергии в этом объеме, на выделяемое в нем тепло и на возбуждение сторонних источников, которые в этом случае являются поглотителями электромагнитной энергии поля.

При $P^{\text{ст}} < 0$ имеем:

$$P^{\text{ст}} = \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} + \frac{\partial W}{\partial t} + P,$$

т. е. мощность сторонних источников, распределенных в данном объеме, расходуется на излучение энергии че-

рез ограничивающую этот объем поверхность, на изменение энергии и на выделение тепла внутри этого объема.

Согласно выражению (1-6-6), можно определить плотность энергии $[дж/м^3]$:

$$\omega = \omega_{\text{э}} + \omega_{\text{м}}, \quad (1-6-9)$$

где

$$\omega_{\text{э}} = \frac{\epsilon_a E^2}{2} = \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} \quad (1-6-10)$$

— плотность электрической энергии,

$$\omega_{\text{м}} = \frac{\mu_a H^2}{2} = \frac{\mathbf{H} \mathbf{B}}{2} \quad (1-6-11)$$

— плотность магнитной энергии.

Исходя из определения вектора Пойнтинга, скорость распространения электромагнитной энергии

$$\mathbf{v}_{\text{э}} = \frac{\mathbf{P}}{\omega} [м/сек]. \quad (1-6-12)$$

Как показано в дальнейшем, в среде без потерь

$$v_{\text{э}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}. \quad (1-6-12a)$$

Пондеромоторные силы — силы, действующие на тела, находящиеся в электромагнитном поле. Если в объеме V , в котором имеется электромагнитное поле, характеризующееся векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} , находятся свободные заряды, то на них действует сила

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV. \quad (1-6-13)$$

Здесь \mathbf{f} — объемная плотность пондеромоторных сил $[н/м^3]$.

Если в рассматриваемом объеме вакуум или вещественная однородная среда, то объемная плотность сил на основании выражений (1-1-1), (1-2-5) и с учетом (1-3-12), (1-4-3), (1-4-1) может быть представлена в виде

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + [\mathbf{J} \mathbf{B}]$$

или

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mu_a [\operatorname{rot} \mathbf{H} \mathbf{H}] - \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{B} \right]. \quad (1-6-13a)$$

Выражение, определяющее объемную плотность сил в самом общем виде с учетом свойств среды, получим, вводя члены

$$\mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \text{ и } \left\{ \epsilon_a [\operatorname{rot} \mathbf{E} \mathbf{E}] + \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{D} \right] \right\} = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \epsilon_a [\operatorname{rot} \mathbf{E} \mathbf{E}] + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} + \\ & + \mu_a [\operatorname{rot} \mathbf{H} \mathbf{H}] + \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{D} \right] - \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{B} \right] \end{aligned} \quad (1-6-13b)$$

или, с учетом (Д-3-24a) и (1-6-5),

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_k} F_{ik} - \frac{1}{v_g^2} \frac{\partial \Pi_i}{\partial t}. \quad (1-6-14)$$

Здесь F_{ik} — тензор натяжений электромагнитного поля, равный сумме

$$F_{ik} = F_{ik}^{(M)} + F_{ik}^{(e)},$$

в которой, согласно (Д-3-24б),

$$F_{ik}^{(M)} = \mu_a \begin{vmatrix} H_1^2 - \frac{1}{2} H^2 & H_1 H_2 & H_1 H_3 \\ H_2 H_1 & H_2^2 - \frac{1}{2} H^2 & H_2 H_3 \\ H_3 H_1 & H_3 H_2 & H_3^2 - \frac{1}{2} H^2 \end{vmatrix} \quad (1-6-15)$$

тензор натяжений магнитного поля, а

$$F_{ik}^{(e)} = \epsilon_a \begin{vmatrix} E_1^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_1 E_2 & E_1 E_3 \\ E_2 E_1 & E_2^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_2 E_3 \\ E_3 E_1 & E_3 E_2 & E_3^2 - \frac{1}{2} E^2 \end{vmatrix} \quad (1-6-15a)$$

тензор натяжений электрического поля.

Если через $\mathbf{G}_{\text{мех}}$ обозначить полный импульс заряженных частиц, находящихся в объеме V , то

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{G}_{\text{мех}},$$

и выражение (1-6-13) с учетом (1-6-14) и тензорного аналога теоремы Остроградского-Гаусса (Д3-30а) принимает вид:

$$\frac{d}{dt} (G_{\text{мех } i} + G_{\text{поля } i}) = \oint_S F_{ik} dS_k = F_{\text{пов } i} [H]. \quad (1-6-16)$$

Здесь $\mathbf{F}_{\text{пов}}$ — сила, действующая на поверхность, ограничивающую объем V , а $\mathbf{G}_{\text{поля}}$ — импульс электромагнитного поля:

$$\mathbf{G}_{\text{поля}} = \int_V \mathbf{g}_{\text{поля}} dV, \quad (1-6-17)$$

распределенный в объеме V с плотностью

$$\mathbf{g}_{\text{поля}} = \frac{\mathbf{\Pi}}{v_0^2}. \quad (1-6-17a)$$

Давление электромагнитного поля согласно (1-6-16)

$$p_{\text{эм}i} = F_{ik} n_{0k} [H/M^2], \quad (1-6-18)$$

где n_{0k} — орт нормали к поверхности (рис. 1-8). Произведение $F_{ik} n_{0k}$ согласно § Д-2 представляет взаимное свертывание двух тензоров второго и первого рангов. Вычисляя это произведение с учетом (1-6-15) и (1-6-15а), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\text{эм}} = & \left[\mu_a \mathbf{H} (\mathbf{H} n_0) - \frac{1}{2} \mu_a H^2 n_0 \right] + \\ & + \left[\epsilon_a \mathbf{E} (\mathbf{E} n_0) - \frac{1}{2} \epsilon_a E^2 n_0 \right]. \end{aligned} \quad (1-6-19)$$

Выражение для объемной плотности пондеромоторных сил (1-6-13б) можно на основании (Д-3-22), (Д-3-21), (Д-3-5) переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - [\mathbf{D} \operatorname{rot} \mathbf{E}] - \frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \epsilon_a + \\ & + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{H}] - \frac{1}{2} H^2 \operatorname{grad} \mu_a - \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{DB}]; \end{aligned}$$

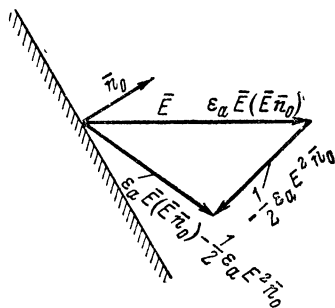


Рис. 1-8. Составляющая давления на поверхность, определяемая электрическим полем.

принимая во внимание уравнения I—IV системы (1-4-9),

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + [\mathbf{J}\mathbf{B}] - \frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon_a - \frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu_a. \quad (1-6-20)$$

Если проницаемости ϵ_a и μ_a зависят не только от координат, но и от плотности тока J , то выражение (1-6-20) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + [\mathbf{J}\mathbf{B}] - \frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon_a - \frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu_a + \\ + \frac{1}{2} \text{grad} \left(E^2 J \frac{\partial \epsilon_a}{\partial J} \right) + \frac{1}{2} \text{grad} \left(H^2 J \frac{\partial \mu_a}{\partial J} \right), \end{aligned} \quad (1-6-20a)$$

где добавочные члены

$$\frac{1}{2} \text{grad} \left(E^2 J \frac{\partial \epsilon_a}{\partial J} \right) \text{ и } \frac{1}{2} \text{grad} \left(H^2 J \frac{\partial \mu_a}{\partial J} \right)$$

определяют плотность объемных сил соответственно из-за электрострикции и магнестрикции.

Переходный процесс (режим) — процесс перехода запасенной энергии с одного уровня на другой в результате скачкообразного изменения параметров среды μ_a , ϵ_a , σ или напряженности поля \mathbf{E} , \mathbf{H} . Теоретически этот процесс продолжается бесконечно долго. Действительно, решением уравнения (1-6-3а) является выражение

$$W(t) = W_2 - (W_2 - W_1) e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad (1-6-21)$$

в котором W_1 и W_2 соответственно начальный и конечный уровни запасенной энергии. В справедливости этого решения легко убедиться, подставляя его в решаемое уравнение (1-6-3а).

Как следует из выражения (1-6-21), переход с одного уровня энергии на другой происходит за время $t \rightarrow \infty$ и сопровождается рассеянием части энергии, т. е. преобразованием электромагнитной энергии в джоулево тепло и выходом ее через поверхность S , ограничивающую рассматриваемый объем V ; *количество рассеянной энергии равно абсолютной величине изменения запасенной энергии*, т. е.

$$W_{\text{рас}} = |W_2 - W_1|. \quad (1-6-21a)$$

В результате этого сторонние силы, изменяющие параметры среды или напряженности поля и создающие прирост энергии на величину $W_2 - W_1 > 0$, совершают работу

2 ($W_2 - W_1$). Если параметры среды изменяются без воздействия сторонних сил, то убыль запасенной энергии также равна $2(W_2 - W_1)$.

Практически за время переходного процесса (время установления) можно принять время t_y , по истечении которого запасенная энергия достигает величины $W = 0,9W_2$; при этом условии из уравнения

$$0,9W_2 = W_2 - (W_2 - W_1)e^{-\frac{t_y}{\tau_3}}$$

находим, что время переходного процесса

$$t_y = \tau_3 \left\{ 2,3 \dots + \ln \frac{|W_2 - W_1|}{W_2} \right\}. \quad (1-6-22)$$

Установившийся процесс (режим) — процесс, происходящий после окончания переходного процесса, т.е. при $t > t_y$.

С учетом (1-6-9) — (1-6-12a) выражение (1-6-3б) для однородной среды можно переписать в виде

$$W/\tau_3 = \frac{1}{V\mu_a\epsilon_a} \oint_S (\omega_3 + \omega_m) dS + \frac{2\sigma}{\epsilon_a} \int_V \omega_3 dV.$$

Отсюда находим, что при однородном распределении поля внутри объема V время релаксации, т.е. время, в течение которого рассеиваемая энергия убывает в e раз, равно:

$$\tau_3 = \left\{ \frac{S/V}{V\mu_a\epsilon_a} + \frac{2\sigma}{\epsilon_a} \frac{1}{1 + \frac{\mu_a H^2}{\epsilon_a E^2}} \right\}^{-1}. \quad (1-6-23)$$

Для проводниковой среды можно полагать $\tau_3 \approx \epsilon_a/\sigma$ и для диэлектрической

$$\tau_3 \approx \frac{\sqrt{\mu_a\epsilon_a}}{S/V}.$$

Если среда, заполняющая весь объем внутри идеально проводящей оболочки, не обладает потерями, то изменение запаса электромагнитной энергии внутри этого объема происходить не может. Может происходить лишь периодическое перераспределение ее между электрическим и магнитным видом. Вследствие этого переходный процесс в таком объеме отсутствует.

1-7. ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Решая совместно уравнения I и II системы (1-4-9), получим уравнения в частных производных второго порядка, в каждом из которых будет либо **E**, либо **H**.

Действительно, взяв rot от уравнения II и подставив в него $\text{rot } \mathbf{H}$ из уравнения I, получим:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{J} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Учитывая формулу (Д-3-18) и уравнение III системы (1-4-9), получим:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_a} \text{grad } \rho. \quad (1-7-1)$$

Аналогичным путем получаем:

$$\Delta \mathbf{H} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \mathbf{J}. \quad (1-7-2)$$

Найдем теперь аналогичные уравнения для потенциалов **A** и ϕ . Подставляя в уравнение I системы (1-4-9) выражения (1-1-3) и (1-1-4), получим:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_a \mathbf{J} + \mu_a \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi \right).$$

Используя формулу векторного анализа (Д-3-18), получим:

$$-\Delta \mathbf{A} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\nabla \mathbf{A} + \mu_a \epsilon_a \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_a \mathbf{J}. \quad (1-7-3)$$

Это векторное уравнение эквивалентно трем скалярным, связывающим четыре скалярные величины A_i и ϕ и определяющим все шесть проекций векторов **E** и **H**. Так как эти три скалярных уравнения связывают четыре величины, то в определении последних допустим некоторый произвол. В связи с этим вводится дополнительное, так называемое калибровочное соотношение, обращающее третий член левой части выражения (1-7-3) в нуль, т. е.

$$\nabla \mathbf{A} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (1-7-4)$$

Это условие исключает неоднозначность в определении **A** и ϕ , соответствующих одному и тому же полю. Действительно, два поля физически тождественны, если они

характеризуются одними и теми же векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} . Если заданы потенциалы \mathbf{A} и φ , то, согласно (1-1-3) и (1-1-4), однозначно определены \mathbf{H} и \mathbf{E} , а значит, и поле. Однако одному и тому же полю могут соответствовать разные потенциалы. Подставляя в (1-1-3) и (1-1-4) выражения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \text{grad} f; \\ \varphi' &= \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (1-7-5)$$

где f — произвольная функция от координат и времени, находим, что \mathbf{E} и \mathbf{H} не изменятся, т. е. преобразования потенциалов вида (1-7-5) не изменяют поля; такая инвариантность называется *градиентной*.

Используя (1-7-4), перепишем выражение (1-7-3) в виде уравнения, содержащего только векторный потенциал:

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \mathbf{J}. \quad (1-7-6)$$

Аналогичное уравнение для φ найдем подстановкой (1-1-3) в уравнение III системы (1-4-9), т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{A} - \Delta \varphi = \rho / \epsilon_a.$$

Подставляя значение $\nabla \mathbf{A}$ из (1-7-4), получим:

$$\Delta \varphi - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (1-7-7)$$

Потенциалы \mathbf{A} и φ , удовлетворяющие условию (1-7-4), могут быть выражены через вектор \mathbf{Z} — поляриза-
ционный потенциал или вектор Герца:

$$\mathbf{A} = \mu_a \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}; \quad \varphi = -\text{div } \mathbf{Z}. \quad (1-7-8)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1-7-6) или (1-7-7) и интегрируя, получим:

$$\Delta \mathbf{Z} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_a} \mathbf{P}, \quad (1-7-9)$$

где $\mathbf{P} = \int \mathbf{J} dt$.

Подставляя выражения (1-7-8) в (1-1-3) и (1-1-4), получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} + \text{grad div } \mathbf{Z}; \\ \mathbf{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{Z}. \end{aligned} \right\} \quad (1-7-10)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{H} выражены через одну векторную величину \mathbf{Z} . Эти выражения, согласно формуле (Д-3-18), с учетом уравнения (1-7-9) можно представить также в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{rot rot } \mathbf{Z} - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_a}, \\ \mathbf{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{Z}. \end{aligned} \right\} \quad (1-7-10a)$$

Сравнивая уравнения (1-7-1), (1-7-2), (1-7-6), (1-7-7) и (1-7-9) для напряженности поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , потенциалов \mathbf{A} и φ и вектора Герца \mathbf{Z} , видим, что все эти уравнения имеют общий вид

$$\Delta \mathbf{F} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} = -\bar{\chi}, \quad (1-7-11)$$

где $\bar{\chi}$ — различные функции \mathbf{J} , ρ , \mathbf{P} , а

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}. \quad (1-7-12)$$

Уравнение (1-7-11) представляет собой уравнение Даламбера (Д-6-1). При $\bar{\chi}=0$ оно переходит в волновое однородное уравнение (Д-6-2)

$$\Delta \mathbf{F} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} = 0, \quad (1-7-13)$$

при решении которого используется метод Фурье (Д-6-12).

Решение уравнения (1-7-11) дается выражением (Д-6-5). Если плотность тока $\mathbf{J} \neq 0$ или плотность зарядов $\rho \neq 0$ только в некотором ограниченном объеме V и равны нулю во всем остальном пространстве, окружающем этот объем, то решениями (1-7-6), (1-7-7), (1-7-9) будут:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(t - r/v)}{r} dV; \quad (1-7-14)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho(t - r/v)}{r} dV; \quad (1-7-15)$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\mathbf{P}(t - r/v)}{r} dV. \quad (1-7-16)$$

Здесь интегрирование производится по всему объему V , внутри которого находятся источники поля.

Эти выражения называются запаздывающими потенциалами. Они показывают, что значения потенциалов и вектора Герца в момент времени t и на расстоянии r от источника поля, занимающего объем V , определяются значениями плотности заряда или тока, возбуждающих поле в момент времени $t - \frac{r}{v}$, предшествующий наблюдению, где r/v — время, необходимое для распространения поля от источника до точки наблюдения, а v — скорость распространения поля, определяемая выражением (1-7-12).

Запаздывание во времени можно выразить с помощью δ -функций (Д-6-66а). При этом выражения (1-7-14) — (1-7-16) будут иметь вид:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_{t'} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} \delta\left(t' + \frac{r}{v} - t\right) dV dt', \quad (1-7-14a)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_{t'} \int_V \frac{\rho}{r} \delta\left(t' + \frac{r}{v} - t\right) dV dt', \quad (1-7-15a)$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_{t'} \int_V \frac{\mathbf{P}}{r} \delta\left(t' + \frac{r}{v} - t\right) dV dt'. \quad (1-7-16a)$$

Из формулы (1-7-12) следует, что скорость распространения электромагнитного поля в вакууме принимается равной

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ [м/сек]}. \quad (1-7-17)$$

Для квазистационарного поля $r/v \rightarrow 0$, вследствие чего числитель в подынтегральных выражениях (1-7-14) — (1-7-16) превращается в функцию только времени. В случае стационарного и статического полей этот числитель является постоянной (не изменяющейся во времени) величиной.

Составляющие поля в обобщенной криволинейной системе координат. Для среды без зарядов и токов уравнение (1-7-9) имеет вид:

$$\Delta \mathbf{Z} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = 0, \quad (1-7-9a)$$

а поле согласно (1-7-10a) определяется выражениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{rot rot } \mathbf{Z}; \\ \mathbf{H} &= \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{Z}. \end{aligned} \right\} \quad (1-7-10b)$$

Все шесть составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} можно выразить через три составляющие поляризационного потенциала \mathbf{Z} . Так как согласно формуле (Д-3-16) $\text{rot grad } \psi = 0$, то одному и тому же электромагнитному полю, определяемому векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} , будет соответствовать не только вектор \mathbf{Z} , но и вектор

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} - \text{grad } \psi,$$

где ψ — произвольная функция.

Векторы \mathbf{Z} , \mathbf{Z}' и $\text{grad } \psi$ удовлетворяют однородному волновому уравнению вида (1-7-9a), поэтому любую из проекций вектора $\text{grad } \psi$ можно выбрать так, чтобы она равнялась соответствующей проекции вектора \mathbf{Z} . Следовательно, вектор \mathbf{Z}' , дающий то же поле, что и вектор \mathbf{Z} , может иметь только две составляющие.

Пусть в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат u, v, w одна из составляющих вектора \mathbf{Z} определяется функцией $\psi_a \mathbf{e}_w$ (w может быть любой координатой q_1, q_2 или q_3). Вторую составляющую удобно представить в виде $\text{rot} (\psi'_m \mathbf{e}_w)$. В этом случае согласно формуле (Д-3-21)

$$\text{rot} (\psi'_m \mathbf{e}_w) = \psi'_m \text{rot } \mathbf{e}_w + [\text{grad } \psi'_m \mathbf{e}_w] = [\text{grad } \psi'_m \mathbf{e}_w]$$

и вторая составляющая действительно ортогональна первой. Тогда

$$\mathbf{Z} = \psi_a \mathbf{e}_w + \text{rot} (\psi'_m \mathbf{e}_w),$$

где ψ_a и ψ'_m — произвольные функции.

Поле векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} можно представить как сумму двух полей $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{(1)} + \mathbf{E}_{(2)}$; $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{(1)} + \mathbf{H}_{(2)}$,

где поле $\mathbf{E}_{(1)}$, $\mathbf{H}_{(1)}$ определяется составляющей $\psi_3 \mathbf{e}_w$ и поле $\mathbf{E}_{(2)}$, $\mathbf{H}_{(2)}$ — составляющей $\text{rot} (\psi'_m \mathbf{e}_w)$. Согласно выражениям (1-7-106),

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{(1)} &= \text{rot rot} (\psi_3 \mathbf{e}_w); \\ \mathbf{H}_{(1)} &= \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} (\psi_3 \mathbf{e}_w), \end{aligned} \right\} \quad (1-7-18)$$

т. е. вектор $\mathbf{H}_{(1)}$ не имеет составляющей по оси w . Такое поле называется электрическим или поперечно-магнитным и обозначается Е или ТМ.

Согласно выражениям (1-7-10), учитывая формулу (Д-3-17), получим:

$$\mathbf{E}_{(2)} = -\epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{rot} (\psi'_m \mathbf{e}_w),$$

$$\mathbf{H}_{(2)} = \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot rot} (\psi'_m \mathbf{e}_w).$$

Вводя обозначение $\epsilon_a \frac{\partial \psi'_m}{\partial t} = \psi_m$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{(2)} &= -\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} (\psi_m \mathbf{e}_w); \\ \mathbf{H}_{(2)} &= \text{rot rot} (\psi_m \mathbf{e}_w), \end{aligned} \right\} \quad (1-7-19)$$

т. е. вектор $\mathbf{E}_{(2)}$ не имеет составляющей по оси w . Такое поле называется магнитным или поперечно-электрическим и обозначается Н или ТЕ. Таким образом, полное поле представляется в виде суммы двух полей, одно из которых имеет поперечно-магнитную, а другое — поперечно-электрическую структуру.

В обобщенной криволинейной ортогональной системе координат составляющие вектора \mathbf{H} поперечно-магнитного поля, определяемые вторым выражением (1-7-10), согласно формулам (Д-3-48), равны:

$$\left. \begin{aligned} H_u &= \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{h_v h_w} \frac{\partial}{\partial v} (h_w \psi_3) \right\}; \\ H_v &= -\epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{h_u h_w} \frac{\partial}{\partial u} (h_w \psi_3) \right\}; \\ H_w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-7-20)$$

Согласно первому выражению (1-7-10) и формулам (Д-3-46) и (Д-3-47), составляющие электрического поля:

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{h_u h_v h_w} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (h_u h_v \psi_\Sigma) \right\}; \\ E_v &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_v \psi_\Sigma) \right\}; \\ E_w &= \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} \left\{ \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v \psi_\Sigma) \right\} - \\ &\quad - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \psi_\Sigma}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-7-20a)$$

Сравнивая выражения (1-7-18) и (1-7-19), видим, что выражения для поперечно-электрического поля можно получить из выражений для поперечно-магнитного поля, заменяя **E** на **H**, ϵ_a на $-\mu_a$ и ψ_Σ на ψ_M . Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} E_u &= -\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{h_v h_w} \frac{\partial}{\partial v} (h_w \psi_M) \right\}; \\ E_v &= \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{h_u h_w} \frac{\partial}{\partial u} (h_w \psi_M) \right\}; \\ E_w &= 0; \\ H_u &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial u} (h_u h_v \psi_M) \right\}; \\ H_v &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_v \psi_M) \right\}; \\ H_w &= \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} \left\{ \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v \psi_M) \right\} - \\ &\quad - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-7-21)$$

Подставляя найденные значения составляющих полей (1-7-20) и (1-7-20a) или (1-7-21) в уравнения Максвелла, записанные в обобщенной ортогональной криволинейной системе координат, можно показать, что эти уравнения удовлетворяются не в любой системе координат. Уравнения Максвелла удовлетворяются, если

$$\left. \begin{aligned} h_w &= 1; \\ \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u}{h_v} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-7-22)$$

Эти условия выполняются в декартовой, любой обобщенно-цилиндрической и сферической системах координат

(см. Д-3). При этом в обобщенно-цилиндрической системе «координатой разделения» ω является z , а в сферической r . Кроме того, для удовлетворения уравнениям Максвелла необходимо, чтобы ψ_m и ψ_a удовлетворяли уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2} + \frac{1}{h_u h_v} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v}{h_u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u}{h_v} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right\} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (1-7-23)$$

Это уравнение не является волновым, отличаясь от него первым членом. С волновым скалярным уравнением оно совпадает, если, согласно (Д-3-49),

$$\frac{\partial}{\partial \omega} (h_u h_v) = 0.$$

Последнее условие имеет место для обобщенно-цилиндрических координат и не выполняется для сферической системы.

Окончательно из выражений (1-7-20), (1-7-20а) и (1-7-21) с учетом (1-7-22) получим:

для Е или ТМ поля

$$\left. \begin{aligned} H_u &= \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{h_v} \frac{\partial \psi_a}{\partial v} \right), & E_u &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial u \partial \omega}, \\ H_v &= -\epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial \psi_a}{\partial u} \right), & E_v &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial v \partial \omega}, \\ H_\omega &= 0, & E_\omega &= \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial \omega^2} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-7-24)$$

Для Н или ТМ поля

$$\left. \begin{aligned} E_u &= -\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{h_v} \frac{\partial \psi_m}{\partial v} \right), & H_u &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u \partial \omega}, \\ E_v &= \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial \psi_m}{\partial u} \right), & H_v &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial v \partial \omega}, \\ E_\omega &= 0, & H_\omega &= \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \omega^2} - \mu_a \epsilon_a \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-7-25)$$

Теорема единственности. Уравнения Максвелла и следующие из них волновые уравнения имеют единственное решение. Согласно теореме единственности, в любой момент времени $t_1 > 0$ в любой точке области V , ограниченной поверхностью S (рис. 1-9) или вне ее электромагнитное поле однозначно определяется уравнениями Максвелла, если заданы дополнительные условия. Этими условиями яв-

ляются: а) начальные условия — задание векторов $\mathbf{E}(x_i, 0)$ и $\mathbf{H}(x_i, 0)$ во всей области в момент $t=0$ и б) граничные условия — задание тангенциальной составляющей вектора \mathbf{E} или \mathbf{H} на поверхности S в течение всего промежутка времени $0 \leq t \leq t_1$.

Предположим, что для области V (рис. 1-9) существуют две системы решений уравнений Максвелла $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$, удовлетворяющие одним и тем же начальным и граничным условиям. На основа-

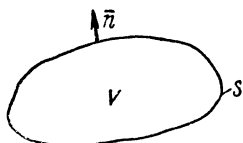


Рис. 1-9. К доказательству теоремы единственности для односвязной области.

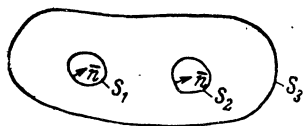


Рис. 1-10. К доказательству теоремы единственности для многосвязной области.

нии линейности уравнений Максвелла разность этих решений $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$ и $\mathbf{H}' = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$ также является решением, но с начальными условиями

$$\mathbf{E}' = 0 \text{ и } \mathbf{H}' = 0 \text{ при } t = 0$$

и с граничными условиями

$$E'_\tau = 0 \text{ или } H'_\tau = 0 \text{ на поверхности } S \text{ при } 0 \leq t \leq t_1.$$

При этом

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2 = \sigma (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \sigma \mathbf{E}',$$

так как $\mathbf{E}'^{(ст)} = 0$ (оба решения соответствуют одному и тому же заданному стороннему полю $\mathbf{E}^{(ст)}$).

Применим теорему Умова — Пойнтинга (1-6-2):

$$\frac{\partial W'}{\partial t} = - \oint_S [\mathbf{E}' \mathbf{H}'] d\mathbf{S} - \int_V \mathbf{J}' \mathbf{E}' dV; \quad (1-7-26)$$

но $\oint_S [\mathbf{E}' \mathbf{H}'] d\mathbf{S} = 0$, так как $E'_\tau = 0$ или $H'_\tau = 0$, и

$$\frac{\partial W'}{\partial t} = - \int_V \mathbf{J}' \mathbf{E}' dV = - \int_V \frac{J'^2}{\sigma} dV.$$

Так как подынтегральное выражение может быть только равно нулю или больше нуля, то $dW'/dt \leq 0$, т. е. энергия W' либо убывает, либо (когда \mathbf{J}' равно нулю во всем объеме V) остается постоянной. При $t=0$ энергия W' поля \mathbf{E}' , \mathbf{H}' равняется нулю и отрицательных значений принимать не может. Следовательно, в течение всего рассматриваемого промежутка времени $0 \leq t \leq t_1$ энергия

$$W' = \int_V \left(\frac{\epsilon_a E'^2}{2} + \frac{\mu_a H'^2}{2} \right) dV$$

должна равняться нулю. Это возможно лишь в том случае, если \mathbf{E}' и \mathbf{H}' равны нулю во всех точках объема V , т. е. $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$, и, следовательно, решение единственно. Аналогично теорема доказывается, когда область ограничена несколькими поверхностями (рис. 1-10).

Если область V ограничена изнутри поверхностью S , а извне — поверхностью сферы бесконечно большого радиуса S_r ($r \rightarrow \infty$), то теорема Умова — Пойнтинга для поля с векторами \mathbf{E}' , \mathbf{H}' запишется так:

$$\frac{\partial W'}{\partial t} = - \oint_S [\mathbf{E}' \mathbf{H}'] dS - \oint_{S_r} [\mathbf{E}' \mathbf{H}'] dS - \int_V \mathbf{J}' \mathbf{E}' dV. \quad (1-7-27)$$

Но при $r \rightarrow \infty$

$$\oint_{S_r} [\mathbf{E}' \mathbf{H}'] dS \rightarrow 0,$$

ибо если с момента возникновения поля прошел конечный промежуток времени, то при конечной скорости распространения поле на бесконечно большом расстоянии равно нулю. При этом выражение (1-7-27) переходит в (1-7-26), и приведенные рассуждения для внутренней области пригодны и для внешней.

1-8. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Уравнения Максвелла (1-4-9), а также волновые уравнения электромагнитного поля при введении системы четырех «мировых координат» (см. § Д-4) x_i ($i=1, 2, 3, 4$), где $x_4 = jct$, могут быть выражены в четырехмерной векторной форме (релятивистская электродинамика). Такое представление дает простой и симметричный вид уравнений и определяет целый ряд физических зависимостей между отдельными величинами, что важно для более глубокого понимания электромагнитных процессов.

Подставляя (1-2-5) в уравнение V системы (1-4-9), получим:

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Последнее уравнение в четырехмерной форме может быть записано в виде

$$\nabla_i \rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_4} (j c \rho) = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

или, с учетом выражений (Д-4-19) и (Д-4-20):

$$\square_i J_i = \text{Div } \mathbf{J} = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (1-8-1)$$

Таким образом, вектор $\rho \mathbf{v}$ и скаляр jcr можно рассматривать как три пространственных и одну временную составляющие 4-вектора плотности тока:

$$J_i = (\rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, jcr). \quad (1-8-2)$$

Если волновые уравнения (1-7-6) и (1-7-7) при $\mu_a = \mu_0$, $\epsilon_a = \epsilon_0$ и с учетом (1-2-5) переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\mu_0 \rho v, \\ \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\rho / \epsilon_0, \end{aligned} \right\} \quad (1-8-3)$$

то левые части этих уравнений на основании (Д-4-21) можно представить как $\square^2 A$ и $\square^2 \Phi$. Из четырех совершенно одинаково построенных скалярных уравнений (1-8-3) три, определяющие A , уже слиты в одно векторное уравнение. Поэтому естественно предположить, что в четырехмерном обобщении Φ играет роль временной составляющей. Вследствие этого выражения (1-8-3) записываются в виде

$$\square^2 \Phi = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (1-8-4)$$

где Φ — 4-вектор-потенциал, пространственные составляющие которого A_i ($i=1, 2, 3$), а временная составляющая $\Phi_4 = j \frac{\Phi}{c}$, т. е.

$$\Phi_i = \left(A_1, A_2, A_3, j \frac{\Phi}{c} \right). \quad (1-8-5)$$

Калибровочное уравнение (1-7-4) с учетом (Д-3-12) и (Д-4-20) в четырехмерной форме принимает вид:

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{\partial \left(j \frac{\Phi}{c} \right)}{\partial x_4} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \left(j \frac{\Phi}{c} \right)}{\partial x_4} = 0 \quad (i=1, 2, 3),$$

или $\square_i \Phi_i = \text{Div } \Phi = 0$.

Пользуясь четырехмерным представлением потенциала и плотности тока (1-8-5) и (1-8-2), можно видеть, как изменяются характеристики электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы к дру-

гой с помощью преобразований Лоренца (Д-4-7). В частности, если система K , в которой имеется ток с плотностью \mathbf{J} и неподвижный заряд с плотностью ρ , движется относительно системы K' со скоростью \mathbf{u} в направлении оси Ox'_1 (рис. 1-11а), то на основании (Д-4-15) находим выражения, определяющие плотность тока \mathbf{J}' и плотность зарядов ρ' , наблюдаемые в системе K' :

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{J_1 - j \frac{u}{c} J_4}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \\ J'_2 &= J_2; \\ J'_3 &= J_3; \\ J'_4 &= \frac{J_4 + j \frac{u}{c} J_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\}$$

Учитывая, что $J'_4 = j\rho'c$, $J_4 = j\rho c$ и переходя к общему случаю направления движения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}'_{\parallel} &= \frac{\mathbf{J}_{\parallel} + u\rho}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, & \mathbf{J}'_{\perp} &= \mathbf{J}_{\perp}, \\ \rho' &= \frac{\rho + \frac{1}{c^2} (\mathbf{u}\mathbf{J})}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (1-8-6)$$

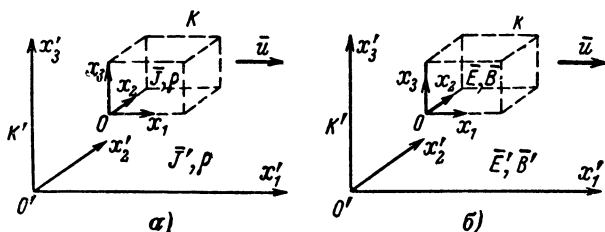


Рис. 1-11. Движущиеся инерциальные системы.

Здесь значками \parallel и \perp обозначены направления, параллельные и перпендикулярные вектору \mathbf{u} .

Из выражений (1-8-6) следует:

1. Плотность тока, наблюдаемая в системе K' в направлениях, перпендикулярных направлению движения, одинакова с плотностью тока, наблюдаемой в движущейся системе K .

2. Плотность тока, наблюдаемая в системе K' в направлении движения, отличается от наблюдаемой в движущейся системе K .

3. Плотность зарядов, наблюдаемая в системе K' , отличается от таковой в движущейся системе K ; если токи в последних отсутствуют, а имеются лишь неподвижные заряды с плотностью ρ , то, согласно (1-8-6), наблюдаемая в системе K' плотность зарядов

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

т. е. при переходе от системы K , где заряд неподвижен, к системе K' , относительно которой движется система K , плотность заряда увеличивается. Однако количество заряда в заданном объеме dV одинаково для обеих систем. Действительно, так как согласно (Д-4-10)

$$dV' = dV \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}},$$

то

$$dq' = \rho' dV' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} dV \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = dq.$$

Таким образом, плотность заряда, наблюдаемая в системе, относительно которой он движется, увеличивается, так как тот же самый заряд вследствие Лоренцова сокращения должен помещаться в меньшем объеме. Заряд же (в частности, заряд электрона) остается постоянным в любой системе, т. е. является инвариантом.

Составляющие вектора \mathbf{E} на основании (1-1-3) определяются выражениями:

$$E_i = - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, 3),$$

которые в четырехмерной форме, согласно (1-8-5), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= jc \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right); \\ E_2 &= jc \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_4} \right); \\ E_3 &= jc \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1-8-7)$$

Так как согласно (1-1-4) $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, то в четырехмерной записи составляющие \mathbf{B} в соответствии с (1-8-5) и (Д-3-13) имеют вид, аналогичный (1-8-7), т. е.

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}; \\ B_2 &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}; \\ B_3 &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-8-8)$$

На основании (1-8-7) и (1-8-8) можно показать, что составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} могут определяться одной четырехмерной формулой. Для этого умножим (1-8-7) на $-j$, а (1-8-8) — на c и, учитывая (Д-4-22), получим одну четырехмерную величину — тензор напряженности

$$F_{ik} = (c\mathbf{B}, -j\mathbf{E}) = c \text{Rot}_{ik} \Phi, \quad (1-8-9)$$

который, согласно (Д-4-22), является антисимметричным 4-тензором второго ранга. Скобки в последнем выражении указывают на объединение в тензоре напряженности двух трехмерных векторов \mathbf{B} и \mathbf{E} . Для записи тензора напряженности в развернутом виде достаточно, согласно (Д-4-23), определить только шесть его компонент, т. е.:

$$F_{ik} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & cB_3 & -cB_2 & -jE_1 \\ -cB_3 & 0 & cB_1 & -jE_2 \\ cB_2 & -cB_1 & 0 & -jE_3 \\ jE_1 & jE_2 & jE_3 & 0 \end{array} \right\| \quad (1-8-9a)$$

Таким образом, тензор напряженности состоит из 16 компонент, из которых 12 — одной размерности $\pm cB_i$ и $\pm jE_i$ ($i=1, 2, 3$), а остальные — нули.

Из выражения (1-8-9) следует, что в четырехмерном пространстве поле не может быть описано с помощью двух векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} , а должно описываться одним антисимметричным 4-тензором второго ранга. Отсюда видно также, что \mathbf{E} и \mathbf{B} не являются независимыми величинами.

На основе преобразования Лоренца (Д-4-17) тензор напряженности (1-8-9) в системе K' , относительно которой движется система K вдоль оси x'_1 , выражается в виде

$$F'_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{cB_3 - \frac{u}{c} E_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & -\frac{cB_2 + \frac{u}{c} E_3}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & -jE_1 \\ \frac{cB_3 - \frac{u}{c} E_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & 0 & cB_1 & -j \frac{E_2 - uB_3}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \frac{cB_2 + \frac{u}{c} E_3}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & -cB_1 & 0 & -j \frac{E_3 + uB_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ jE_1 & j \frac{E_2 - uB_3}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & j \frac{E_3 + uB_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} & 0 \end{vmatrix} \quad (1-8-10)$$

Очевидно, что тензор F'_{ik} , записанный через составляющие векторов \mathbf{E}' и \mathbf{B}' , будет иметь такой же вид, как тензор F_{ik} (1-8-9а), и из уравнения (1-8-9а) и (1-8-10) находим:

$$E'_1 = E_1, \quad B'_1 = B_1, \\ E'_2 = \frac{E_2 - uB_3}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad B'_2 = \frac{B_2 + \frac{u}{c^2} E_3}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

$$E'_3 = \frac{E_3 + uB_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad B'_3 = \frac{B_3 - \frac{u}{c^2} E_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

или

$$\left. \begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel; & E'_\perp &= \left(\frac{\mathbf{E} + [\mathbf{uB}]}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)_\perp; \\ B'_\parallel &= B_\parallel; & B'_\perp &= \left(\frac{\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{uE}]}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)_\perp, \end{aligned} \right\} \quad (1-8-11)$$

где значками \parallel и \perp обозначены параллельные и перпендикулярные вектору \mathbf{u} направления. Выражения (1-8-11) показывают, что составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} , параллельные направлению движения, при измерении в обеих системах (рис. 1-11, б) одинаковы, а составляющие, перпендикулярные направлению движения, различаются. При этом, если в неподвижной системе K существуют только поля \mathbf{E} или \mathbf{B} , то в движущейся системе K' , направление движения которой совпадает с направлением \mathbf{E} или \mathbf{B} , поле определится соответственно вектором $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ или $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$. Если направления векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} не совпадают с направлением движения системы K' , то при наличии в системе K только электрического или только магнитного поля в системе K' будет то и другое поле.

Выражения (1-8-11), еще раз подчеркивая тот факт, что электрическое и магнитное поля не существуют раздельно, имеют большое значение при решении конкретных задач о движении зарядов в электромагнитных полях. Подбирая систему координат, формально можно исключить электрическое или магнитное поле и тем самым упростить решение данной задачи.

Аналогично (1-8-9), векторы \mathbf{H} и \mathbf{D} можно связать с помощью тензора индукции

$$f_{ik} = (\mathbf{H}, -jc\mathbf{D}) = \frac{1}{\mu_0} \text{Rot}_{ik} \Phi \quad (1-8-12)$$

или

$$f_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -j c D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -j c D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -j c D_3 \\ j c D_1 & j c D_2 & j c D_3 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1-8-12a)$$

Очевидно, также по аналогии с выражением (1-8-11), можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}'_{\parallel} &= \mathbf{D}_{\parallel}; \quad \mathbf{D}'_{\perp} = \left(\frac{\mathbf{D} + \frac{1}{c^2} [\mathbf{uH}]}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right)_{\perp}, \\ \mathbf{H}'_{\parallel} &= \mathbf{H}_{\parallel}; \quad \mathbf{H}'_{\perp} = \left(\frac{\mathbf{H} - [\mathbf{uD}]}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (1-8-13)$$

Из этих выражений следует, что измерения, проводимые в системах K и K' , дают различные значения векторов электрической индукции и магнитной напряженности, если направление движения не совпадает с направлением этих векторов.

Так как каждая пара векторов \mathbf{B} , \mathbf{E} и \mathbf{H} , \mathbf{D} слита соответственно в тензор напряженности и тензор индукции, то естественно предположить, что вектор намагниченности \mathbf{M} и вектор поляризации \mathbf{P} также должны сливаться в четырехмерном пространстве в 4-тензор второго ранга. Действительно, формулы (1-2-10) и (1-2-13)

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E};$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H},$$

объединяются соотношением

$$M_{ik} = \frac{F_{ik}}{c\mu_0} - f_{ik}, \quad (1-8-14)$$

которое представляет тензор поляризации в четырехмерном пространстве; с подстановкой (1-8-9) и (1-8-12) оно может быть записано в таком виде:

$$M_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & M_3 & -M_2 & j c P_1 \\ -M_3 & 0 & M_1 & j c P_2 \\ M_2 & -M_1 & 0 & j c P_3 \\ -j c P_1 & -j c P_2 & -j c P_3 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1-8-14a)$$

Аналогично выражениям (1-8-11) и (1-8-13) находим, что поляризация и намагниченность связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}'_{\parallel} &= \mathbf{P}_{\parallel}; & \mathbf{P}'_{\perp} &= \left(\frac{\mathbf{P} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{uM}]}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)_{\perp}; \\ \mathbf{M}'_{\parallel} &= \mathbf{M}_{\parallel}; & \mathbf{M}'_{\perp} &= \left(\frac{\mathbf{M} + [\mathbf{uP}]}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (1-8-15)$$

Из этих выражений следует, что измерения в системах K и K' дают различные значения векторов поляризации и намагниченности. Разумеется, здесь речь идет не об изменении структуры вещества движущихся сред, а об относительности электромагнитных параметров, характеризующих поля.

Тензор напряженности F_{ik} , согласно (Д-4-16), обладает инвариантами

$$(c^2 B^2 - E^2), \quad (\mathbf{BE}), \quad (1-8-16)$$

тензор индукции f_{ik} — инвариантами

$$(H^2 - c^2 D^2), \quad (\mathbf{HD}) \quad (1-8-17)$$

и тензор поляризации M_{ik} — инвариантами

$$(M^2 - c^2 P^2), \quad (\mathbf{MP}).$$

Можно показать, что уравнения Максвелла (1-4-9) в четырехмерной форме имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} &= J_i; \\ \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_m} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{mi}}{\partial x_k} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-8-18)$$

Действительно, первая система (1-8-18) содержит четыре уравнения и эквивалентна для $i=1, 2, 3$ согласно (1-8-12а) и (1-8-2)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v},$$

т. е. уравнению I системы (1-4-9),

а для $i=4$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

т. е. уравнению III системы (1-4-9).

Вторая система (1-8-18) также содержит четыре уравнения и при i, k, m , соответствующим тройкам чисел (2, 3, 4), (3, 4, 1) и (4, 1, 2), эквивалентна:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

т. е. уравнению II системы (1-4-9), а при i, k, m , соответствующих 1, 2, 3, эквивалентна:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

т. е. уравнению IV системы (1-4-9).

Уравнения (1-8-6), (1-8-11), (1-8-13) и (1-8-15) для случая «медленно движущихся» сред, т. е. для условия $u/c \ll 1$, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}' &= \mathbf{J} + \rho \mathbf{u}, \\ \rho' &= \rho + \frac{1}{c^2} [\mathbf{u} \mathbf{J}]; \end{aligned} \right\} \quad (1-8-19)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + [\mathbf{u} \mathbf{B}], \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{u} \mathbf{E}]; \end{aligned} \right\} \quad (1-8-20)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}' &= \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} [\mathbf{u} \mathbf{H}], \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{H} - [\mathbf{u} \mathbf{D}]; \end{aligned} \right\} \quad (1-8-21)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}' &= \mathbf{P} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{u} \mathbf{M}], \\ \mathbf{M}' &= \mathbf{M} + [\mathbf{u} \mathbf{P}]. \end{aligned} \right\} \quad (1-8-22)$$

Из второго уравнения (1-8-20) следует, что покоящийся в системе K заряженный диэлектрик (рис. 1-12), создающий в ней только электрическое поле, создает в системе K' , относительно которой движется система K , магнитное поле

$$\mathbf{B}' = - \frac{1}{c^2} [\mathbf{u} \mathbf{E}]. \quad (1-8-23)$$

Это поле создается поверхностным конвекционным* током, наблюдаемым в системе K' в результате движения связанных зарядов поляризованного диэлектрика.

Из первого уравнения (1-8-20) следует, что находящаяся в магнитном поле проводящая среда создает наблюдаемое в системе K' (рис. 1-13) электрическое поле

$$\mathbf{E}' = [\mathbf{uB}]. \quad (1-8-24)$$

На основе (1-2-13) и (1-2-10), решая систему (1-8-20) — (1-8-22) получим следующие выражения, определяющие напряженность электрического и магнитного поля в «медленно» движущейся непроводящей среде:

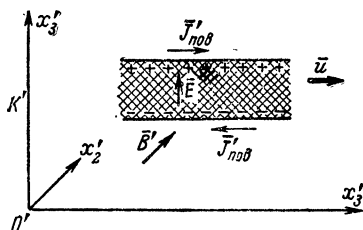


Рис. 1-12. Поле движущегося заряженного диэлектрика.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_a} - \left(1 - \frac{1}{\mu\epsilon}\right) [\mathbf{uB}], \quad (1-8-25)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_a} + \left(1 - \frac{1}{\mu\epsilon}\right) [\mathbf{uD}]. \quad (1-8-26)$$

Энергия электромагнитного поля, возникающего в результате движения диэлектрика в своем электрическом поле или проводника в своем магнитном поле, может быть использована в практических целях. При этом, разумеется, в силу закона сохранения энергии должна затрачиваться механическая работа на движение заряженного диэлектрика или намагниченного проводника. Весь процесс в целом является преобразованием механической энергии в электрическую, а все устройство — механическим генератором электрической энергии.

В силу обратимости создание соответствующего электромагнитного поля в неподвижной системе отсчета сторонними источниками приведет в движение диэлектрики или проводники, т. е. к обратному преобразованию электрической энергии в механическую (электродвигатель).

* Конвекционным током называется перенос электрических зарядов, который осуществляется перемещением в пространстве заряженного проводника или диэлектрика либо перемещением в вакууме заряженных частиц (электронов или ионов).

Если проводящая жидкость или газ находятся в квазистационарном электромагнитном поле, то действие этого поля на электроны и ионы вещества приводит

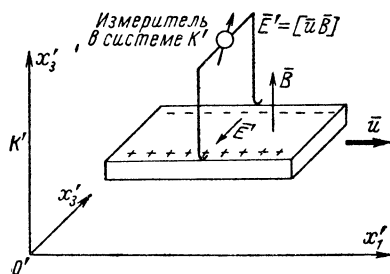


Рис. 1-13. Поле движущегося «намагниченного» проводника («униполярная» индукция).

к движению всего вещества в целом, что в свою очередь изменяет электромагнитное поле. Возникает сложное взаимодействие электромагнитных и гидродинамических явлений, которое рассматривается на основе системы уравнений электромагнитного поля и уравнений движения жидкости или газа.

Согласно уравнениям I и II системы (1-4-9), в этом случае поле полностью описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (1-8-27)$$

На основании выражений (1-8-19) и (1-8-20) для жидкой или газообразной проводящей среды (в частности, расплавленный металл или плазма), движущейся в электромагнитном поле и увлекающей находящиеся в ней заряды, можно написать выражение

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{u} + \sigma (\mathbf{E} + [\mathbf{u} \mathbf{B}]), \quad (1-8-27a)$$

которое определяет плотность тока проводимости в «медленно» движущейся проводящей среде в системе координат, относительно которой среда движется.

Если проводящая жидкость движется в постоянном магнитном поле, то в уравнение гидродинамики Навье-Стокса, в котором $\rho_{\text{ж}}$ и $p_{\text{ж}}$ соответственно плотность и давление среды, η и ξ — коэффициенты вязкости, $f_{\text{мех}}$ — объемная плотность механических сил (в частности, силы тяжести), должен быть введен член, выражающий объемную плотность электромагнитных сил, на основании (1-6-13a) при $\mathbf{E} = 0$ равный:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{JB}].$$

В результате получаем уравнение

$$\rho_{\text{ж}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho_{\text{ж}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} \right\} = -\text{grad } p_{\text{ж}} + \eta \Delta \mathbf{u} + \\ + \left(\frac{\eta}{3} + \xi \right) \text{grad div } \mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{мех}} + [\mathbf{JB}]. \quad (1-8-28)$$

Если скорость движения среды мала по сравнению со скоростью звука в ней, то такая среда может считаться несжимаемой, т. е.

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (1-8-29)$$

Уравнения (1-8-27), (1-8-28) и (1-8-29) являются основными уравнениями магнитной гидродинамики.

Особенно характерной при движении проводящей среды в магнитном поле является «вмороженность» магнитного поля, т. е. как бы увлечение магнитных силовых линий движущейся средой. Действительно, при $\sigma \rightarrow \infty$ и конечном значении J и ρ согласно (1-8-27а) в движущейся среде

$$\mathbf{E} + [\mathbf{uB}] = 0; \quad (1-8-30)$$

следовательно, равно нулю и изменение магнитного поля, т. е. $B = \text{const.}$

Действительно, взяв rot от (1-8-30) с учетом равенства (1-8-29), уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$ и второго уравнения (1-8-27), на основании (Д-3-24) имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{B}.$$

Подставляя значение частной производной в выражение полной производной по времени

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla),$$

учитывающее как изменение во времени, так и изменение при переходе от одной точки пространства к другой, получаем:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{u}.$$

При $u = \text{const}$

$$(\mathbf{B} \nabla) u = 0,$$

следовательно, и

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0,$$

т. е. действительно $\mathbf{B} = \text{const}$.

При конечном значении проводимости $\sigma \neq \infty$ происходит частичное увлечение магнитных силовых линий, т. е. возникает взаимная диффузия магнитного поля и движущейся среды.

Теория взаимодействия проводящей жидкости или газа с электромагнитным полем имеет важные практические применения: удержание плазмы или расплавленного металла от соприкосновения со стенками сосуда, электромагнитные насосы для перекачки расплавленного металла, плазменные двигатели, генераторы с непосредственным преобразованием тепловой энергии в электрическую.

1-9. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

Излучение электромагнитной энергии возникает при перераспределении зарядов, связанном с их неравномерным движением. Перераспределение это может быть спонтанным (самопроизвольным) или индуцированным, т. е. возникающим под действием сторонних источников энергии.

Количественно излучение энергии характеризуется вектором Пойнтинга, который определяется либо через векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{H} [см. выражение (1-6-5)], либо потоком фотонов [выражение (1-6-5a)].

При переходе элементарной частицы с одного энергетического уровня на другой происходит излучение порции энергии (фотона), величина которой определяется формулой

$$\Delta W = 6,62 \cdot 10^{-34} f [\text{дж}],$$

где f — частота [гц].

При торможении движущегося заряда его кинетическая энергия переходит в энергию электромагнитного излучения, называемого тормозным излучением.

Поле, создаваемое одним произвольно движущимся точечным зарядом, может быть определено на основе формул запаздывающих потенциалов, в которых учитывается релятивистская поправка. Полученные выше выражения запаздывающих потенциалов (1-7-14), (1-7-15) справедливы, когда содержащая заряды область V неподвижна относительно точки $M(r)$, в которой наблюдается поле (рис. 1-14, а). Если же эта область движется относительно точки наблюдения $M(r)$, то в общем случае изменяется расстояние r , которое входит знаменателем в определение потенциалов. Вследствие этого потенциал, задаваемый движущимися зарядами, будет отличаться по величине от потенциала, создаваемого неподвижными зарядами. Очевидно, отличие будет определяться знаком радиальной составляющей скорости: при приближении потенциал будет больше, а при удалении — меньше.

В случае точечного заряда q , находящегося в момент времени t в точке с радиус-вектором $r_0(t)$ (точка P) и движущегося с мгновенной скоростью $v(t)$ (рис. 1-14, б), выражения для запаздывающих потенциалов в вакууме, аналогичные (1-7-14а) и (1-7-15а), получим, учитывая точечное распределение заряда:

$$\Delta(r, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int_{t'} \frac{v(t')}{r(t')} \delta\left(t' + \frac{r(t')}{c} - t\right) dt',$$

$$\varphi(r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{t'} \frac{1}{r(t')} \delta\left(t' + \frac{r(t')}{c} - t\right) dt'.$$

Интегрируя эти выражения по времени согласно (Д-6-72) и учитывая, что

$$f(t') = \left[t' + \frac{r(t')}{c}\right] \text{ и } \frac{df}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dr}{dt'} = 1 - \frac{v}{c} \cos(\mathbf{v}\mathbf{r}),$$

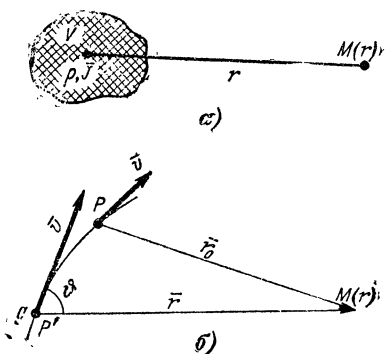


Рис. 1-14. К определению потенциалов поля движущегося заряда.

а — область V — неподвижна относительно точки M ; б — точечный заряд q движется относительно точки M .

получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}(t')}{r \left[1 - \frac{v}{c} \cos(\mathbf{v}\mathbf{r}) \right]} \right] \left(t - \frac{r}{c} \right); \\ \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r \left[1 - \frac{v}{c} \cos(\mathbf{v}\mathbf{r}) \right]} \right] \left(t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1-9-1)$$

В этих формулах значения радиус-вектора \mathbf{r} , проведенного из точки нахождения заряда в точку наблюдения, и скорость движения заряда берутся в момент времени $t - \frac{r}{c}$ (точка P'). Потенциалы (1-9-1) называются потенциалами Лиенара-Вихерта; они определяют поле, создаваемое произвольно движущимися точечными зарядами.

Подстановкой (1-9-1) в выражения (1-1-3) и (1-1-4) находят векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} этого поля. Для облегчения расчетов обозначим $\left(r - \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{c} \right) = s$ и $\left(t - \frac{r}{c} \right) = t'$. При этом

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{s^2} \text{grad } s + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{s} \left(\frac{\mathbf{v}}{s} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right);$$

с учетом выражения (Д-3-21)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi s} \left\{ \text{rot } \mathbf{v} - \frac{1}{s} [\text{grad } s \mathbf{v}] \right\}.$$

Так как $\mathbf{v}(t')$ зависит от координат точки наблюдения x_i и времени наблюдения t только неявно, посредством $t' = t - \frac{r}{c}$, а s зависит от x_i явно, то

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \right)^3} \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{rc^2} \left[\mathbf{e}_r \left[\left(\mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \mathbf{a} \right] \right] \right\}_{t - \frac{r}{c}}; \\ \mathbf{H} &= \frac{[\mathbf{e}_r \mathbf{E}]}{Z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (1-9-2)$$

Здесь \mathbf{a} — ускорение движущегося заряда, ϑ — угол, образованный направлениями \mathbf{v} и \mathbf{r} в момент $t - \frac{r}{c}$;

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} [ом] \quad (1-9-3)$$

— волновое сопротивление среды. Для вакуума

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi [ом]. \quad (1-9-3a)$$

В общем случае это поле состоит из двух слагаемых — поля индукции, определяемого членом

$$\left[\frac{1}{r^2} \left(\mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right]_{t - \frac{r}{c}},$$

и поля излучения, определяемого членом

$$\left\{ \frac{1}{rc^2} \left[\mathbf{e}_r \left[\left(\mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \mathbf{a} \right] \right] \right\}_{t - \frac{r}{c}}.$$

Поле индукции превалирует на близких расстояниях (зона индукции), а поле излучения — на больших расстояниях (волновая зона). Согласно (1-9-2), вектор \mathbf{H} всегда перпендикулярен радиус-вектору \mathbf{r} и вектору \mathbf{E} ; последний имеет составляющие вдоль направлений \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_ϑ . При этом в зоне индукции вектор Пойнтинга практически равен нулю, тогда как в волновой зоне на основании выражения (1-6-5) он равен:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \mathbf{e}_r \frac{E^2}{120\pi} = \mathbf{e}_r 120\pi H^2. \quad (1-9-4)$$

Подчеркиваем, что поле излучения создается только при неравномерном движении зарядов; при отсутствии ускорения ($\mathbf{a}=0$) согласно (1-9-2) поле излучения отсутствует.

В практическом отношении весьма важным является определение поля, возникающего при торможении электрона. Такое поле возникает, в частности, при пролете электронов вблизи проводника, при бомбардировке электронами поверхности металла или при сближении их с

отрицательно заряженными частицами. На основе (1-9-2) можно найти, что это поле определяется выражением

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^3} \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{rc^2} [\mathbf{e}_r [\mathbf{e}_r \mathbf{a}]] \right\}_{t - \frac{r}{c}}. \quad (1-9-5)$$

Здесь e — заряд электрона и \mathbf{a} — вектор ускорения, направленный против вектора скорости \mathbf{v} .

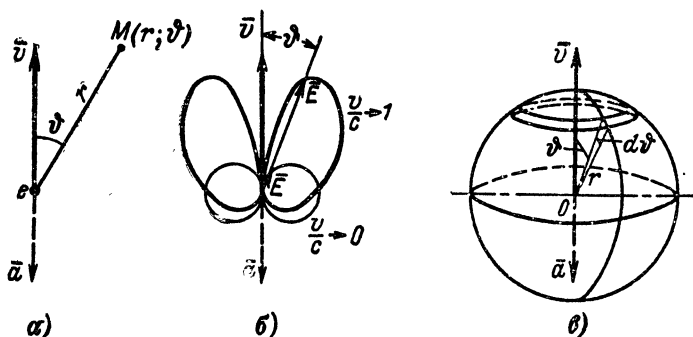


Рис. 1-15. К расчету поля тормозного излучения электрона.

a — направление движения электрона; b — диаграмма поля излучения; c — тормозящийся электрон в центре сферической системы координат.

Последнее выражение для волновой зоны можно переписать с учетом (Д-3-5) и (1-7-17) в следующем виде:

$$\mathbf{E} \approx \left\{ \frac{e [\mathbf{e}_r [\mathbf{e}_r \mathbf{a}]]}{4\pi\epsilon_0 c^2 r \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^3} \right\}_{t - \frac{r}{c}} = \\ = \left\{ \mathbf{e}_\vartheta \frac{e\mu_0 a}{4\pi r} \frac{\sin \vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^3} \right\}_{t - \frac{r}{c}}. \quad (1-9-6)$$

В случае «медленно» движущегося электрона это выражение принимает вид:

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{e}_\vartheta \frac{e\mu_0 a}{4\pi r} \sin \vartheta \Big]_{t - \frac{r}{c}}. \quad (1-9-7)$$

Диаграммы зависимости поля тормозного излучения от угла ϑ для случаев «медленно» и «быстро» движущихся электронов даны на рис. 1-15.

Полная мощность, излучаемая электроном при его торможении, может быть определена из выражения

$$(1-6-4) \quad P_{\text{из}} = \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S},$$

в котором интегрирование производится по поверхности сферы. Согласно выражениям (1-9-4), (1-9-6) и рис. 1, 15, в находим:

$$P_{\text{из}} = \int_0^\pi P 2\pi r \sin \vartheta r d\vartheta = \left(\frac{e\mu_0 a}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{60} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \vartheta d\vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \right)^6}. \quad (1-9-8)$$

В случае «медленно» движущегося электрона выражение (1-9-8) дает:

$$P_{\text{из}} = \frac{(e\mu_0 a)^2}{720\pi^2}. \quad (1-9-8a)$$

Спектр излучаемых частот при «медленно» движущемся электро- не можно получить, если представить в виде интеграла Фурье функцию

$$E(t) = \frac{e\mu_0 \sin \vartheta}{4\pi r} \delta(t - t_0) \Delta v, \quad (1-9-9)$$

характеризующую поле излучения за малый интервал времени. Здесь ускорение описывается с помощью δ -функции (Д-6-66а):

$$a = \delta(t - t_0) \Delta v;$$

Δv — изменение скорости.

Подставляя выражение (1-9-9) в (Д-7-11), находим:

$$E(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{e\mu_0 \sin \vartheta}{4\pi r} \Delta v e^{-j\omega t_0}, \quad (1-9-10)$$

т. е. составляющие спектра имеют одинаковые амплитуды, но различные фазы.

На основе выражений (1-9-2) можно также определить поле излучения заряда q , вращающегося по орбите радиусом R (рис. 1-16, а). При этом линейная скорость v и ускорение a взаимно перпендикулярны:

$$v = 2\pi n R, \quad a = (2\pi n)^2 R.$$

(здесь n — число оборотов в секунду). Такой процесс имеет место, например, в циклических ускорителях.

Учитывая, что в этом случае $(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = v \cos \vartheta$ и $(\mathbf{a}\mathbf{e}_r) = a \sin \vartheta \cos \alpha$, можно на основе (1-9-2), (1-9-4) и (Д-3-5) показать, что плотность потока мощности излучения определяется выражением

$$\Pi(\alpha, \vartheta) = \left[\left(\frac{q\mu_0 a}{4\pi r} \right)^2 \frac{1}{120\pi} \times \right. \\ \left. \times \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^5} \right] t - \frac{r}{c} \quad (1-9-11)$$

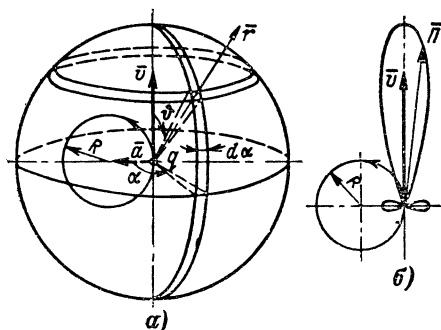


Рис. 1-16. К расчету поля вращающегося заряда.

a — траектория движения заряда и сферическая система координат; *b* — диаграмма излучения.

В плоскости орбиты, т. е. при $\alpha=0$, излучение в направлении, определяемом углом $\vartheta = \arccos\left(\frac{v}{c}\right)$, отсутствует. Максимальное излучение наблюдается в направлении движения электрона, т. е. при $\vartheta=0$ (рис. 1-16, б).

Излучение электромагнитной энергии может происходить и при равномерном движении заряда в диэлектрической среде (эффект Черенкова-Вавилова), если скорость заряда u больше фазовой скорости в этой среде, т. е. $u > v_\Phi = c/\sqrt{\epsilon}$. Энергия такого излучения на единицу длины в полосе частот $d\omega$ в конусе с раствором $\Theta = \arccos\left(\frac{c}{\sqrt{\epsilon} u}\right)$ в направлении \mathbf{u} определяется формулой

$$\frac{W}{l} = \frac{q^2 \mu_0}{4\pi} \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \frac{1}{\varepsilon}\right) \omega d\omega \text{ [дж/м]}.$$

Рассмотренное излучение движущихся зарядов имеет большое практическое значение для техники генерирования сверхвысоких частот.

Рассмотрим также поле равномерно движущегося точечного заряда. Подставляя в первое выражение (1-9-2) $a=0$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u}{c} \cos \vartheta\right)^3} \left(\mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{u}}{c}\right); \\ \mathbf{H} &= \frac{[\mathbf{e}_r, \mathbf{E}]}{Z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (1-9-12)$$

Здесь r и ϑ — соответственно расстояние от точки наблюдения M до заряда и угол между \mathbf{u} и \mathbf{r} в «момент излучения» (точка 1 на рис. 1-17, а); u — скорость равномерного движения.

С другой стороны, выражения, описывающие поле равномерно движущегося точечного заряда (в частности, электрона), можно получить на основании (1-8-11), полагая электрон неподвижным в системе K , которая движется относительно системы K' вдоль оси x_1 со скоростью u . В этом случае (рис. 1-17, б) напряженность поля измеряется в точке M , а электрон расположен в начале координат системы K . Пусть в момент $t=t'=0$ начала координат систем K и K' совмещены и расстояние между точкой наблюдения и точкой, в которой находится электрон, наименьшее. При этом положение точки M в системе K' определяется координатами

$$x'_1 = 0, \quad x'_2, \quad x'_3,$$

а в системе K , согласно преобразованию (Д-4-7),

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = -ut; \\ x_2 &= x'_2; \\ x_3 &= x'_3. \end{aligned} \right\} \quad (1-9-13)$$

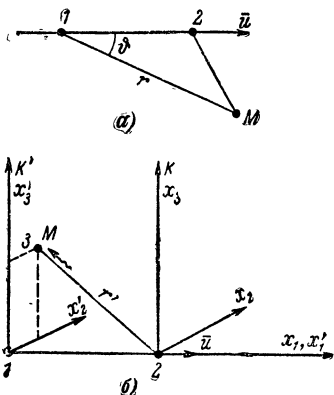


Рис. 1-17. К определению поля равномерно движущегося электрона.

1 — положение электрона в момент $t=t'=0$; 2 — то же в «момент приема»; 3 — точка измерения поля, относительно которой движется электрон.

Расстояние точки M до электрона в системе K определяется выражением

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{r'^2 + \frac{u^2 t'^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (1-9-13a)$$

В системе K , в которой электрон неподвижен, создаваемое им поле определяется выражениями

$$E_i = \frac{ex_i}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad B_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Первое выражение следует из (1-3-10), а второе — из уравнения I системы (1-4-9), поскольку в системе K вектор $\mathbf{J} = 0$. Согласно выражениям (1-9-13), в точке M составляющие поля:

$$E_1 = - \frac{eut}{4\pi\epsilon_0 r^3};$$

$$E_2 = \frac{ex_2}{4\pi\epsilon_0 r^3};$$

$$E_3 = \frac{ex_3}{4\pi\epsilon_0 r^3};$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = 0;$$

с учетом выражения (1-9-13a):

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= - \frac{eut'}{4\pi\epsilon_0 \left(r'^2 + \frac{u^2 t'^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}}; \\ E_2 &= \frac{ex_2'}{4\pi\epsilon_0 \left(r'^2 + \frac{u^2 t'^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^{\frac{3}{2}}}; \\ E_3 &= \frac{ex_3'}{4\pi\epsilon_0 \left(r'^2 + \frac{u^2 t'^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^{\frac{3}{2}}}; \\ B_1 &= B_2 = B_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-9-14)$$

В системе K' , где точка наблюдения M неподвижна, согласно выражениям (1-8-11) получим:

$$\left. \begin{aligned}
 E'_1 &= E_1; \\
 E'_2 &= E_2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \\
 E'_3 &= E_3 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \\
 B'_1 &= 0; \\
 B'_2 &= -\frac{E_3}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{u}{c^2}; \\
 B'_3 &= \frac{E_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{u}{c^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1-9-12a)$$

Выражения (1-9-12a), в отличие от (1-9-12), определяют поле по положению электрона в «момент приема» (точка 2 на рис. 1-17, б). Путем несложных геометрических преобразований можно показать, что эти уравнения эквивалентны.

В момент $t=t'=0$ электрон находится от точки наблюдения на наименьшем расстоянии. При этом в точке M наблюдаются только поперечные составляющие E'_2 и E'_3 , которые согласно выражениям (1-9-14) и (1-9-12) возрастают с увеличением скорости пропорционально $1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$. То же самое наблюдается и в любой другой точке, не лежащей на оси x_1 , когда электрон проходит около этой точки на наименьшем расстоянии.

Если аналогичные преобразования провести для случая, когда точка наблюдения M лежит на оси x_1 впереди движущегося электрона, то можно показать, что поперечные составляющие в этой точке равны нулю, а продольная составляющая пропорциональна $\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$. Следовательно, структура электрических силовых линий как бы сплющивается; линии электрического поля в момент наблюдения направлены к положению электрона не в «момент излучения», а в «момент приема». При увеличении скорости движения u поле в направлении движения уменьшается пропорционально $\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$, а в перпендикулярном направлении возрастает пропорционально $1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$. В пределе при $u \rightarrow c$ поле состоит только из поперечных составляющих E' , B' .

Отличие структуры поля движущегося заряда от поля неподвижного заряда, найденное на основе специальной теории относительности, подтверждает единую природу электромагнитного поля. Электрическое и магнитное поля представляют единое образование, распадающееся только относительно используемой системы координат.

Возникновение поперечных составляющих \mathbf{E}' и \mathbf{B}' в неподвижной точке $M(r)$, относительно которой движется заряд с постоянной скоростью, не связано с излучением энергии. Это объясняется тем, что электромагнитная энергия, накапливающаяся в точке $M(r)$ по мере приближения к ней заряда, полностью исчезает при последующем удалении заряда от нее.

Если, однако, точка M находится внутри ограниченной области проводящей среды, то при пролете около нее заряда энергия электромагнитного поля будет частично поглощаться. Вследствие этого заряд, пролетая вблизи проводящей области, тормозится, теряя часть кинетической энергии на электромагнитное излучение. Такой процесс, в частности, происходит в клистронах пролетного типа — генераторах сверхвысоких частот.

Подчеркиваем, что при одновременном движении зарядов, образующих «дискретную» цепочку, как это имеет место в проводнике (переход электронов от одного атома к другому внутри кристаллической решетки), возникает стационарное поле, и поток электромагнитной энергии такого поля распространяется вдоль линии зарядов, оставаясь связанным с ней.

Если последовательность движущихся зарядов образует сплошную не прерывающуюся линию зарядов, то в окружающем пространстве образуется электростатическое поле.

ГЛАВА ВТОРАЯ

МОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

2-1. УРАВНЕНИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

При неравномерном движении зарядов возникает переменное электромагнитное поле, напряженность которого в общем случае является функцией координат пространства и времени, т. е. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x_i, t)$. Такое поле описывается полной системой дифференциальных уравнений (1-4-9) и уравнениями (1-7-1), (1-7-2), (1-7-6), (1-7-7) и (1-7-9).

Изучая линейные процессы, мы можем использовать принцип суперпозиции и рассматривать сложное переменное поле как сумму простых гармонических во времени полей, описываемых рядом Фурье (Д-7-2), если процесс является периодическим, и интегралом Фурье (Д-7-12), если процесс непериодический. Вследствие этого указанные уравнения необходимо переписать для гармонического во времени поля, т. е. для поля, выражаемого функцией

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m(x_i) \cos(\omega t + \varphi), \quad (2-1-1)$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ — угловая частота, а f [Гц] — просто частота (число периодов в одну секунду).

В частных случаях гармоническое во времени поле может иметь также гармоническую зависимость и от координат пространства, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\beta x_i) \cos(\omega t + \varphi).$$

Во многих практических случаях задаются или измеряются не мгновенные значения и не амплитуды гармо-

ник, а «действующие» значения этих функций, определяемые формулой

$$E_d = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (2-1-2)$$

В дальнейшем гармоническое во времени поле будем называть для краткости гармоническим или монохроматическим.

Идеальное монохроматическое электромагнитное поле возможно лишь теоретически. Реальные источники электромагнитного поля не обладают полностью стабильной частотой и создают сложное несинусоидальное поле, которое можно представлять спектром частот. Относительная полоса частот $\Delta f/f$, несущая почти всю энергию, у самого совершенного квантового генератора весьма мала, но все же не менее 10^{-10} — 10^{-13} .

Электромагнитные колебания называются — когерентными во времени, если разность фаз их постоянна в любой момент времени. Полностью когерентны во времени лишь идеально монохроматические колебания одинаковой частоты. Колебания, создаваемые реальными источниками, в связи с этим рассматриваются как почти когерентные лишь в течение времени, меньшего времени когерентности, определяемого формулой

$$\Delta t_k \approx \frac{1}{\Delta f}, \quad (2-1-2a)$$

где Δf — полоса частот реального источника. В частности, у газового оптического квантового генератора $\Delta f \approx 10^3$ гц и $\Delta t_k \approx 10^{-3}$ сек.

Электромагнитное поле пространственно когерентно, если в любой момент времени разность фаз колебаний в любых двух фиксированных точках пространства постоянна. Энергия суммарного поля когерентных источников в пространстве изменяется от точки к точке, что приводит к образованию интерференционных максимумов и минимумов. В точках, где колебания находятся в фазе, суммарная энергия пропорциональна величине $\left(\sum_{i=1}^n E_i\right)^2$ и в частном случае при n одинаковых источниках — $n^2 E^2$.

Когерентность колебаний приводит к перераспределению энергии в пространстве, но не влияет на ее полную величину.

Колебания называются некогерентными во времени, если разность фаз этих колебаний изменяется нерегулярно в течение любого, самого короткого промежутка времени. Суммарная энергия n некогерентных источников в любой точке поля пропорциональна $\sum_{i=1}^n E_i^2$ и в частном случае при n одинаковых источниках пропорциональна nE^2 .

При изучении монохроматического поля для упрощения математических операций пользуются символическим методом [см. (Д-5-11)]. Выражение (2-1-1) перепишем в виде комплексного вектора

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t}, \quad (2-1-3)$$

где

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}_m(x_i) e^{j\varphi} \quad (2-1-4)$$

— комплексная амплитуда напряженности поля; $\mathbf{E}_m(x_i)$ — амплитуда (функция координат x_i) и φ — начальная фаза поля.

Подставляя в выражения (1-4-9), согласно (Д-5-7а), соответственно

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial t} = j\omega \dot{\mathbf{E}} \text{ и } \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}}{\partial t} = j\omega \dot{\mathbf{H}},$$

с учетом (1-2-1а) получим уравнения для монохроматического поля в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{I } \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{J}^{\text{ст}}, \\ \text{II } \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-5)$$

Здесь $\tilde{\epsilon}_a$ и $\tilde{\mu}_a$ — комплексные электрическая и магнитная проницаемости:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\epsilon}_a &= \epsilon'_a - j\epsilon''_a; \quad \epsilon'_a = \epsilon_a; \quad \epsilon''_a = \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon'_a \operatorname{tg} \delta_\epsilon; \\ \tilde{\mu}_a &= \mu'_a - j\mu''_a; \quad \mu'_a = \mu_a; \quad \mu''_a = \mu'_a \operatorname{tg} \delta_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-6)$$

δ_ϵ и δ_μ называют соответственно углами электрических и магнитных потерь.

Физическая сущность этих потерь заключается в поглощении энергии переменного электромагнитного поля, обусловленном проводимостью среды и явлениями гистерезиса. В отсутствие последнего

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_a &= \sigma / \omega \epsilon'_a; \\ \operatorname{tg} \delta_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-7)$$

Электрические и магнитные потери вызывают сдвиг фаз во времени между векторами $\dot{\mathbf{D}}$, $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{H}}$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}_m &= \frac{\epsilon'_a}{\cos \delta_a} \mathbf{E}_m e^{-j\delta_a}; \\ \dot{\mathbf{B}}_m &= \frac{\mu'_a}{\cos \delta_m} \mathbf{H}_m e^{-j\delta_m}. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-8)$$

Значения углов потерь обычно определяются экспериментально, причем наблюдается зависимость их от частоты ω , т. е. дисперсия.

Для монохроматического поля уравнение V системы (1-4-9) можно записать в виде

$$\dot{\rho} = - \frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}.$$

Такое же соотношение имеет место для сторонних токов и зарядов.

$$\dot{\rho}^{\text{ст}} = - \frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}.$$

Взяв дивергенцию от обеих частей уравнений (2-1-5) и используя тождество (Д-3-17), получим:

$$\left. \begin{aligned} \text{III } \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} &= \dot{\rho}^{\text{ст}} / \tilde{\epsilon}_a; \\ \text{IV } \operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-9)$$

Эти уравнения, являясь следствием (2-1-5), самостоятельного значения не имеют, и поэтому уравнения (2-1-5) образуют полную систему уравнений Максвелла для гармонического поля.

При отсутствии сторонних источников и при наличии потерь волновые уравнения (1-7-1) и (1-7-2) для монохроматического поля имеют вид (Д-6-11):

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} &= 0; \\ \Delta \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2-1-10)$$

где

$$k = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \tilde{\mu}_a} = \beta - j\alpha, \quad (2-1-11)$$

$k[m^{-1}]$ — постоянная распространения; $\beta[m^{-1}]$ — волновое число или фазовая постоянная, определяющая фазовую скорость, т. е. скорость распространения фазового фронта (поверхности равных фаз) поля; $\alpha[m^{-1}]$ — постоянная затухания, определяющая убывание амплитуды поля.

Решением первого уравнения (2-1-10), согласно (Д-6-196), при отсутствии источников на бесконечности является выражение

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (2-1-10a)$$

Решение второго уравнения (2-1-10) аналогично. В этом случае постоянная распространения выражается комплексным вектором

$$\mathbf{k} = \bar{\beta} - j\bar{\alpha}. \quad (2-1-11a)$$

При этом вектор $\bar{\beta}$ перпендикулярен поверхности равных фаз, а вектор $\bar{\alpha}$ перпендикулярен поверхности равных амплитуд. Если направления векторов $\bar{\beta}$ и $\bar{\alpha}$ совпадают, т. е. совпадают поверхности равных фаз и равных амплитуд, то такое поле называется однородной волной. Если же направления этих векторов не совпадают, то поле называется неоднородной волной.

Переписывая решение (2-1-10a) уравнений (2-1-10) в действительном виде, будем иметь:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{-\bar{\alpha} \cdot \mathbf{r}} \cos(\omega t - \bar{\beta} \cdot \mathbf{r}).$$

Очевидно, фаза поля имеет одно и то же значение для различных значений \mathbf{r} и моментов времени t , удовлетворяющих условию

$$\omega(t + \Delta t) - \bar{\beta} \cdot (\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \omega t - \bar{\beta} \cdot \mathbf{r}$$

или

$$\omega \Delta t - \bar{\beta} \Delta r = 0.$$

Отсюда следует, что значение фаз электромагнитного поля распространяется со скоростью

$$v_{\phi} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta}, \quad (2-1-12)$$

называемой фазовой скоростью. Очевидно, имеются точки, где значения фазы в данный момент времени отличаются на 2π . Ближайшее расстояние между этими точками или период в пространстве называется длиной волны; она определяется формулой

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = v_{\phi} T = \frac{v_{\phi}}{f}. \quad (2-1-13)$$

В среде без потерь ($\alpha=0$) согласно (2-1-11) постоянная распространения и фазовая постоянная

$$k = \beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a},$$

фазовая скорость

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}, \quad (2-1-12a)$$

а длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = \frac{3 \cdot 10^8}{f \sqrt{\epsilon \mu}} \text{ [м]}. \quad (2-1-13a)$$

Используя электромагнитные потенциалы, перепишем выражения (1-1-3) и (1-1-4) в комплексной форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= -\text{grad } \dot{\phi} - j\omega \dot{\mathbf{A}}; \\ \dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\tilde{\mu}_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-14)$$

Волновые уравнения для электромагнитных потенциалов (1-7-6) и (1-7-7) в комплексной форме имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} &= -\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}; \\ \Delta \dot{\phi} + k^2 \dot{\phi} &= -\frac{\dot{\rho}^{\text{ст}}}{\tilde{\epsilon}_a}. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-15)$$

Здесь вместо \mathbf{j} и $\dot{\rho}$ фигурируют $\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}$ и $\dot{\rho}^{\text{ст}}$, как это следует из (2-1-5) и (2-1-9).

В отсутствии потерь решения этих уравнений в соответствии с (1-7-14) и (1-7-15) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_m^{ct} e^{j(\omega t - \bar{\beta} r)}}{r} dV, \\ \dot{\Phi} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\dot{\rho}_m^{ct} e^{j(\omega t - \bar{\beta} r)}}{r} dV. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-15a)$$

При наличии потерь в среде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_m^{ct} e^{-\bar{\alpha} r} e^{j(\omega t - \bar{\beta} r)}}{r} dV, \\ \dot{\Phi} &= \frac{1}{4\pi \tilde{\epsilon}_a} \int_V \frac{\dot{\rho}_m^{ct} e^{-\bar{\alpha} r} e^{j(\omega t - \bar{\beta} r)}}{r} dV. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-15b)$$

Искомое поле $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$ определяется с помощью выражений (2-1-14) с учетом (2-1-15a) или (2-1-15b).

Если два поля, определяемые векторами $\mathbf{E}_{(1)}, \mathbf{H}_{(1)}$ и $\mathbf{E}_{(2)}, \mathbf{H}_{(2)}$, создаются сторонними токами с плотностью соответственно $\mathbf{J}_{(1)}^{ct}$ и $\mathbf{J}_{(2)}^{ct}$, то, проводя с уравнениями (2-1-5) нижеследующие преобразования:

$$\begin{aligned} & \frac{(\dot{\mathbf{E}}_{(2)} \text{ rot } \dot{\mathbf{H}}_{(1)})}{X_1} = \frac{(j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_{(1)} + \mathbf{J}_{(1)}^{ct}) \dot{\mathbf{E}}_{(2)}}{Y_1}, \\ & \frac{(\dot{\mathbf{H}}_{(1)} \text{ rot } \dot{\mathbf{E}}_{(2)})}{X_1} = \frac{-j\omega \tilde{\mu}_a (\dot{\mathbf{H}}_{(2)} \dot{\mathbf{H}}_{(1)})}{Y_1}, \\ & \frac{(\dot{\mathbf{E}}_{(1)} \text{ rot } \dot{\mathbf{H}}_{(2)})}{X_2} = \frac{(j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_{(2)} + \mathbf{J}_{(2)}^{ct}) \dot{\mathbf{E}}_{(1)}}{Y_2}, \\ & \frac{(\dot{\mathbf{H}}_{(2)} \text{ rot } \dot{\mathbf{E}}_{(1)})}{X_2} = \frac{-j\omega \tilde{\mu}_a (\dot{\mathbf{H}}_{(1)} \dot{\mathbf{H}}_{(2)})}{Y_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & X_1 = Y_1 \\ & X_2 = Y_2 \end{aligned}$$

и применяя (Д-3-23), получаем выражение:

$$\text{div} [\dot{\mathbf{E}}_{(1)} \dot{\mathbf{H}}_{(2)}] - \text{div} [\dot{\mathbf{E}}_{(2)} \dot{\mathbf{H}}_{(1)}] = \mathbf{J}_{(1)}^{ct} \dot{\mathbf{E}}_{(2)} - \mathbf{J}_{(2)}^{ct} \dot{\mathbf{E}}_{(1)} \quad (2-1-16)$$

представляющее дифференциальную формулировку леммы Лоренца, связывающей два электромагнитных поля.

Интегрируя выражение (2-1-16) по произвольному объему и воспользовавшись (Д-3-30), получим интегральную формулировку леммы Лоренца:

$$\oint_S \{ [\dot{\mathbf{E}}_{(1)} \dot{\mathbf{H}}_{(2)}] - [\dot{\mathbf{E}}_{(2)} \dot{\mathbf{H}}_{(1)}] \} dS = \int_V (\mathbf{J}_{(1)}^{\text{сг}} \dot{\mathbf{E}}_{(2)} - \mathbf{J}_{(2)}^{\text{сг}} \dot{\mathbf{E}}_{(1)}) dV. \quad (2-1-17)$$

Распространяя интегрирование на бесконечную область, получим:

$$\int_V \mathbf{J}_{(1)}^{\text{сг}} \dot{\mathbf{E}}_{(2)} dV = \int_V \mathbf{J}_{(2)}^{\text{сг}} \dot{\mathbf{E}}_{(1)} dV, \quad (2-1-18)$$

так как очевидно, что при удалении от источника на бесконечность поле стремится к нулю.

Если предположить, что сторонние токи с плотностями $\mathbf{J}_{(1)}^{\text{сг}}$ и $\mathbf{J}_{(2)}^{\text{сг}}$ размещены в непересекающихся областях V_1 и V_2 (рис. 2-1), то выражение (2-1-18) перепишется в виде

$$\int_{V_1} \mathbf{J}_{(1)}^{\text{сг}} \dot{\mathbf{E}}_{(2)} dV = \int_{V_2} \mathbf{J}_{(2)}^{\text{сг}} \dot{\mathbf{E}}_{(1)} dV. \quad (2-1-19)$$

Это выражение является формулировкой теоремы взаимности, согласно которой условия передачи электромагнитной энергии из области 1 в область 2 одинаковы как в прямом, так и в обратном направлениях, если среда линейна и изотропна.

В области, свободной от сторонних источников, уравнения Максвелла (2-1-5) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \quad \text{rot } \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \\ \text{II} \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-20)$$

Нетрудно заметить, что эта система уравнений останется неизменной, если вектор $\dot{\mathbf{H}}$ заменить на $\dot{\mathbf{E}}$, вектор $\dot{\mathbf{E}}$ на $\dot{\mathbf{H}}$, величину $\tilde{\epsilon}_a$ на $-\tilde{\mu}_a$ и $\tilde{\mu}_a$ на $-\tilde{\epsilon}_a$, т. е. совершить перестановку вида

$$\dot{\mathbf{E}} \rightleftharpoons \dot{\mathbf{H}}, \quad \tilde{\epsilon}_a \rightleftharpoons -\tilde{\mu}_a. \quad (2-1-21)$$

Эту перестановочную двойственность можно использовать при решении задач электродинамики. Метод решения, основанный на этом свойстве, называется принципом двойственности. Согласно этому принципу, если известны решения некоторой граничной задачи электродинамики, то, совершив перестановку (2-1-21), получим новые решения, которые будут также удовлетворять уравнениям Максвелла. Однако эти решения будут удовлетворять новым граничным условиям, которые получатся из прежних путем той же перестановки (например, там, где ранее касательные составляющие вектора \mathbf{E} были равны нулю, теперь будут обращаться в нуль касательные составляющие \mathbf{H} , и наоборот). При этом $\rho_a \rightleftharpoons \mu_a \rho_m$.

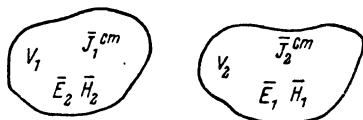


Рис. 2-1. К теореме взаимности.

Поле, описываемое уравнениями (2-1-20), можно представить как сумму полей поперечно-электрической и поперечно-магнитной структуры. В обобщенно-криволинейной системе координат в среде без потерь составляющие поперечно-магнитного поля согласно (1-7-24) и (Д-5-7а) определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} H_u &= \frac{j\omega\epsilon_a}{h_v} \frac{\partial \psi_\vartheta}{\partial v}; & E_u &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial^2 \psi_\vartheta}{\partial u \partial \omega}; \\ H_v &= \frac{-j\omega\epsilon_a}{h_u} \frac{\partial \psi_\vartheta}{\partial u}; & E_v &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial^2 \psi_\vartheta}{\partial v \partial \omega}; \\ H_w &= 0; & E_w &= \frac{\partial^2 \psi_\vartheta}{\partial \omega^2} + k^2 \psi_\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-22)$$

Согласно выражениям (1-7-25), для поперечно электрического поля получим:

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{-j\omega\mu_a}{h_v} \frac{\partial \psi_m}{\partial v}; & H_u &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial u \partial \omega}; \\ E_v &= \frac{j\omega\mu_a}{h_u} \frac{\partial \psi_m}{\partial u}; & H_v &= \frac{1}{h_v} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial v \partial \omega}; \\ E_w &= 0; & H_w &= \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \omega^2} + k^2 \psi_m. \end{aligned} \right\} \quad (2-1-23)$$

В выражениях (2-1-22) и (2-1-23) функции ψ_a и ψ_m являются решениями уравнения, которое согласно (1-7-23) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2} + \frac{1}{h_u h_v} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v}{h_u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u}{h_v} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right\} + k^2 \psi = 0. \quad (2-1-24)$$

2-2. БАЛАНС ЭНЕРГИИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Уравнение баланса энергии (1-6-1) для монохроматического поля выводится на основе уравнений (2-1-5) и символического метода для квадратичных соотношений (Д-5-13), (Д-5-14). Действительно, умножив скалярно уравнение, комплексно сопряженное уравнению I системы (2-1-5), на $\dot{\mathbf{E}}_m$, а уравнение II на $\dot{\mathbf{H}}_m^*$ и проводя те же преобразования, что и при выводе уравнения (1-6-1), получим:

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*] + j\omega (\tilde{\mu}_a \dot{H}_m^2 - \tilde{\epsilon}_a^* \dot{E}_m^2) + (\mathbf{J}_m^{\text{ст}*} \dot{\mathbf{E}}_m) = 0. \quad (2-2-1)$$

Введем обозначения:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*] = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}_m^* \dot{\mathbf{H}}_m]. \quad (2-2-2)$$

— комплексный вектор Пойнтинга, определяющий плотность потока комплексной мощности, проходящего через поверхность S , ограничивающую исследуемый объем V ;

$$\mathbf{P}_0 = \operatorname{Re} \dot{\mathbf{P}}. \quad (2-2-3)$$

— плотность потока действительной мощности, проходящего через поверхность S ;

$$\mathbf{P}_r = \operatorname{Im} \dot{\mathbf{P}}. \quad (2-2-4)$$

— плотность потока реактивной мощности, проходящего через поверхность S ;

$$p_0 = \frac{\omega}{2} (\epsilon_a^* E_m^2 + \mu_a^* H_m^2). \quad (2-2-5)$$

— плотность действительной мощности в объеме V ;

$$p_r = \frac{\omega}{2} (\epsilon_a' E_m^2 - \mu_a' H_m^2) \quad (2-2-6)$$

— плотность реактивной мощности в объеме V ;

$$\dot{p}_{\text{ст}} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}_m^{\text{ст}*} \dot{\mathbf{E}}_m) \quad (2-2-7)$$

— плотность комплексной мощности сторонних источников в объеме V .

Перепишем уравнение (2-2-1) в виде

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{P}} + j p_r + p_0 + \dot{p}^{\text{ct}} = 0$$

или в интегральной форме, с учетом (Д-3-30):

$$\oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} + j P_r + P_0 + \dot{P}^{\text{ct}} = 0. \quad (2-2-8)$$

Здесь

$$P_r = \int_V p_r dV \quad (2-2-8a)$$

— реактивная мощность в объеме V ;

$$P_0 = \int_V p_0 dV \quad (2-2-8б)$$

— действительная мощность в том же объеме;

$$\dot{P}^{\text{ct}} = \int_V \dot{p}^{\text{ct}} dV = P_0^{\text{ct}} + j P_r^{\text{ct}} \quad (2-2-8в)$$

— комплексная мощность распределенных в том же объеме сторонних источников;

$$\oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S}$$

— поток комплексного вектора Пойнтинга, проходящего через поверхность S .

Уравнение (2-2-8) выражает баланс энергии мощности монохроматического поля в комплексной форме. Это уравнение распадается на два, из которых одно состоит из действительных частей

$$P_{0S} + P_0 + P_0^{\text{ct}} = 0, \quad (2-2-9)$$

а второе — из мнимых частей

$$P_{rS} + P_r + P_r^{\text{ct}} = 0. \quad (2-2-10)$$

В этих уравнениях:

$$P_{0S} = \oint_S \operatorname{Re} \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} = \oint_S \Pi_0 d\mathbf{S} \quad (2-2-11)$$

— действительная мощность, проходящая через поверхность S ;

$$P_{rS} = \oint_S \text{Im } \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{P}_r d\mathbf{S} \quad (2-2-11a)$$

— реактивная мощность, проходящая через поверхность S ;

$$P_0^{\text{ct}} = \text{Re } \dot{P}^{\text{ct}} = |\dot{P}^{\text{ct}}| \cos \varphi \quad (2-2-12)$$

— действительная мощность сторонних источников, распределенных в объеме V ;

$$P_r^{\text{ct}} = \text{Im } \dot{P}^{\text{ct}} = |\dot{P}^{\text{ct}}| \sin \varphi \quad (2-2-12a)$$

— реактивная мощность тех же сторонних источников (φ — разность фаз $\dot{\mathbf{J}}^{\text{ct}}$ и $\dot{\mathbf{E}}_m$).

Уравнение (2-2-9) выражает баланс действительных* мощностей. Если $P_0^{\text{ct}} < 0$, то сторонние источники отдают энергию полю; если $P_0^{\text{ct}} > 0$, то, наоборот, отбирают энергию у поля. Очевидно, условие $P_0^{\text{ct}} < 0$ соответствует сдвигу фаз между $\dot{\mathbf{J}}^{\text{ct}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$, определяемому неравенством $\cos \varphi < 0$ или $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$. Условие $P_0^{\text{ct}} > 0$ соответ-

ствует неравенству $\cos \varphi > 0$ или $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Уравнение (2-2-10) выражает баланс реактивных мощностей и характеризует обмен энергией между полем и сторонними источниками.

В общем случае в среде, обладающей потерями (см. § 2-7) напряженности электрического и магнитного полей не совпадают по фазе и отношение

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\epsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu'_a (1 - j \text{tg } \delta_m)}{\epsilon'_a (1 - j \text{tg } \delta_a)}} \quad (2-2-13)$$

является комплексной величиной. Однако если $\text{tg } \delta_a = \text{tg } \delta_m$, т. е.

$$\mu''_a / \mu'_a = \epsilon''_a / \epsilon'_a, \quad (2-2-14)$$

* В современной литературе действительная мощность называется «активной». По нашему мнению, более пригоден термин «действительная» мощность, характеризующий преобразование электромагнитной энергии в другой, неэлектрический вид энергии.

то правая часть отношения (2-2-13) становится вещественной величиной

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \sqrt{\frac{\mu'_a}{\epsilon'_a}}, \quad (2-2-15)$$

и сдвиг по фазе между электрическим и магнитным полями отсутствует. При этом согласно (2-2-11а) $P_{rs}=0$, согласно (2-2-8а) с учетом (2-2-6) и (2-2-15) $P_r=0$ и, следовательно, согласно (2-2-10) и $P_r^{ст}=0$, т. е. обмен энергией между сторонними источниками и полем отсутствует.

Условию (2-2-14) можно удовлетворить, подбирая параметры среды или, так как эти параметры зависят от частоты, подбирая частоту.

Если объем V изолирован, то $P_{rs}=0$ и в общем случае согласно (2-2-10).

$$P_r = -P_r^{ст}, \quad (2-2-16)$$

т. е. происходит обмен энергией между сторонними источниками и полем.

Однако, если запасенная энергия постоянна во времени, что согласно (1-1-6) возможно при условии, что электрические и магнитные поля сдвинуты по фазе на $\pi/2$ и $\epsilon'_a E_m^2 = \mu'_a H_m^2$, то согласно выражению (2-2-8а) с учетом (2-2-6) и выражению (2-2-16)

$$P_r = P_r^{ст} = 0. \quad (2-2-17)$$

При этом обмен энергией между полем и сторонними источниками отсутствует, а происходит лишь обмен энергией между электрическим и магнитным полем. Такой электромагнитный процесс называется электрическим резонансом.

Условия резонанса при данных геометрических размерах изолированного объема и параметрах заполняющей его среды могут быть получены путем подбора частоты (резонансная частота) или при данной частоте путем подбора размеров объема (резонансный объем).

2-3. ПОЛЕ ПРОВОДА С ПЕРЕМЕННЫМ ТОКОМ

В пространстве, окружающем проводник, по которому протекает переменный ток, возникает электромагнитное поле сложной структуры, в котором вектор Пойнтинга не равен нулю и направлен от провода, т. е. имеет место излучение электромагнитной энергии.

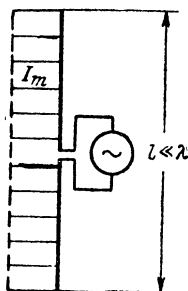


Рис. 2-2. Элементарный электрический излучатель.

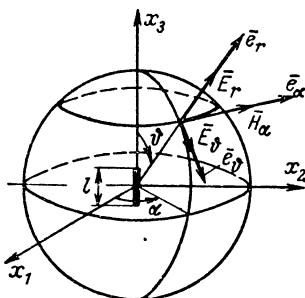


Рис. 2-3. К расчету поля элементарного электрического излучателя.

Поле проводника с переменным током можно определить как сумму полей, создаваемых элементарными участками провода, распределение тока по длине которых можно полагать однородным (квазистационарный ток). Условием такого распределения тока является неравенство

$$l \ll \lambda, \quad (2-3-1)$$

т. е. длина элементарного участка провода должна быть значительно меньше длины волны, соответствующей частоте переменного тока в проводе (рис. 2-2).

Элементарный участок провода с однородным распределением тока можно рассматривать как электрический диполь с изменяющимися во времени зарядами. Действительно, электрический диполь, заряды которого под действием стороннего источника периодически меняются во времени, можно представить в виде системы двух металлических шариков, соединенных проводником, в середину которого включен сторонний источник. В этом случае на основании (1-2-9) диполь можно характеризовать выражениями

$$\left. \begin{aligned} p_z &= ql, \\ q &= q_m \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2-3-2)$$

Периодическое изменение зарядов диполя эквивалентно переменному току в соединяющем проводнике. Согласно уравнению (1-3-15)

$$i = -\frac{\partial q}{\partial t} = -(\omega q_m) \cos \omega t = -I_m \cos \omega t. \quad (2-3-3)$$

Вследствие этого поле, создаваемое электрическим диполем с переменным моментом, будет совпадать с полем, создаваемым проводником длиной l , по которому протекает сторонний ток:

$$i^{\text{ст}} = I_m \cos \omega t$$

или

$$i^{\text{ст}} = I_m e^{j\omega t} = J_m^{\text{ст}} S e^{j\omega t}. \quad (2-3-4)$$

Здесь $J_m^{\text{ст}}$ — амплитуда плотности тока, S — площадь сечения проводника, а l — длина проводника много меньше длины волны λ (рис. 2-2). Такой проводник с переменным током называется элементарным электрическим излучателем или диполем Герца. Изучение поля такого диполя позволяет решать задачи анализа и синтеза антенн, поскольку последние можно рассматривать как системы диполей.

Поле элементарного электрического излучателя (рис. 2-3) определим через векторный потенциал A . Будем полагать, что ток определяется выражением (2-3-4) и окружающая диполь среда неограниченная, изотропная, однородная и не обладает потерями ($\sigma=0$).

Для области $r \gg l$ можно считать все точки диполя равноотстоящими от исследуемой точки поля, вследствие чего (2-1-15а) можно переписать в виде

$$\dot{A} = e_z \frac{\mu_a e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \int_V J_m^{\text{ст}} dV.$$

Так как $J_m^{\text{ст}} = I_m/S$ и $Sl = V$, получим:

$$\dot{A} = e_z \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{I_m l}{r} e^{j(\omega t - \beta r)}.$$

Переходя к сферической системе координат, в которой $e_z = e_r \cos \theta - e_\theta \sin \theta$, получаем формулу, определяющую векторный потенциал на расстоянии $r \gg l$:

$$\dot{\mathbf{A}} = (\mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta) \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{I_m l}{r} e^{j(\omega t - \beta r)}. \quad (2-3-5)$$

Подставляя это выражение в (1-1-4) и в уравнение I системы (2-1-5)

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}, \quad \dot{\mathbf{E}} = \frac{\text{rot } \dot{\mathbf{H}}}{j \omega \epsilon_a},$$

согласно (Д-3-56) находим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= -j \frac{I_m l}{4\pi \omega \epsilon_a r^3} [\mathbf{e}_r 2(1 + j\beta r) \cos \vartheta + \mathbf{e}_\vartheta (1 + \\ &\quad + j\beta r - \beta^2 r^2) \sin \vartheta] e^{j(\omega t - \beta r)}; \\ \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{e}_\alpha \frac{I_m l}{4\pi r^2} (1 + j\beta r) \sin \vartheta e^{j(\omega t - \beta r)}. \end{aligned} \right\} \quad (2-3-6)$$

Из рассмотрения этих выражений следует, что электрическое поле элементарного электрического излучателя имеет составляющие по \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_ϑ , а магнитное поле — только одну составляющую по \mathbf{e}_α .

Входящее в последние выражения произведение $I_m l$ — амплитуда момента тока — на основании (2-3-2) и (2-3-3) определяется выражением

$$j I_m l = \omega \dot{\mathbf{p}}_{эм}, \quad (2-3-7)$$

где $\dot{\mathbf{p}}_{эм}$ — комплексная амплитуда электрического момента диполя.

Перепишем выражения (2-3-6) в виде

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha &= \frac{I_m l \beta}{4\pi r} \sin \vartheta \left[\frac{1}{\beta r} \cos(\omega t - \beta r) - \right. \\ &\quad \left. - \sin(\omega t - \beta r) \right]; \\ E_r &= \frac{I_m l \beta}{2\pi \omega \epsilon_a r^2} \cos \vartheta \left[\frac{1}{\beta r} \sin(\omega t - \beta r) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\omega t - \beta r) \right]; \\ E_\vartheta &= \frac{I_m l \beta^2}{4\pi \omega \epsilon_a r} \sin \vartheta \left[\left(\frac{1}{\beta^2 r^2} - 1 \right) \sin(\omega t - \beta r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta r} \cos(\omega t - \beta r) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2-3-8)$$

В зоне индукции, где $r \ll \lambda$, или, согласно (2-1-13),

$$\beta r \ll 1, \quad (2-3-9)$$

выражения (2-3-8) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha &\approx \frac{I_m l}{4\pi r^2} \sin \vartheta \cos \omega t; \\ E_r &\approx \frac{I_m l}{2\pi \omega \epsilon_a r^3} \cos \vartheta \sin \omega t; \\ E_\vartheta &\approx \frac{I_m l}{4\pi \omega \epsilon_a r^3} \sin \vartheta \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2-3-10)$$

Как видим, это поле волнового характера не имеет и быстро убывает с расстоянием. Среднее значение вектора Пойнтинга, согласно выражению (2-2-3), равно нулю, так как \mathbf{E} и \mathbf{H} отличаются по фазе на 90° . Таким образом, в поле, описываемом выражением (2-3-10), движения энергии нет; происходит лишь периодический обмен энергией между электрической и магнитной составляющими поля.

В волновой зоне, которая определяется условием

$$r \gg \lambda$$

или

$$\beta r \gg 1, \quad (2-3-11)$$

на основе выражений (2-3-8) с учетом (2-1-13) получим:

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha &\approx \frac{I_m l}{2} \frac{\sin \vartheta}{\lambda r} \cos \left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2} \right); \\ E_r &\approx 0; \\ E_\vartheta &\approx \frac{I_m l}{2} Z_0 \frac{\sin \vartheta}{\lambda r} \cos \left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2-3-12)$$

Здесь $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ — волновое сопротивление [см. выражение (1-9-3)].

Выражения (2-3-12) имеют волновой характер. Из них следует, что поле излучения представляет собой сферическую волну, т. е. поверхность сферы радиусом r является поверхностью одинаковых фаз βr ; при этом \mathbf{E} и \mathbf{H} совпадают по фазе, взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения \mathbf{e}_r . Вследствие этого среднее значение вектора Пойнтинга не равно нулю и, следовательно, поле излучения является полем

бегущей волны, фронт которой распространяется с фазовой скоростью, определяемой выражением (2-1-12а).

В пределах малого телесного угла поле излучения можно рассматривать как плоскую волну (см. § 2-7), поскольку небольшой участок поверхности сферы приближенно можно считать плоским.

Важным свойством поля излучения является сравнительно медленное убывание его с расстоянием — пропорционально $1/r$; как мы уже отмечали, поле индукции убывает быстрее — пропорционально $1/r^2$.

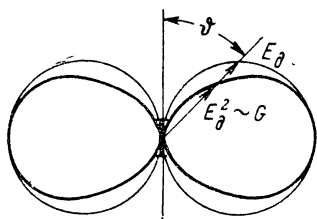


Рис. 2-4. Диаграммы излучения элементарного электрического излучателя «по полю» (тонкая линия), «по мощности» и коэффициента направленного действия (более жирная линия).

Перепишем (2-3-12) для действующих значений I и E_d , H_d :

$$\left. \begin{aligned} E_d &= Z_0 H_d, \\ H_d &= \frac{Il}{2} \frac{\sin \theta}{\lambda r}. \end{aligned} \right\} \quad (2-3-13)$$

Для вакуума, учитывая (1-9-3а) и (2-2-3), получим:

$$\left. \begin{aligned} E_d &= 60\pi Il \frac{\sin \theta}{\lambda r}; \\ H_d &= \frac{Il}{2} \frac{\sin \theta}{\lambda r}; \\ P_0 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_m \dot{H}_m^*] = E_d H_d = \\ &= 30\pi I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2-3-14)$$

Диаграммы излучения «по полю» и «по мощности» (рис. 2-4) изображают зависимость E_d , H_d и P_0 от угла θ и показывают направленный характер поля излучения, т. е. преимущественное излучение в пло-

скости, перпендикулярной оси диполя $\vartheta = \pi/2$. В направлении $\vartheta = 0$, т. е. вдоль оси диполя, излучение отсутствует.

Так как, согласно выражениям (2-3-14), величина поля излучения от угла α не зависит, то в плоскости, перпендикулярной к оси диполя, диаграмма излучения представляет окружность. Подчеркиваем, что эти выражения отличаются от выражения (1-9-6) отсутствием в знаменателе релятивистского множителя $\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^3$. Объяс-

няется это тем, что создающий поле электрический диполь неподвижен относительно точки, в которой определяется поле. Следует также отметить, что средняя скорость движения зарядов (электронов) в проводнике весьма мала по сравнению со скоростью света (см. стр. 23).

Действительная мощность, излучаемая электрическим диполем, определится интегралом

$$P_{0 \text{ из}} = \oint_S \mathbf{P}_0 dS.$$

Обращаясь к рис. 2-3, можем написать:

$$P_{0 \text{ из}} = \int_0^\pi P_0 2\pi r \sin \vartheta r d\vartheta.$$

Подставляя выражение P_0 из формул (2-3-14), получим:

$$P_{0 \text{ из}} = I^2 R_{\text{из}} [\text{вт}], \quad (2-3-15)$$

где

$$R_{\text{из}} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 [\text{ом}]. \quad (2-3-15a)$$

Величина $R_{\text{из}}$ формально называется сопротивлением излучения, поскольку она определяет мощность излучения при заданном действующем значении тока, протекающем в электрическом диполе. Омическое сопротивление диполя полагаем исчезающе малым по сравнению с $R_{\text{из}}$ и поэтому в формулах не учитываем.

На основании формул (2-3-14) и (2-3-15) можно написать формулы, определяющие величины P_0 и E_d по заданной мощности излучения $P_{0 \text{ из}}$:

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \frac{GP_0 \text{ из}}{4\pi r^2} [\text{вт}/\text{м}^2]; \\ E_d &= \frac{\sqrt{30GP_0 \text{ из}}}{r} [\text{в}/\text{м}]. \end{aligned} \right\} \quad (2-3-16)$$

Здесь G — коэффициент направленного действия любого излучателя; для элементарного электрического излучателя

$$G = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta. \quad (2-3-17)$$

Если предположить, что в центре сферы находится гипотетический изотропный излучатель с той же излучаемой мощностью, то

$$P_0^{(\text{изот})} = \frac{P_0^{(\text{изот})}}{4\pi r^2}. \quad (2-3-18)$$

Тогда можно написать, что $P_0 = GP_0^{(\text{изот})}$, т. е. величина G определяет плотность потока мощности излучения в заданном направлении по плотности потока мощности изотропного излучателя. Формулы (2-3-16) действительны для любой антенны, а коэффициент направленного действия в общем виде определяется выражением

$$G(\vartheta, \alpha) = \frac{E^2(\vartheta, \alpha)}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} E^2(\vartheta, \alpha) d\vartheta d\alpha}. \quad (2-3-19)$$

Очевидно, что диаграмма направленности «по мощности» (рис. 2-4) является диаграммой коэффициента направленного действия [выражение (2-3-17)].

Максимальное значение коэффициента направленного действия обозначим G_0 , а направление, в котором $G = G_0$, назовем главным направлением излучения. Для элементарного излучателя $G_0 = 3/2$, а угол главного направления $\vartheta = \pi/2$.

Если электрический диполь находится у идеально проводящей плоской поверхности неограниченных размеров (рис. 2-5), то он излучает энергию только в полусфере и поле, создаваемое им в направлении $\vartheta = \pi/2$, будет определяться на основе (2-3-14) формулой

$$E_d = 60\pi I \frac{2l}{\lambda r} = 120\pi I \frac{l}{\lambda r}. \quad (2-3-20)$$

Напряженность этого поля в 2 раза больше, чем у уединенного диполя такой же длины. Справедливость последнего выражения вытекает из одинаковой структуры поля, создаваемого диполем при наличии идеально проводящей поверхности и поля диполя двойной длины, находящегося в неограниченной среде. В этом можно убедиться, если идеально проводящую поверхность заменить зеркальным отображением данного диполя.

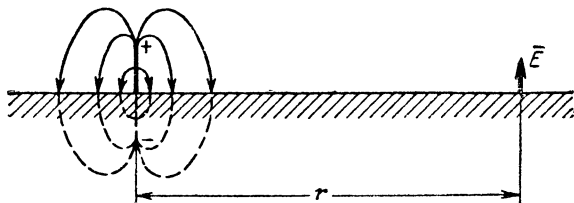


Рис. 2-5. К определению поля электрического диполя у плоской идеально проводящей поверхности.

Учитывая, что расположенный у идеально проводящей поверхности электрический диполь создает в 2 раза большую напряженность поля, чем уединенный диполь той же длины и с тем же током, сопротивление излучения такого диполя

$$R_{\text{из}} = 160\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 [\text{ом}], \quad (2-3-21)$$

а коэффициент направленного излучения вдоль поверхности $G_0=3$.

Элементарный магнитный излучатель. Если переменный ток $i^{\text{ст}} = I_m \cos \omega t$ протекает по проводниковому витку (рис. 2-6), диаметр которого много меньше длины волны,

$$2a \ll \lambda, \quad (2-3-22)$$

то распределение тока вдоль витка можно полагать однородным. В этом случае виток с током можно рассматривать как магнитный диполь с моментом, амплитуда которого согласно (1-2-16) равна:

$$\mathbf{p}_{\text{mt}} = \mathbf{n}_0 S_0 I_m.$$

Здесь $S_0 = \pi a^2$ — площадь, ограниченная витком.

Поле, создаваемое таким диполем в окружающем пространстве, можно найти тем же путем, что и поле электрического диполя, т. е. через определение векторного потенциала (2-1-15а). Учитывая условие (2-3-22) и полагая, что $\rho \gg 2a$, а $J_m^{ст} = \frac{I_m}{S}$, векторный потенциал (2-1-15а) может быть записан в виде

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu_a I_m e^{j\omega t}}{4\pi} \int_L \frac{e^{-j\beta\rho}}{\rho} d\mathbf{l}.$$

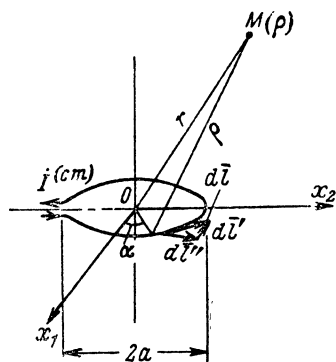


Рис. 2-6. К расчету поля замкнутого витка с током (элементарного магнитного излучателя).

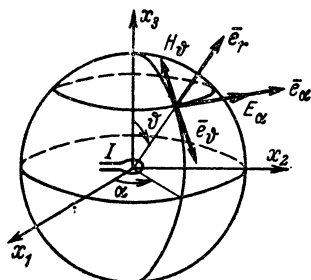


Рис. 2-7. Элементарный магнитный излучатель в центре сферической системы координат.

Разложим направленный элемент длины $d\mathbf{l}$ на два взаимно перпендикулярных элемента $d\mathbf{l}'$ и $d\mathbf{l}''$. Учитывая, что $d\mathbf{l}' = d\mathbf{l} \sin \alpha$, а $d\mathbf{l}'' = d\mathbf{l} \cos \alpha$, легко видеть, что при обходе контура надо интегрировать не по $d\mathbf{l}$, а по $d\mathbf{l}''$, так как составляющие потенциала, создаваемые элементами $d\mathbf{l}'$, для симметричных значений $\pm \alpha$ имеют одинаковые величины, но противоположные знаки; поэтому в целом создаваемый этой частью длины потенциал равен нулю. Следовательно,

$$\dot{A}_\alpha = \frac{\mu_a I_m e^{j\omega t}}{4\pi} \int_L \frac{\cos \alpha e^{-j\beta\rho}}{\rho} dl.$$

Здесь $dl = a d\alpha$ и $\rho^2 = r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \alpha$.

При $r \gg a$ можно полагать:

$$\rho \approx r \left(1 - \frac{a}{r} \sin \vartheta \cos \alpha \right);$$

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin \vartheta \cos \alpha \right).$$

Согласно условию (2-3-22) $\beta a \rightarrow 0$; поэтому

$$e^{-j\beta\rho} \approx e^{-j\beta r} (1 + j\beta a \sin \vartheta \cos \alpha)$$

и

$$\int_L \frac{\cos \alpha e^{-j\beta\rho}}{\rho} dl = \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \alpha e^{-j\beta\rho}}{\rho} d\alpha \approx$$

$$\approx S_0 \frac{\sin \vartheta}{r^2} (1 + j\beta r) e^{-j\beta r}.$$

Следовательно,

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\mu_a I_m S_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r^2} \sin \vartheta (1 + j\beta r). \quad (2-3-23)$$

Применяя сферическую систему координат, в центре которой перпендикулярно оси x_3 расположен виток (рис. 2-7), подстановкой (2-3-23) в уравнения

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{\mathbf{A}},$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\text{rot } \dot{\mathbf{H}}}{j\omega\epsilon_a}$$

найдем выражения, определяющие поле магнитного диполя:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= \frac{I_m S_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r^3} \left[\mathbf{e}_r 2(1 + j\beta r) \cos \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_\vartheta (1 - \beta^2 r^2 + j\beta r) \sin \vartheta \right]; \\ \dot{\mathbf{E}} &= -\mathbf{e}_\alpha j\omega\mu_a \frac{I_m S_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r^2} (1 + j\beta r) \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (2-3-24)$$

Из последнего выражения следует, что электрическое поле магнитного диполя имеет только одну составляющую E_α , а его магнитное поле — две составляющих: H_ϑ и H_r . Сравнивая этот результат с выражениями (2-3-6),

мы видим, что из них можно получить формулы (2-3-24), заменяя $\dot{\mathbf{E}}$ на $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{p}_{эм} = i \frac{I_m t}{\omega}$ на $p_{мм} \mu_a = \mu_a I_m S_0$ и ϵ_a на $-\mu_a$ (принцип двойственности).

В зоне индукции магнитного диполя [условие (2-3-9)] составляющие поля:

$$\left. \begin{aligned} H_r &\approx \frac{I_m S_0}{2\pi r^3} \cos \vartheta \cos \omega t; \\ H_\vartheta &\approx \frac{I_m S_0}{4\pi r^3} \sin \vartheta \cos \omega t; \\ E_\alpha &\approx \omega \mu_a \frac{I_m S_0}{4\pi r^2} \sin \vartheta \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2-3-25)$$

Как и следовало ожидать, это поле быстро убывает с расстоянием, а среднее значение вектора Пойнтинга равно нулю.

Поле излучения магнитного диполя [условие (2-3-11)] определяется выражениями:

$$\left. \begin{aligned} H_r &\approx 0; \\ H_\vartheta &\approx -\frac{I_m}{2} \frac{2\pi S_0}{\lambda^2} \frac{\sin \vartheta}{r} \cos(\omega t - \beta r); \\ E_\alpha &\approx -\frac{I_m}{2} Z_0 \frac{2\pi S_0}{\lambda^2} \frac{\sin \vartheta}{r} \cos(\omega t - \beta r). \end{aligned} \right\} \quad (2-3-26)$$

Как и следовало ожидать, поле излучения представляет бегущую волну, вектор Пойнтинга не равен нулю и направлен по \mathbf{e}_r .

Переписывая выражения (2-3-26) для действующих значений и опуская индексы координат, для вакуума будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} E_d &= 60 \pi I \frac{2\pi S_0}{\lambda^2} \frac{\sin \vartheta}{r}; \\ H_d &= \frac{I}{2} \frac{2\pi S_0}{\lambda^2} \frac{\sin \vartheta}{r}; \\ P_0 &= 30 \pi I^2 \left(\frac{2\pi S_0}{\lambda^2} \right)^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2-3-27)$$

Из сравнения этих выражений с (2-3-14) следует, что диаграмма излучения магнитного диполя совпадает с диаграммой излучения электрического диполя, причем

вдоль оси витка, образующего магнитный диполь, излучение отсутствует.

Формулы (2-3-27) совпадают с формулами (2-3-14) с точностью до постоянных множителей. Они становятся идентичными при замене $2\pi S_0/\lambda^2$ на l/λ .

Заменяя в формуле (2-3-15а) l/λ на $2\pi S_0/\lambda^2$, получаем выражение, определяющее сопротивление излучения магнитного диполя (рамки):

$$R_{из} = 80\pi^2 \left(\frac{2\pi S_0}{\lambda^2} \right)^2 [ом]. \quad (2-3-28)$$

Если рамка состоит из w витков, то во всех уравнениях (2-3-23) — (2-3-28) вместо S_0 следует подставлять произведение wS_0 ; т. е. сопротивление излучения рамки пропорционально w^2 .

2-4. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ АНТЕНН

Примерами простейших антенн являются линейные электрические и магнитные вибраторы. Электрический вибратор представляет собой провод, поперечные размеры которого много меньше длины волны; вдоль него устанавливаются стоячие волны тока с узлами на концах. Магнитный вибратор — это щель, вырезанная в проводящей поверхности, ширина которой значительно меньше длины волны; вдоль щели устанавливаются стоячие волны напряжения с узлами на концах.

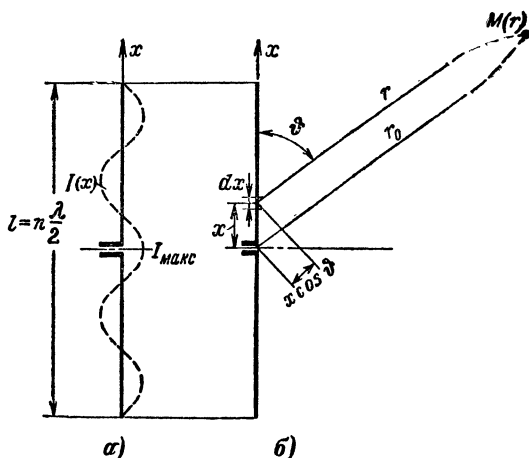


Рис. 2-8. Электрический вибратор.

а — распределение тока; б — к определению поля.

Длина вибратора, при которой устанавливаются стоячие волны тока и напряжения, называется резонансной длиной. В общем случае резонансная длина

$$l_r = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

В случае симметричного электрического вибратора (рис. 2-8) распределение тока вдоль провода определяется выражением

$$I(x) = I_{\text{макс}} \cos \beta x, \quad (2-4-1)$$

где $\beta = 2\pi/\lambda$, а $I_{\text{макс}}$ — действующее значение тока в пучности, т. е. при $x=0$.

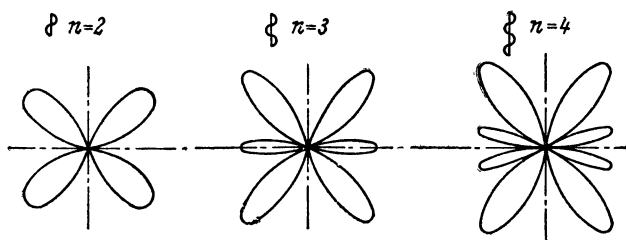


Рис. 2-9. Диаграммы излучения многоволновых вибраторов.

Поле излучения электрического вибратора можно представить как сумму полей, создаваемых электрическими диполями длиной $dx \ll \lambda$, которые образуют вибратор. Поле излучения элементарного диполя, находящегося в точке x , согласно (Д-5-12а) запишется на основе (2-3-12) и (2-4-1) в виде

$$d\vec{E}_d = j 60\pi I_{\text{макс}} \cos \beta x \frac{dx}{\lambda} \frac{\sin \vartheta}{r_0} e^{-j\beta(r_0 - x \cos \vartheta)}.$$

Здесь $\beta x \cos \vartheta$ — фазовый сдвиг по отношению к полю, создаваемому таким же диполем, расположенным в центре провода ($x=0$), r_0 — расстояние от центра провода. Поле излучения электрического вибратора длиной $l = n \frac{\lambda}{2}$ в точке r_0 , ϑ определяется выражением

$$E_d = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dE_d = \frac{60I_{\text{макс}}}{r_0} \frac{\cos\left(n \frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right) - \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{\sin \vartheta}. \quad (2-4-2)$$

Соответствующие этому выражению диаграммы излучения в вертикальной плоскости для нескольких значений n показаны на рис. 2-9.

Как видим, число пар лепестков равно числу полуволн. Зависимость сопротивления излучения от длины провода иллюстрирует рис. 2-10.

Действующей высотой вибратора h_d называется длина эквивалентного вибратора с однородным распределением тока $I = I_{\text{макс}}$, который создает такое же поле, что и вибратор с неоднородным распределением, т. е.

$$h_d = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} I(x) dx}{I_{\text{макс}}} . \quad (2-4-3)$$

Поле излучения электрического полуволнового вибратора длиной $l = \lambda/2$ (рис. 2-11, а) согласно (2-4-2) определяется выражением

$$E_d = \frac{60 I_{\text{макс}}}{r_0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} .$$

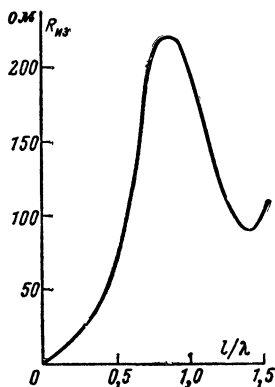


Рис. 2-10. Зависимость сопротивления излучения провода от его длины.

С учетом действующей высоты полуволнового вибратора $h_d = \frac{2}{\pi} l = \frac{\lambda}{\pi}$ его поле излучения описывается выражениями:

$$\left. \begin{aligned} E_d &= 60\pi I_{\text{макс}} \frac{h_d}{\lambda r_0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}; \\ H_d &= \frac{E_d}{120\pi} = \frac{I_{\text{макс}}}{2} \frac{h_d}{\lambda r_0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}; \\ P_0 &= E_d H_d = 30\pi I_{\text{макс}}^2 \left(\frac{h_d}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r_0^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (2-4-4)$$

Из сравнения этих формул с (2-3-14) видим, что выражения для поля излучения полуволнового вибратора отличаются множителем $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}$; вследствие этого полуволновой вибратор обладает большей направленностью излучения по сравнению с элементарным

излучателем (рис. 2-11, *б*). Излучаемая полуволновым вибратором действительная мощность

$$P_{0 \text{ из}} = \int_0^\pi P_0 (2\pi r \sin \vartheta) r d\vartheta.$$

Подставляя сюда P_0 из (2-4-4) после интегрирования, получим:

$$P_{0 \text{ из}} \approx 73 I_{\text{макс}}^2. \quad (2-4-5)$$

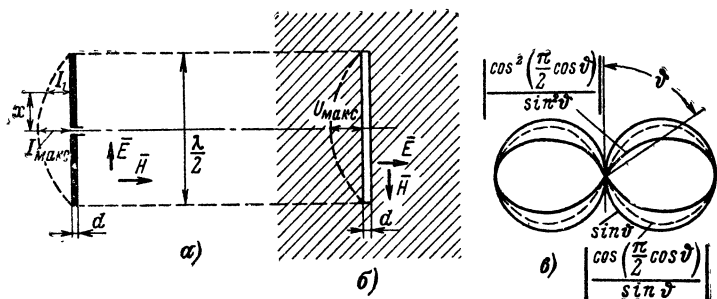


Рис. 2-11. Полуволновой вибратор.

а — проводниковый; *б* — щелевой; *в* — диаграмма излучения.

Следовательно, сопротивление излучения полуволнового вибратора

$$R_{\text{из}} \approx 73 \text{ ом}.$$

Коэффициент направленного излучения полуволнового вибратора аналогично (2-3-17)

$$G \approx 1,64 \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin^2 \vartheta}. \quad (2-4-6)$$

В формулу (2-4-5) длина волны в явном виде не входит, однако излучение электромагнитной энергии практически осуществимо только при токе высокой частоты. Так, например, при частоте $3 \cdot 10^8$ гц ($\lambda = 1$ м) длина полуволнового вибратора 0,5 м; при такой длине омическое сопротивление провода исчезающе мало по сравнению с сопротивлением излучения 73 ом и поэтому к. п. д. излучения равен почти 100%. При низкой частоте, например 50 гц, соответствующей $\lambda = 6000$ км, необходимо иметь вибратор длиной 3000 км; сопротивление медного провода, даже весьма толстого, при такой длине будет значительно превышать сопротивление излучения 73 ом. и, следовательно, к. п. д. излучения практически будет равен нулю.

Поле излучения четвертьволнового вибратора, т. е. «заземленного» вертикального провода длиной $\lambda/4$, расположенного у хорошо проводящей плоской поверхности (рис. 2-12, *а*), может быть опре-

делено по формулам (2-4-4) с подстановкой в них $h_d = \lambda/2\pi$. Сопротивление излучения такого вибратора приближенно определяется из формулы (2-3-21) с подстановкой в нее $l = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{4}$, т. е. $R_{из} \approx 40$ ом.

Действующая высота антенны при $l \leq \frac{\lambda}{4}$ согласно выражению (2-4-3)

$$h_d = \frac{1}{\sin \beta l} \int_0^l \sin [\beta (l - x)] dx = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} l\right)}{\sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} l\right)}.$$

График сопротивления излучения и действующей высоты вертикального провода длиной $l < \lambda/4$, «заземленного» у хорошо проводящей плоской поверхности, дан на рис. 2-12, б.

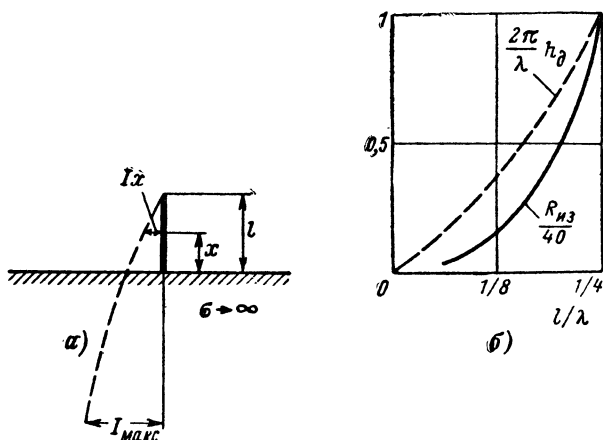


Рис. 2-12. Вертикальный провод у хорошо проводящей поверхности (а) и график сопротивления и действующей высоты (б).

Г-образная и Т-образная антенны длинных радиоволн (рис. 2-13) состоят из системы проводов, длина которых значительно меньше $\lambda/4$. Косинусоидальное распределение тока в них обеспечивается большой горизонтальной частью, включением индуктивности («удлинительной» катушки), а также применением «заземления» в виде закладываемой в почву разветвленной системы проводов либо применением «противовеса» — системы проводов, натянутых над поверхностным слоем земли. Так как в вертикальной части таких антенн получается почти однородное распределение тока, то их действующая высота почти равна геометрической. Поэтому напряженность

поля, создаваемого такой антенной у хорошо проводящей плоской поверхности, приближенно можно определить по формуле (2-3-20), подставляя в нее $l = h_d \approx h$,

$$E_d = 120\pi I_3 \frac{h}{\lambda_r}. \quad (2-4-7)$$

Здесь I_3 — действующее значение тока у заземления.

Путем такой же подстановки по формуле (2-3-21) приближенно определяется сопротивление излучения. Так как у таких антенн $h/\lambda \ll 1$, то их сопротивление излучения значительно меньше, чем у четвертьволнового вибратора.

Поле излучения щелевого (магнитного) полуволнового вибратора (рис. 2-11, б) согласно принципу двойственности (см. стр. 90—91)

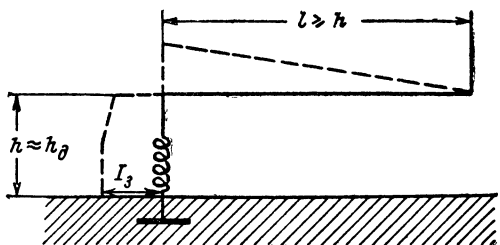


Рис. 2-13. Г-образная антенна длинных волн.

может быть определено из выражений (2-4-4). Так как ток электрического полуволнового вибратора, состоящего из проводниковой полоски шириной d , на основе (1-3-1) может быть записан в виде $I_{\text{макс}} \approx 2 d H_{d, \text{макс}}$, а разность потенциалов на краях щели может быть представлена в виде $U_{\text{макс}} \approx d E_{d, \text{макс}}$, то после соответствующей замены находим выражения, определяющие поле излучения щелевого полуволнового вибратора:

$$\left. \begin{aligned} E_d &= U_{\text{макс}} \frac{h_d}{\lambda_r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}; \\ H_d &= \frac{E_d}{120\pi}; \\ P_0 = E_d H_d &= \frac{U_{\text{макс}}^2}{120\pi} \left(\frac{h_d}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin^2 \vartheta}; \end{aligned} \right\} \quad (2-4-8)$$

Полуволновой вибратор щелевого типа широко используется в антеннах сантиметрового диапазона радиоволн.

2-5. НАПРАВЛЕННОЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ

Система, состоящая из нескольких полуволновых вибраторов, обладает направленным излучением и часто применяется как антенна коротких и ультракоротких (метровых) радиоволн.

Полуволновый вибратор с рефлектором — система из двух вибраторов, расположенных на расстоянии $\lambda/4$ (рис. 2-14). К одному из вибраторов, называемому «активным», подключается сторонний источник, в результате чего в этом вибраторе течет ток I_1 с косинусидальным распределением по длине вибратора. Во втором вибраторе, называемом «пассивным» или «рефлектором», возникает наведенный полем активного вибратора ток

$$I_2 \approx I_1 e^{j\left(\pi - \beta \frac{\lambda}{4}\right)} = I_1 e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (2-5-1)$$

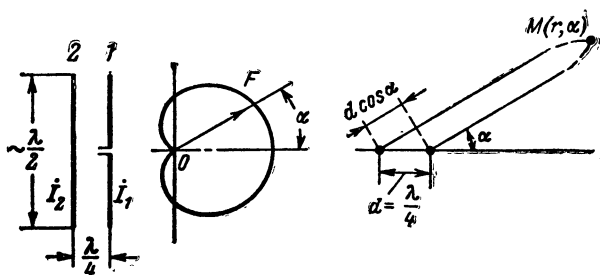


Рис. 2-14. Полуволновый вибратор с рефлектором.

1 — «активный» вибратор; 2 — «пассивный» вибратор-рефлектор.

Диаграмма излучения такой системы в плоскости, перпендикулярной к оси вибратора, представляет кордионду с максимумом в направлении от пассивного вибратора к активному. Действительно оба вибратора создают в удаленной точке M (т. е. в точке, где $r \gg \lambda$) поле с напряженностью

$$\dot{E}(\alpha) = E_1 + \dot{E}_2 e^{-j\left(\beta \frac{\lambda}{4} \cos \alpha\right)} = E_1 + \dot{E}_2 e^{-j\left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha\right)},$$

где E_1 — поле, создаваемое в этой точке активным вибратором. На основании выражения (2-5-1) можно полагать, что $\dot{E}_2 = E_1 e^{-j\frac{\pi}{2}}$; вследствие этого

$$\dot{E}(\alpha) = E_1 \left[1 + e^{-j\frac{\pi}{2}(\cos \alpha - 1)} \right].$$

Переходя к модулю относительной величины напряженности суммарного поля, получаем уравнение диаграммы излучения в виде

$$F(\alpha) = \left| \frac{\dot{E}(\alpha)}{E_1} \right| = \sqrt{2 \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha \right) \right]}. \quad (2-5-2)$$

На рис. 2-15 изображена схема конструкции антенны «волновой канал», состоящей из активного вибратора, рефлектора и нескольких директоров — пассивных вибраторов, расположенных в одной плоскости с активным вибратором и рефлектором. Длина каждого виб-

ратора и расстояния между ними подбираются так, чтобы поле, излучаемое в направлении директоров, было максимальным.

Полуволновой вибратор над проводящей плоской поверхностью (рис. 2-16 и 2-17) обладает многолепестковой диаграммой излучения. Полагая среду нижнего полупространства хорошим проводником, ее можно заменить зеркальным отображением вибратора; при этом

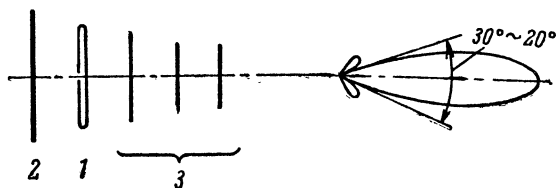


Рис. 2-15. Схема антенны «волновой канал» (Уда-Яги) и ее диаграмма излучения.

1 — активный вибратор; 2 — рефлектор (пассивный вибратор); 3 — директоры (пассивные вибраторы).

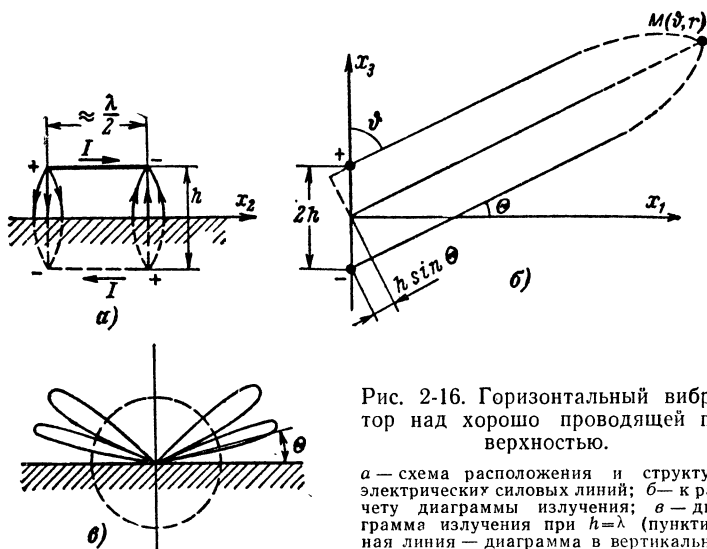


Рис. 2-16. Горизонтальный вибратор над хорошо проводящей поверхностью.

а — схема расположения и структура электрических силовых линий; б — к расчету диаграммы излучения; в — диаграмма излучения при $h=\lambda$ (пунктирная линия — диаграмма в вертикальной плоскости уединенного вибратора).

структура поля не меняется. Токи в вибраторе и его отображении противоположно направлены в случае горизонтального положения и одинаково в случае вертикального. Диаграмма излучения горизонтального вибратора в вертикальной плоскости Ox_1x_3 определяется выражениями

$$\begin{aligned} \dot{E}(\theta) &= \dot{E}_1 - \dot{E}_1^{\text{отр}} = E(e^{-j\beta h \sin \theta} - e^{-j\beta h \sin \theta}) = \\ &= j2E \sin(\beta h \sin \theta) \end{aligned}$$

или

$$F(\theta) = \left| \frac{\dot{E}(\theta)}{E_1} \right| = 2 \left| \sin \left(2\pi \frac{h}{\lambda} \sin \theta \right) \right|, \quad (2-5-3)$$

а вертикального вибратора в той же плоскости

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}_1 + \dot{E}_{1 \text{ отпр}} = \dot{E} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta} (e^{j\beta h \sin \theta} + e^{-j\beta h \sin \theta}) = \\ &= \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta} 2E \cos (\beta h \sin \theta) \end{aligned}$$

или

$$F(\theta) = 2 \left| \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta} \cos \left(2\pi \frac{h}{\lambda} \sin \theta \right) \right|. \quad (2-5-4)$$

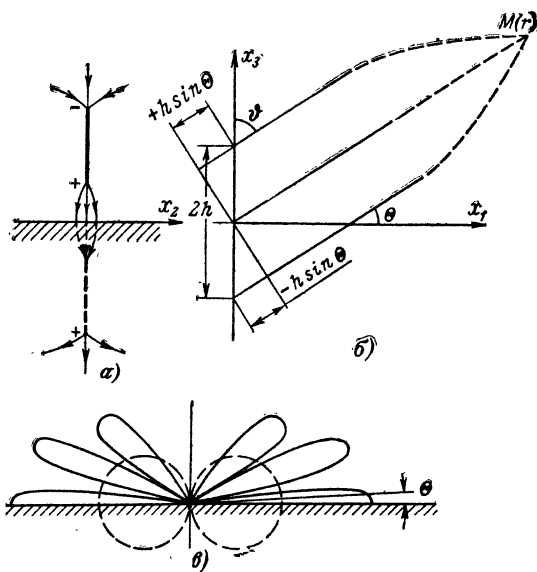


Рис. 2-17. Вертикальный вибратор над хорошо проводящей поверхностью.

а — схема расположения и структура электрических силовых линий; б — к расчету диаграммы излучения; в — диаграмма излучения при $h=3/2\lambda$; для сравнения пунктирной линией показана диаграмма излучения в вертикальной плоскости уединенного вибратора.

Из этих выражений следует, что в присутствии проводящей поверхности диаграмма излучения полуволнового вибратора из сравнительно широкой однолепестковой диаграммы превращается в многолепестковую. Число лепестков увеличивается, а их угловая ширина уменьшается с высотой вибратора над поверхностью. При этом поле излучения горизонтального вибратора вдоль поверхности равно нулю.

Система из двух активных полуволновых вибраторов (рис. 2-18) с равными по амплитуде токами, расположенных друг от друга на расстоянии $d = \lambda/2$, обладает диаграммой излучения в виде восьмерки. Если токи в вибраторах в противофазе, то направление максимум-

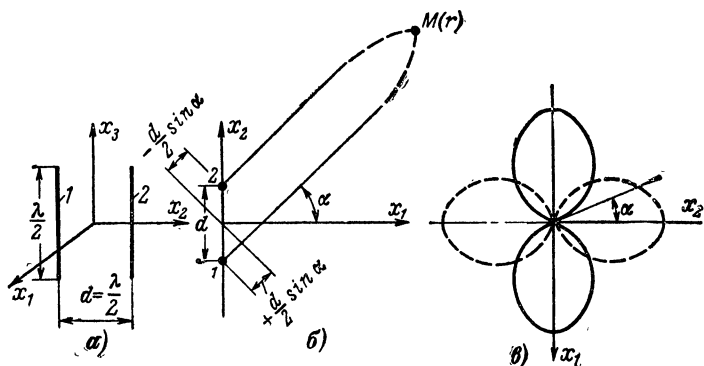


Рис. 2-18. Двухвибраторная антенна.

a — схема расположения вибраторов; b — к расчету поля; v — диаграммы излучения (сплошная линия — при синфазных токах в вибраторах пунктирная — при противофазных).

мов излучения совпадает с плоскостью вибраторов. Когда же токи синфазны (имеют одинаковую фазу), то направление максимумов перпендикулярно плоскости вибраторов. Из рис. 2-18, b видно, что напряженность суммарного поля, создаваемого обоими вибраторами, определяется выражением

$$\vec{E}(\alpha) = Ee^{i\left(\beta \frac{d}{2} \sin \alpha\right)} \pm Ee^{-i\left(\beta \frac{d}{2} \sin \alpha\right)}. \quad (2-5-5)$$

Здесь плюс относится к случаю синфазных, а минус — к случаю противофазных токов. При $d = \lambda/2$ относительная величина поля по модулю при синфазных вибраторах

$$F(\alpha) = 2 \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha\right) \right| \quad (2-5-6)$$

и при противофазных

$$F(\alpha) = 2 \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha\right) \right|. \quad (2-5-6a)$$

Из выражения (2-5-5) следует, что если проводники, по которым протекают токи в противоположных направлениях, расположены на

«близком» расстоянии друг от друга ($d \ll \lambda$), то излучение отсутствует, так как

$$F(\alpha) = 2 \left| \sin \left(\frac{2d}{\lambda} \sin \alpha \right) \right| \rightarrow 0. \quad (2-5-7)$$

Антенна типа «плоская синфазная решетка», состоящая из многих активных синфазных полуволновых вибраторов (рис. 2-19), обладает узкой диаграммой излучения с максимумом в направлении, перпендикулярном к плоскости решетки. При наличии зеркала (рефлектора) в виде такой же решетки, но из пассивных полуволновых

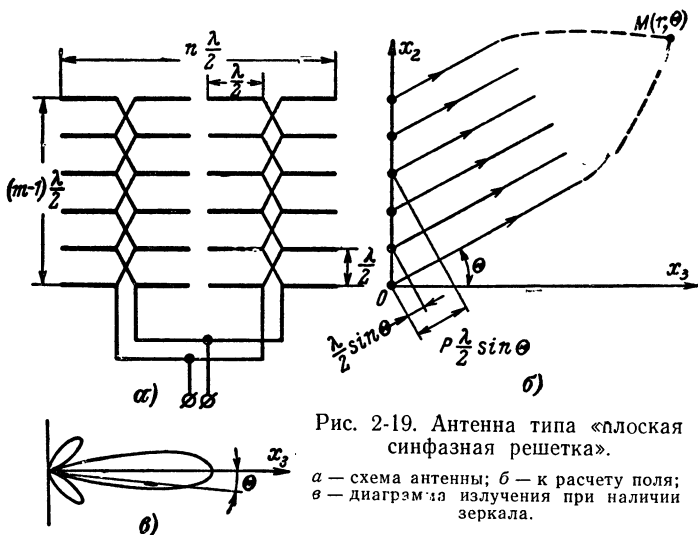


Рис. 2-19. Антенна типа «плоская синфазная решетка».

a — схема антенны; b — к расчету поля; c — диаграмма излучения при наличии зеркала.

вибраторов, установленного на расстоянии около $\lambda/4$ от активной решетки, поле излучения системы будет направлено только в сторону активной решетки. Поле такой системы определится как сумма полей всех вибраторов. В частности, в дальней зоне (зона Фраунгофера), определяемой условием

$$r \gg a, b \quad (2-5-8)$$

(a и b — размеры решетки) в вертикальной плоскости x_3Ox_2 , без учета влияния земли при небольших углах θ напряженность поля

$$\dot{E}_d(\theta) \approx 2nE_{d0} \sum_{p=0}^{(m-1)} e^{j\beta p \frac{\lambda}{2} \sin \theta} = 2nE_{d0} \frac{1 - e^{jm\pi \sin \theta}}{1 - e^{j\pi \sin \theta}}.$$

Здесь E_{d0} — напряженность поля, создаваемого одним вибратором в точке $M(r, \theta)$; n — число вибраторов в ряду; m — число рядов виб-

раторов в вертикальном направлении. Коэффициент 2 введен для приближенного учета действия зеркала. Ряд преобразован на основании формулы

$$\frac{1 - z^m}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{m-1}, \quad \text{при } z = e^{j\pi \sin \theta}.$$

Переходя к модулю относительной величины поля, получим выражение, определяющее диаграмму излучения такой антенны в вертикальной плоскости:

$$F(\theta) = \left| \frac{E_d(\theta)}{E_{d0}} \right| = 2n \left| \frac{\sin\left(m \frac{\pi}{2} \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right)} \right|. \quad (2-5-9)$$

Для горизонтальной плоскости аналогичным путем можно получить:

$$F(\alpha) \approx 2m \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right) \sin\left(n \frac{\pi}{2} \sin \alpha\right)}{\sin \vartheta \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha\right)} \right|. \quad (2-5-10)$$

Коэффициент направленного действия такой антенны для главного направления на основании выражения (2-3-19) при $m, n \gg 1$ равен:

$$G_0 \approx \pi mn.$$

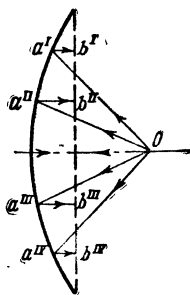


Рис. 2-20. Плоский синфазный излучатель, образованный параболическим зеркалом.

$oa^I + a^I b^I = oa^{II} + a^{II} b^{II} =$
 $= oa^{III} + a^{III} b^{III} = \dots$ Поверхность раскрыва, на которой лежат точки $b^I, b^{II}, b^{III}, \dots$ является эквифазной.

Диаграмма излучения антенны (рис. 2-19, в) состоит из одного главного и нескольких боковых лепестков; небольшие лепестки в направлении $\theta > \frac{\pi}{2}$, обусловленные дифракцией на краях решетки, на рисунке не показаны.

Поверхностный излучатель. Так называется ограниченная поверхность, площадь которой значительно превышает λ^2 и на которой возбуждено электромагнитное поле. Если поверхность плоская и фаза поля во всех точках одинакова (эквифазная поверхность), то имеем плоский эквифазный поверхностный излучатель.

В приближении геометрической оптики плоским эквифазным поверхностным излучателем, в частности, является плоскость раскрыва параболического зеркала (рис. 2-20) при облучении его из фокуса.

Рассмотренная выше антенна типа «плоская синфазная решетка» при увеличении числа полуволновых вибраторов

и уменьшении их длины в пределе превращается в плоский поверхностный эквифазный излучатель.

Поле плоского эквифазного излучателя (рис. 2-21) при однородном распределении амплитуд на нем можно найти тем же методом, что и поле полуволнового вибратора, т. е. полагая плоский поверхностный излучатель состоящим из бесконечно большого числа элементарных излучателей (принцип Гюйгенса).

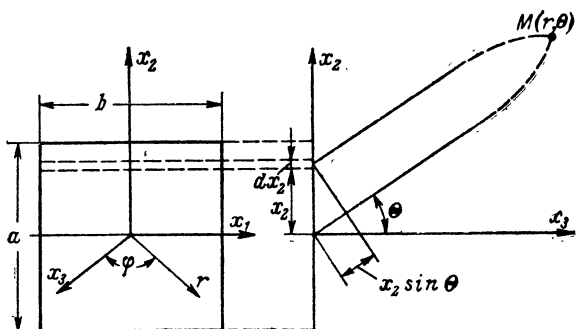


Рис. 2-21. К расчету поля плоского излучателя.

В точке $M(r, \theta, \varphi)$, удовлетворяющей условию (2-5-8), напряженность поля, создаваемого элементарным электрическим излучателем согласно (2-3-12) с учетом (1-3-1) определяется выражением

$$d\vec{E}(\theta, \varphi) = jE_S \frac{dx_1 dx_2}{\lambda r} \cos \varphi e^{-j\beta(r - x_1 \sin \varphi - x_2 \sin \theta)}. \quad (2-5-11)$$

Здесь

$$E_S = H_S \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad H_S = \frac{I}{2a} \quad (2-5-12)$$

— напряженности поля на поверхности эквифазного излучателя площадью $S = ab$, по которой течет ток I в направлении оси x_1 ; dx_1 — длина элементарного излучателя ($dx_1 \ll \lambda$), dx_2 — его ширина.

В плоскости $x_2 O x_3$ ($\varphi = 0$) поле элементарного излучателя согласно (2-5-11) определяется выражением

$$d\vec{E}(\theta) = jE_S \frac{dx_1 dx_2}{\lambda r} e^{-j\beta(r - x_2 \sin \theta)}, \quad (2-5-13)$$

а поле всего поверхностного электрического излучателя:

$$\begin{aligned}
 E(\theta) &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\dot{E}(\theta) = j E_S \frac{S}{\lambda r_0} \frac{e^{-j\beta r_0}}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-jx_2 \sin \theta} dx_2 = \\
 &= j E_S \left(\frac{S}{\lambda r_0} \right) \frac{\sin \left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta \right)} e^{-j\beta r_0} \quad (2-5-14)
 \end{aligned}$$

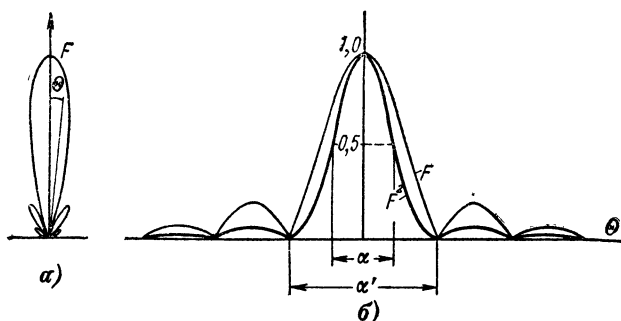


Рис. 2-22. Диаграмма излучения плоского синфазного излучателя в полярных (а) и декартовых (б) координатах.

или в виде относительной величины

$$F(\theta) = \left| \frac{\dot{E}(\theta)}{E_S \frac{S}{\lambda r_0}} \right| = \left| \frac{\sin \left(\frac{a\pi}{\lambda} \sin \theta \right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta} \right|. \quad (2-5-15)$$

Для плоскости $x_1 O x_3$ ($\theta=0$), исходя из (2-5-11), аналогичным путем можно получить:

$$F(\varphi) = \left| \frac{\sin \left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin \varphi} \cos \varphi \right|. \quad (2-5-15a)$$

Поле поверхностного магнитного излучателя можно определить с помощью формулы (2-5-14), используя принцип двойственности (см. стр. 90, 91).

Если поверхность плоского излучателя ограничена окружностью диаметром D , то формула (2-5-15) принимает вид:

$$F(\theta) = \left| \frac{2J_1\left(\pi \frac{D}{\lambda} \sin \theta\right)}{\pi \frac{D}{\lambda} \sin \theta} \right|. \quad (2-5-156)$$

Здесь $J_1\left(\pi \frac{D}{\lambda} \sin \theta\right)$ — функция Бесселя.

Если θ и φ мало отличаются от нуля (что часто имеет место в практических условиях), то

$$\left. \begin{aligned} F(\theta) &\approx \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{a}{\lambda} \theta\right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \theta} \right|; \\ F(\varphi) &\approx \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{b}{\lambda} \varphi\right)}{\pi \frac{b}{\lambda} \varphi} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (2-5-16)$$

Диаграмма излучения плоского эквивидного поверхностного излучателя (рис. 2-22), кроме главного, содержит боковые лепестки. Угол, в пределах которого находится главный лепесток,

$$\alpha' \approx 2 \frac{\lambda}{a}. \quad (2-5-17)$$

Угловой шириной диаграммы излучения в вертикальной и соответственно горизонтальной плоскостях условно называются углы

$$\alpha \approx 0,9 \frac{\lambda}{a}; \quad \beta \approx 0,9 \frac{\lambda}{b}, \quad (2-5-17a)$$

при которых $F^2(\theta) = 1/2$ и $F^2(\varphi) = 1/2$.

Коэффициент направленного действия плоского эквивидного поверхностного излучателя на основании (2-3-19) определяется выражением

$$G(\theta, \varphi) = \frac{4\pi ab}{\lambda^2} F^2(\theta, \varphi).$$

Для главного направления ($\theta=0, \varphi=0$)

$$G_0 = \frac{4\pi ab}{\lambda^2} = 4\pi \frac{S}{\lambda^2}, \quad (2-5-18)$$

а с учетом выражений (2-5-17a)

$$G_0 \approx \frac{4\pi}{\alpha\beta}. \quad (2-5-18a)$$

Разумеется, диаграмма $F^2(\theta, \varphi)$ является также диаграммой $G(\theta, \varphi)$.

В технике сверхвысоких частот (СВЧ) в качестве антенн широко используют параболические отражатели (рис. 2-23, а) и рупоры (рис. 2-23, б), с помощью которых сравнительно просто формируется эквивалентная плоскость. Такие антенны называются антеннами поверхностного типа. К их числу относится и диэлектри-

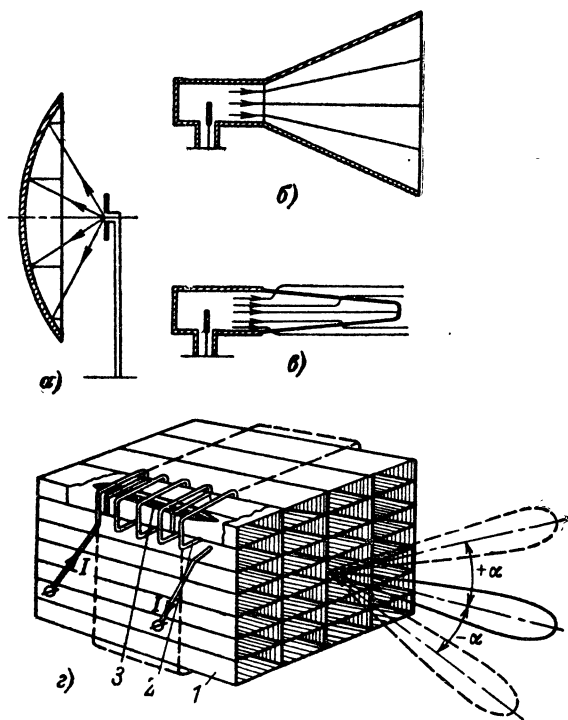


Рис. 2-23. Поверхностные антенны.

а — параболическая; б — рупорная; в — диэлектрическая; г — фазированная решетка. 1 — волновод; 2 — управляющая обмотка; 3 — феррит.

ческая антенна (рис. 2-23, в), состоящая из диэлектрического стержня, на поверхности которого возбуждается электромагнитное поле. Амплитуды и фазы этого поля распределяются по поверхности так, что диаграмма излучения имеет максимум в направлении оси стержня (см. также § 3-5).

Сложной поверхностной антенной является фазированная решетка (рис. 2-23, г), которая позволяет осуществлять электронное сканирование, т. е. перемещение максимума диаграммы излучения с большой угловой скоростью. Излучающая поверхность такой антенны образуется отдельными излучателями, например, открытыми

концами волноводов. Все волноводы возбуждаются одним источником, а фазы поля в каждом волноводе изменяются с помощью фазовращателей, представляющих волновод частично или полностью заполненным анизотропной средой: феррит, плазма и т. п. (см. § 2-9). Под действием управляющего магнитного поля происходит поворот фазовой плоскости и, следовательно, диаграммы излучения,

2-6. УРАВНЕНИЯ РАДИОПЕРЕДАЧИ И РАДИОСИГНАЛИЗАЦИИ

Плотность потока мощности излучения плоского поверхностного излучателя в главном направлении на основании (2-3-16) выражается формулой

$$P_0 = \frac{G_0 P_0 \text{ из}}{4\pi r^2}. \quad (2-6-1)$$

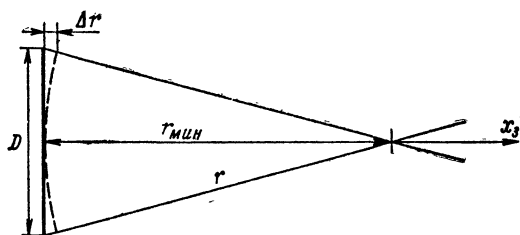


Рис. 2-24. К определению границы дальней зоны плоского эквифазного излучателя.

Формула эта действительна лишь при условии (2-5-8), т. е. для дальней зоны, где можно пренебречь разностью хода лучей от всех точек эквифазной плоскости (рис. 2-24). Если S — площадь излучающей поверхности, то приближенно разностью хода лучей с учетом длины волны можно пренебречь при условии

$$r \geq r_{\text{мин}} = \frac{S}{\lambda}. \quad (2-6-2)$$

Область $r < r_{\text{мин}}$ называется ближней зоной (зоной Френеля). Напряженность поля, создаваемого плоским эквифазным излучателем, в этой области определяется с учетом разности хода лучей, т. е. выражением

$$\dot{E}(r) \approx j \frac{E_S}{\lambda} \int_S \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})}{r} e^{-j\beta r} dS, \quad (2-6-3)$$

которое представляет общую формулировку принципа Гюйгенса для плоского эквифазного излучателя и вытекает из формулы Кирхгофа

$$\dot{E}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial E_S}{\partial n} \frac{e^{-j\beta r}}{r} - E_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right] dS, \quad (2-6-4)$$

при условии однородности E_s на излучающей поверхности S и $\pi \gg \lambda$. Формула (2-6-4) является решением уравнения Гельмгольца (Д-6-11), определяющим монохроматическое поле внутри конечного объема, на ограничивающей поверхности которого задано поле E_s . При нахождении этого решения используется формула Грина (Д-3-33).

Согласно выражению (2-6-3) напряженность поля на расстояниях $r < r_{\text{мин}}$ изменяется в пределах интерференционных максимумов и минимумов, и на расстояниях $r > r_{\text{мин}}$ монотонно убывает по закону $1/r$ (рис. 2-25).

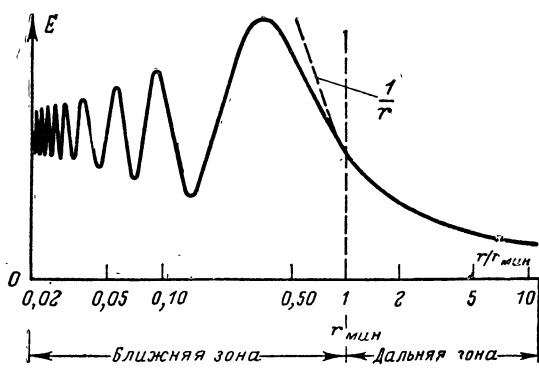


Рис. 2-25. Поле плоского эквивалентного излучателя.

На основе (2-6-1) и (2-5-18) можно написать уравнение радиопередачи энергии

$$P_{02} = P_{01} \left(\frac{S_1}{\lambda r} \right)^2, \quad (2-6-5)$$

в котором P_{02} — плотность потока мощности в месте приема электромагнитной энергии; P_{01} — то же на поверхности излучателя; S_1 — площадь плоского поверхностного эквивалентного излучателя с однородным распределением амплитуд поля.

Величина плотности потока мощности ограничена электрической прочностью среды, в которой находится излучатель. Если этой средой является атмосфера при нормальном давлении с электрической прочностью около 30 кВ/см (при частотах, меньших 10^{11} гц), то в соответствии с (1-9-4) допустимая плотность потока мощности на поверхности излучателя, если принять трехкратный запас прочности, не может быть более

$$P_{0 \text{ доп}} \leq \frac{E_{\text{доп}}^2}{120 \pi} \approx 130 \text{ квт/см}^2. \quad (2-6-6)$$

При подстановке условия (2-6-2) в (2-6-5) видно, что при использовании плоского эквивалентного поверхностного излучателя $P_{02} < P_{01}$, т. е. плотность потока мощности в дальней зоне всегда

меньше, чем у излучателя. Чтобы получить

$$P_{02} > P_{01} \quad (2-6-7)$$

на больших расстояниях (значительно превышающих размеры излучателя), согласно (2-6-5) необходимо, чтобы $r < S_1/\lambda$, что противоречит условию (2-6-2), выведенному для плоского эквифазного излучателя. По этой причине для радиопередачи энергии, при которой P_{02} превышало бы P_{01} , необходим другой излучатель, в частности

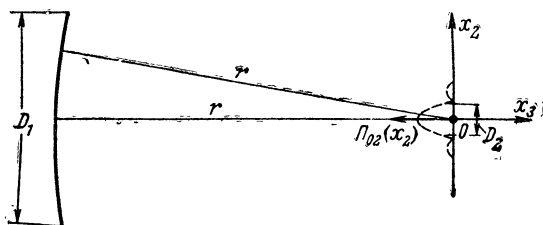


Рис. 2-26. Сферический синфазный излучатель.

сферический эквифазный излучатель (рис. 2-26), у которого поверхность равных фаз совпадает с внутренней поверхностью сферы. Такой излучатель может быть, в частности, создан с помощью «плоской» линзы (рис. 2-27), на которую падает плоская волна и которая

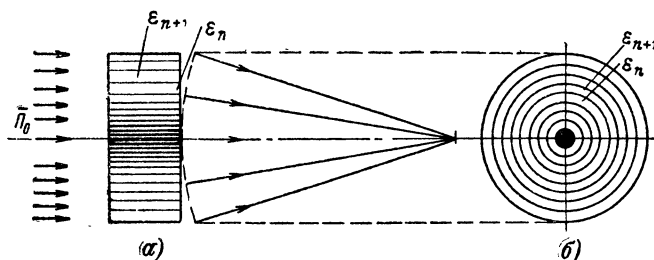


Рис. 2-27. Плоская линза, образующая сферический эквифазный излучатель.

а — продольный разрез; б — поперечный разрез. Диэлектрический коэффициент n -го слоя больше, чем у $(n+1)$ -го;

$$\epsilon_n > \epsilon_{n+1}.$$

состоит из концентрических слоев, фазовая скорость в которых уменьшается с увеличением их радиуса. Сферический излучатель позволяет сконцентрировать (сфокусировать) передаваемую энергию на большом расстоянии.

Величина P_{02} по формуле (2-6-5) в случае сферического излучателя определяется в его центре (рис. 2-26). Распределение плотности потока мощности в плоскости $0x_1x_2$, проходящей через центр, определяется выражением

$$P_{02}(\rho) \approx P_{02} \left[\frac{2J_1' \left(\pi \frac{D_1}{\lambda} \frac{\rho}{r} \right)}{\pi \frac{D_1}{\lambda} \frac{\rho}{r}} \right]^2 \approx P_{02} \left[\frac{\sin \left(\pi \frac{D_1}{\lambda} \frac{\rho}{r} \right)}{\pi \frac{D_1}{\lambda} \frac{\rho}{r}} \right]^2, \quad (2-6-8)$$

где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Называя «эффективной площадкой» площадку диаметром D_2 , на которой $P_{02}(\rho) \geq 0,85 P_{02}$, на основе (2-6-8) находим, что для условия (2-6-7) должно быть выполнено

$$\frac{D_1}{\lambda} \approx \frac{0,2 r}{D_2}, \quad (2-6-9)$$

т. е. при заданных значениях r и D_2 заданным является и отношение D_1/λ . Отсюда вытекает необходимость применения весьма коротких волн для радиопередачи энергии на большие расстояния при условии $P_{02} > P_{01}$.

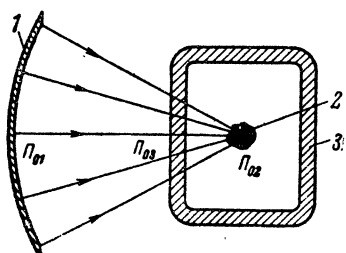


Рис. 2-28. Схема технологического нагрева.

1 — сферический излучатель; 2 — обрабатываемое тело; 3 — камера с инертной средой;
 $P_{01} < P_{03} < P_{02}$.

Концентрация электромагнитной энергии с помощью сферического излучателя имеет большое практическое значение, так как позволяет, в частности, осуществлять нагрев или другую технологическую обработку изделия в изолированном объеме (рис. 2-28). При этом электромагнитная энергия практически полностью может быть сосредоточена только в обрабатываемом предмете, а через изолирующую его от внешней среды стенку поток энергии может проходить с малой плотностью и, следовательно, практически без потерь. Сфе-

рический излучатель позволяет также сконцентрировать энергию в небольшой избранной части объема вещества, не воздействуя на остальную часть вещества.

Подчеркнем, что выражения (2-5-17), (2-6-5), найденные нами для эквивалентного поверхностного излучателя, неприменимы к некогерентным колебаниям (§ 2-1), в частности, к случаю, когда в фокусе параболического отражателя помещена электрическая дуга, лампа накаливания и т. п. Для примера укажем, что угловая ширина луча дугового прожектора на несколько порядков больше определяемой по формуле (2-5-17).

Следует также отметить, что выведенные для монохроматического поля выражения (2-5-15) и (2-6-5) пригодны и для поля, состоящего из спектра частот, если разность хода лучей различных точек излучателя много меньше «интервала когерентности» Δl_k , т. е. длины, на которой получается допустимый сдвиг фаз $\Delta \varphi$ колебаний, входящий в эффективную полосу спектра Δf . На основании

этого максимальный размер поверхностного излучателя (апертуры) определяется выражением

$$D \ll \Delta l_k = c \Delta t_k, \quad (2-6-10)$$

в котором Δt_k — время когерентности, определяемое соотношением (2-1-2а). На основании выражений (2-6-10) и (2-1-2а) имеем:

$$D \ll \frac{\lambda}{\Delta f/f} = \frac{c}{\Delta f}. \quad (2-6-11)$$

Из последнего выражения следует, что допустимый размер апертуры поверхностного излучателя при увеличении полосы спектра частот должен быть уменьшен.

Из выражения (1-6-19) вытекает, что электромагнитный излучатель испытывает реактивное давление, которое создает тяговое усилие, среднее значение которого определяется выражением

$$S w_0 = \frac{S P_0}{c} = \frac{P_{0 \text{ из}}}{c},$$

в котором $P_{0 \text{ из}}$ — излучаемая мощность. Под действием этого усилия излучающее тело приобретает в свободном пространстве определяемую из уравнения количества движения скорость

$$v_0 = \frac{P_{0 \text{ из}}}{m_0 c} t. \quad (2-6-12)$$

Здесь m_0 — масса покоя излучающего тела.

С учетом релятивистской поправки на изменение массы

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}. \quad (2-6-13)$$

Р а д и о п р и е м — поглощение из окружающего пространства электромагнитной энергии, несущей сигнал. Найдем величину P_{02} мощности на входе радиоприемника, т. е. в сопротивлении R_2 , включенном в середину электрического диполя, помещенного в поле излучения (рис. 2-29). Согласно теореме взаимности (2-1-19) в каждом проводнике, который может создавать под действием протекающего в нем тока I поле E , возникает такой же наведенный ток, если он помещается в такое же поле E , создаваемое другим излучателем. Это означает, что каждая антенна может служить как для радиопередачи, так и для радиоприема и что диаграмма направленности антенны при работе на передачу и на прием одна и та же. Действующее значение тока в сопротивлении R_2 , возникающего под действием поля E бегущей волны, определится формулой

$$I = \frac{E_d I \sin \vartheta}{R_{\text{из}} + R_2},$$

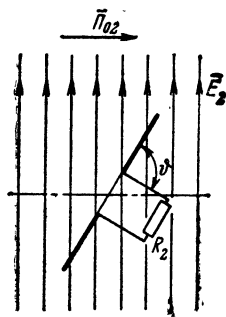


Рис. 2-29. «Нагруженный» диполь в поле бегущей волны.

где $R_{из}$ — сопротивление излучения электрического диполя (2-3-15а). Мощность в сопротивлении R_2 определяется формулой

$$P_{02} = I^2 R_2 = \left(\frac{E_d I \sin \vartheta}{R_{из} + R_2} \right)^2 R_2. \quad (2-6-14)$$

В электросигнализации обычно стремятся получить максимальную мощность сигнала, для чего согласовывают нагрузку, т. е.

$$R_2 = R_{из} \quad (2-6-15)$$

Подставляя это выражение и выражение (2-3-15а) в (2-6-14), находим, что при согласованной нагрузке мощность сигнала при радиоприеме будет:

$$P_{02} = A_2 P_{02}, \quad (2-6-16)$$

в этой формуле

$$A_2 = \left(\frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) \frac{\lambda^2}{4\pi}.$$

С учетом выражения (2-3-17) в общем случае

$$A_2 = G \frac{\lambda^2}{4\pi}. \quad (2-6-17)$$

Величина A_2 называется эффективной поглощающей площадью антенны; она позволяет определить мощность на входе радиоприемника при согласованной нагрузке по величине P_{02} поля бегущей волны.

На основании выражения (2-6-17) и с учетом (2-4-6) эффективная поглощающая площадь полуволнового вибратора в главном направлении

$$A_2 \approx 1,64 \lambda^2 / 4\pi \approx 0,5 I^2.$$

Эффективная поглощающая площадь плоского эквивалентного излучателя в главном направлении с учетом зависимости (2-5-18)

$$A_2 = ab = S,$$

т. е. равна его геометрической площади. У параболической и рупорной антенн эффективная поглощающая площадь приблизительно равна площади их апертур (излучающих отверстий).

Так как в приемном диполе протекает наведенный ток, то диполь излучает сам (вторичное излучение). При согласованной нагрузке мощность вторичного излучения $P_{02} = I^2 R_{из} = I^2 R_2$ и, следовательно, приемный диполь (антенна) поглощает из окружающего пространства мощность $2P_{02}$; одна ее половина поступает на вход радиоприемника, а другая теряется на вторичное излучение. Если диполь не нагружен ($R_2 = 0$), то наведенный в нем ток в 2 раза больше, чем при согласованной нагрузке, а мощность вторичного излучения в 4 раза больше. В силу этого «ненагруженный» диполь дает больший радиолокационный (отраженный) сигнал, чем «нагруженный».

На основе выражений (2-6-16) и (2-3-16) можно вывести уравнение радиосвязи, определяющее максимальную дальность радиосвязи. Обращаясь к рис. 2-30, можно написать:

$$P_{02} = A_2 \Pi_{02} = \left(G_{02} \frac{\lambda^2}{4\pi} \right) \left(\frac{G_{01} P_{01}}{4\pi r^2} \right).$$

Решая это уравнение, относительно $r=r_{\text{макс}}$, находим уравнение радиосвязи

$$r_{\text{макс}} \leq \sqrt{G_{01} G_{02}} \frac{\lambda}{4\pi} \sqrt{\frac{P_{01}}{P_{02\text{мин}}}}. \quad (2-6-18)$$

Здесь $P_{02\text{мин}}$ — минимальная мощность на входе приемника, при которой на его выходе получается минимально различимый сигнал. Эта величина называется чувствительностью радиоприемника.

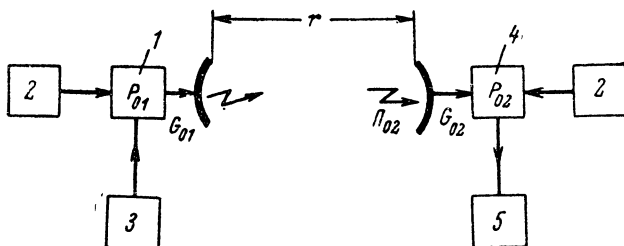


Рис. 2-30. Схема радиосвязи.

1 — радиопередатчик; 2 — источники энергии; 3 — источник сигнала;
4 — радиоприемник; 5 — индикатор.



Рис. 2-31. Схема радиолокации.

1 — импульсный радиопередатчик; 2 — переключатель антенны; 3 — антенна; 4 — радиоприемник; 5 — индикатор; 6 — цель.

Для вывода уравнения радиолокации мощность вторичного излучения от цели в направлении на источник первичного излучения можно выразить в виде

$$P_{0 \text{ из. втор}} = G' A_2' \Pi_{01} = \sigma_{\text{ц}} \Pi_{01}. \quad (2-6-19)$$

Здесь G' — коэффициент направленности цели в направлении на радиолокатор; A_2' — эффективная поглощающая площадь «цели»;

P_{01} — плотность первичного погока мощности, который падает на цель; величина

$$\sigma_{\text{ц}} = G' A_2' \text{ [м]} \quad (2-6-20)$$

называется эквивалентной отражающей площадью цели и является ее радиолокационной характеристикой. Для целей простой геометрической формы (§ 3-1) она определяется расчетным путем, а в случае сложной формы — экспериментально.

Обращаясь к рис. 2-31, на основании (2-6-16), (2-6-17) и (2-6-19) можно написать формулу для определения мощности сигнала на входе приемника радиолокатора при согласованной нагрузке

$$P_{02} = A_2 P_{01} = \left(G_0 \frac{\lambda^2}{4\pi} \right) \left(\frac{\sigma_{\text{ц}} P_{01}}{4\pi r^2} \right) = \left(G_0 \frac{\lambda^2}{4\pi} \right) \left(\frac{\sigma_{\text{ц}}}{4\pi r^2} \right) \left(\frac{G_0 P_{01}}{4\pi r^2} \right).$$

Отсюда получаем уравнение радиолокации

$$r_{\text{макс}} \leq \sqrt[4]{\frac{G_0^2 \lambda^2 \sigma_{\text{ц}} P_{01}}{(4\pi)^3 P_{02 \text{ мин}}}}, \quad (2-6-21)$$

определяющее максимальную дальность обнаружения цели в свободном пространстве.

2-7. ПЛОСКАЯ ОДНОРОДНАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим распространение плоской однородной волны в неподвижной однородной изотропной среде, лишенной сторонних источников, параметры которой (σ , μ_a , ϵ_a) не зависят от частоты.

Плоской однородной волной называется поле, у которого поверхность равных фаз (фронт волны) и поверхность равных амплитуд являются плоскими и параллельными. Если эти плоскости совпадают с плоскостью $x_1 0 x_2$, то, очевидно, условием плоской однородной волны является

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = 0. \quad (2-7-1)$$

Приближенно можно считать, что такое поле создается на участке поверхности, линейные размеры которого малы по сравнению с расстоянием r до источника поля, расположенного на нормали к этой поверхности.

Имея в виду условия (2-7-1) будем исследовать поле плоской волны как функцию $f(x_3, t)$. При этом волновое уравнение (2-1-10) для монохроматического поля переписывается в виде

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_m}{\partial x_3^2} + k^2 \dot{E}_m = 0. \quad (2-7-2)$$

Решением этого уравнения, имеющим физический смысл согласно (Д-6-19а), является выражение

$$\dot{E} = E_m e^{-jkx_3} = E_m e^{-\alpha x_3} e^{-j\beta x_3} \quad (2-7-3)$$

или

$$E = E_m e^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3). \quad (2-7-4)$$

Здесь E_m — амплитуда напряженности поля, заданная при $x_3=0$. Амплитуда поля убывает с ростом x_3 в результате поглощения электромагнитной энергии данной средой. Поверхность одинаковых фаз перемещается согласно (2-1-12) со скоростью $v_\phi = \omega/\beta$.

Если наблюдатель перемещается с плоскостью выбранных постоянных значений фаз, то эта фаза будет для него постоянной, не зависящей от времени. Неподвижный наблюдатель отметит изменение фазы со временем, так как мимо него будут проходить плоскости с разными значениями фазы.

Поскольку уравнения (2-1-10) для \dot{E} и \dot{H} одинаковы, то, очевидно, аналогично (2-7-3) и (2-7-4)

$$\dot{H}_m = H_m e^{-j(kx_3 + \varphi)}$$

или

$$H = H_m e^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3 - \varphi), \quad (2-7-5)$$

где φ — возможный сдвиг по фазе магнитного поля относительно электрического.

Переписывая уравнения (2-1-5) в декартовой системе координат с учетом условия (2-7-1), $\frac{\partial}{\partial x_3} = -jk$ и решений (2-7-3) и (2-7-5), найдем:

$$\left. \begin{aligned} k\dot{H}_2 &= \tilde{\omega}\epsilon_a \dot{E}_1, & -k\dot{E}_2 &= \tilde{\omega}\mu_a \dot{H}_1, \\ -k\dot{H}_1 &= \tilde{\omega}\epsilon_a \dot{E}_2, & k\dot{E}_1 &= \tilde{\omega}\mu_a \dot{H}_2, \\ \dot{E}_3 &= 0, & \dot{H}_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-6)$$

Уравнения (2-7-6) согласно (Д-3-2) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} -[\mathbf{k}\dot{\mathbf{H}}] &= \omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}; \\ [\mathbf{k}\dot{\mathbf{E}}] &= \omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-6a)$$

Из этих уравнений следует, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} плоской однородной волны не имеют продольных составляющих (составляющих в направлении распространения), лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения и взаимно перпендикулярны.

Для среды без потерь ($\alpha=0$) выражения (2-7-3) и (2-7-4) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{e}_1 E_m e^{j(\omega t - \beta x_3)}; \\ \mathbf{E} &= \mathbf{e}_1 E_m \cos(\omega t - \beta x_3). \end{aligned} \right\} \quad (2-7-7)$$

Из этих выражений видно, что амплитуда напряженности поля остается неизменной, а фазовая скорость определяется формулой (2-1-12a).

Подставляя во второе уравнение системы (2-1-5) выражение (2-7-7), находим вектор напряженности магнитного поля плоской волны в среде без потерь

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\text{rot } \dot{\mathbf{E}}}{-j\omega\mu_a} = \frac{1}{j\omega\mu_a} \left(\mathbf{e}_2 \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial x_3} \right)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{e}_2 H_m e^{j(\omega t - \beta x_3)}; \\ \mathbf{H} &= \mathbf{e}_2 H_m \cos(\omega t - \beta x_3), \end{aligned} \right\} \quad (2-7-8)$$

где

$$H_m = \frac{E_m}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}} = \frac{E_m}{Z_0} \quad (2-7-9)$$

и $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ — волновое сопротивление среды без потерь [см. выражение (1-9-3)].

На основании выражений (2-2-3), (2-7-7) и (2-7-8) среднее значение вектора Пойнтинга плоской волны для среды без потерь

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{e}_3 \frac{E_m H_m}{2}$$

или

$$P_0 = e_3 E_d H_d = e_3 \frac{E_d^2}{Z_0} = e_3 H_d^2 Z_0. \quad (2-7-10)$$

Мгновенные значения плотности энергии поля плоской волны согласно выражениям (1-6-9) — (1-6-11)

$$w = \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}$$

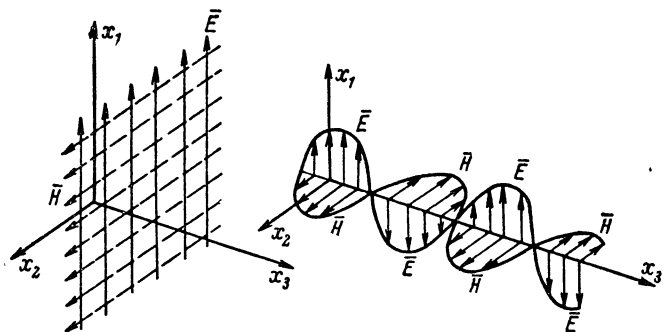


Рис. 2-32. Плоская волна в среде без потерь.

или с учетом (2-7-7) — (2-7-9)

$$w = \epsilon_a E_m^2 \cos^2(\omega t - \beta x_3) = \mu_a H_m^2 \cos^2(\omega t - \beta x_3). \quad (2-7-11)$$

Среднее значение плотности энергии

$$w_0 = \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \epsilon_a E_d^2 = \mu_a H_d^2. \quad (2-7-11a)$$

Скорость распространения энергии плоской волны в среде без потерь на основании выражений (1-6-12), (2-7-9), (2-7-10) и (2-7-11a) равна фазовой скорости. Очевидно, скорости эти остаются равными и для немонхромического поля, если среда не обладает потерями.

Структуру поля плоской волны в среде без потерь иллюстрирует рис. 2-32.

В среде с потерями ($\alpha \neq 0$) β и α определяются через ϵ'_a , μ'_a и ϵ''_a , μ''_a .

Обращаясь к (2-1-6) и (2-1-11), можно написать:

$$k = \omega \sqrt{(\epsilon'_a - j\epsilon''_a)(\mu'_a - j\mu''_a)} = \beta - j\alpha$$

или

$$(\mu'_a \epsilon'_a - \epsilon''_a \mu''_a) - j(\epsilon''_a \mu'_a + \mu''_a \epsilon'_a) = \left(\frac{\beta}{\omega} - j\frac{\alpha}{\omega}\right)^2.$$

Приравнявая действительные и мнимые части и решая систему двух уравнений, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\omega \sqrt{\mu'_a \epsilon'_a}}{\sqrt{2}} \times \\ &\times \sqrt{\sqrt{(1 - \operatorname{tg} \delta_s \operatorname{tg} \delta_m)^2 + (\operatorname{tg} \delta_s + \operatorname{tg} \delta_m)^2} + (1 - \operatorname{tg} \delta_s \operatorname{tg} \delta_m)}; \\ \alpha &= \frac{\omega \sqrt{\mu'_a \epsilon'_a}}{\sqrt{2}} \times \\ &\times \sqrt{\sqrt{(1 - \operatorname{tg} \delta_s \operatorname{tg} \delta_m)^2 + (\operatorname{tg} \delta_s + \operatorname{tg} \delta_m)^2} - (1 - \operatorname{tg} \delta_s \operatorname{tg} \delta_m)}. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-12)$$

Подставляя эти значения в формулу (2-1-12), найдем фазовую скорость

$$v_\phi = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\mu \epsilon}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{(1 - \operatorname{tg} \delta_s \operatorname{tg} \delta_m)^2 + (\operatorname{tg} \delta_s + \operatorname{tg} \delta_m)^2} + (1 - \operatorname{tg} \delta_s \operatorname{tg} \delta_m)}}. \quad (2-7-13)$$

Следовательно, в среде с потерями фазовая скорость зависит от частоты (обладает дисперсией), поскольку $\operatorname{tg} \delta_s$ и $\operatorname{tg} \delta_m$ с увеличением частоты, как правило, возрастают. Среда, в которой имеет место дисперсия, называется диспергирующей.

Подставляя (2-7-3) во второе уравнение системы (2-1-5), найдем вектор \mathbf{H} для среды с потерями

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}}{-j \omega \tilde{\mu}_a} = \mathbf{e}_2 \frac{k}{\omega \tilde{\mu}_a} E_m e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x_s)}.$$

Так как

$$\frac{\omega \tilde{\mu}_a}{k} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu'_a - j\mu''_a}{\epsilon'_a - j\epsilon''_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{tg} \delta_m}{1 - j \operatorname{tg} \delta_s}}$$

или

$$Z_0 = |Z_0| e^{j\varphi}, \quad (2-7-14)$$

где

$$|Z_0| = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{\frac{\cos \delta_a}{\cos \delta_m}} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\delta_a - \delta_m}{2},$$

получаем:

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_2 H_m e^{-\alpha x_3} e^{j(\omega t - \beta x_3 - \varphi)} \quad (2-7-15)$$

или

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_2 H_m e^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3 - \varphi). \quad (2-7-15a)$$

Здесь

$$H_m = \frac{E_m}{|Z_0|}. \quad (2-7-16)$$

Структуру поля плоской волны в среде с потерями иллюстрирует рис. 2-33.

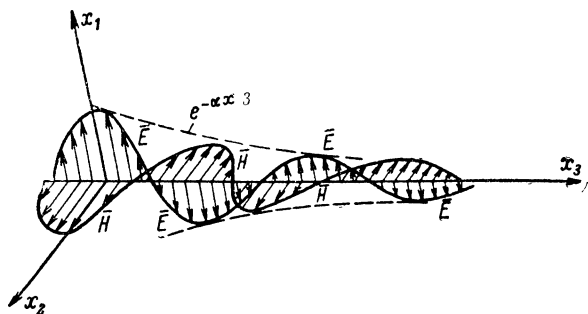


Рис. 2-33. Плоская волна в среде с потерями.

На основе выражений (2-7-4) и (2-7-15a) среднее значение вектора Пойнтинга

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{e}_3 E_d H_d \cos \varphi e^{-2\alpha x_3}. \quad (2-7-17)$$

Из последнего выражения следует, что плотность потока мощности в среде с потерями меньше, чем в среде без потерь при тех же начальных значениях E_m и H_m , и с возрастанием x_3 уменьшается по экспоненте быстрее, чем напряженности поля.

На основе выражений (1-6-9)—(1-6-11), (2-7-14) и (2-7-16) среднее значение плотности энергии

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T w dT = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos \delta_M}{\cos \delta_\Theta} \right) \epsilon_a E_d^2 e^{-2\alpha x_3} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos \delta_\Theta}{\cos \delta_M} \right) \mu_a H_d^2 e^{-2\alpha x_3}. \quad (2-7-18)
 \end{aligned}$$

На основе последних двух выражений можно найти, что в среде с потерями скорость распространения энергии монохроматического поля равна фазовой скорости и также обладает дисперсией.

В случае немонохроматического поля, например, при передаче сигнала, всегда состоящего из спектра частот, энергия поля распределяется между волнами, входящими в группу волн, соответствующих данному спектру частот. Поскольку в диспергирующей среде фазовая скорость и скорость распространения энергии зависят от частоты, амплитудный и фазовый спектры сигнала при его распространении изменятся и, следовательно, происходит искажение сигнала. В связи с этим понятие «скорость распространения энергии немонохроматического поля» заменяется понятием «групповая скорость», которая является скоростью движения максимума энергии группы волн, составляющих спектр передаваемого сигнала.

Представляя немонохроматическое поле

$$\dot{E} = \sum_{k=0}^n E_k e^{j(\omega_k t - \beta_k x_3)}, \quad (2-7-19)$$

являющееся радиосигналом (§ Д-8), относительная полуса частот которого сравнительно невелика ($2\Delta\omega \ll \omega_n$), в виде

$$\dot{E} = e^{j(\omega_n t - \beta_n x_3)} \sum_{k=0}^n E_k e^{j(\omega_k - \omega_n) \left[t - \frac{x_3}{v_{гр}} \right]}, \quad (2-7-20)$$

получаем выражение для групповой скорости

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{d\beta} \approx \frac{\omega_1 - \omega_n}{\beta_1 - \beta_n} \approx \frac{\omega_2 - \omega_n}{\beta_2 - \beta_n} \approx \frac{\omega_3 - \omega_n}{\beta_3 - \beta_n} \approx \dots \quad (2-7-21)$$

Здесь β_n — фазовая постоянная на несущей частоте ω_n . Так как второй сомножитель в выражении (2-7-20), медленно изменяющийся во времени по сравнению с пер-

вым, представляет собой огибающую сигнала (§ Д-8), то, очевидно, при условии $2\Delta\omega \ll \omega_n$ групповая скорость определяет скорость перемещения огибающей сигнала. В этом случае групповая скорость есть скорость распространения сигнала, так как передаваемая информация содержится в огибающей амплитуд высокочастотных колебаний.

Зависимость между фазовой и групповой скоростью определяется соотношением

$$\frac{dv_\phi}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{\beta} \right) = \frac{\beta - \omega \frac{d\beta}{d\omega}}{\beta^2} = \frac{\beta - \frac{\omega}{v_{gp}}}{\beta^2}$$

или

$$v_{gp} = \frac{v_\phi}{1 - \frac{\omega}{v_\phi} \frac{dv_\phi}{d\omega}}. \quad (2-7-22)$$

Затухание энергии электромагнитного поля при распространении волны на расстояние $x_3 = l$ определяется отношением

$$\frac{P_0(x_3 = 0)}{P_0(x_3 = l)} = e^{2\alpha l}.$$

Логарифм этого отношения называется логарифмическим затуханием (оно выражается в неперах или в децибелах)

$$\left. \begin{aligned} L[\eta\eta] &= \ln e^{2\alpha l} = 2\alpha l; \\ L[\partial\delta] &= 10 \lg e^{2\alpha l} = 8,69 \alpha l. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-23)$$

Если затухание оценивается по изменению напряженности поля (**E** или **H**), то следует пользоваться формулами

$$\left. \begin{aligned} L[\eta\eta] &= \alpha l, \\ L[\partial\delta] &= 20 \lg e^{\alpha l} = 8,69 \alpha l. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-23a)$$

Среду, у которой при данной частоте $\operatorname{tg} \delta_m = 0$, а

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} = \operatorname{tg} \delta_s \ll 1, \quad (2-7-23б)$$

будем называть плохо проводящей или диэлектрической. Если же

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} = \operatorname{tg} \delta_s \gg 1, \quad (2-7-23в)$$

то такую среду будем называть хорошо проводящей или проводниковой. Из условий (2-7-23б) и (2-7-23в) следует, что в диэлектрической среде токи смещения больше, чем токи проводимости, а в проводниковой среде наоборот. Параметры некоторых реальных сред при различных частотах даны в табл. 2-1. Из этой таблицы следует, что металлы являются хорошо проводящей средой при всех частотах, при которых среду можно считать «сплошной» (см. § 1-2). На основе формулы (2-7-12) с учетом (2-7-23б) и (2-1-23в) для диэлектрической среды

$$\left. \begin{aligned} k &\approx \beta \approx \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \left(1 + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta_a + \dots \right) \approx \\ &\approx \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} ; \\ \alpha &\approx \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \frac{\operatorname{tg} \delta_a}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2-7-24)$$

и для проводниковой среды

$$\left. \begin{aligned} \beta &\approx \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{2}} ; \\ k &= \beta \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} . \end{aligned} \right\} \quad (2-7-24a)$$

Таблица 2-1

Параметры некоторых сред

Среда	σ , <i>сим/м</i>	ϵ	Диэлектрическая среда $\operatorname{tg} \delta_a < 0,1$ при λ	Полупроводниковая среда $\operatorname{tg} \delta_a \approx 1$ при λ	Проводниковая среда $\operatorname{tg} \delta_a > 10$ при λ
Сухая почва	10^{-3}	4	< 6 м	≈ 60 м	> 600 м
Морская вода	4	80	< 3 см	≈ 30 см	> 3 м
Металл (медь)	$0,5 \cdot 10^8$	—	$< 10^{-6}$ мкм	$\approx 10^{-4}$ мкм	$> 10^{-3}$ мкм

Если найденные значения (2-7-24) подставить в выражения (2-7-3) и (2-7-15), то получим выражения напряженности поля **Е** и **Н** для диэлектрических сред, приближенно совпадающие с выражениями (2-7-7) и (2-7-8).

В проводниковых же средах имеет место большое затухание поля, малая скорость распространения и, сле-

довательно, малая длина волны. Действительно, обозначив через

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \sigma}} \quad (2-7-25)$$

расстояние, на котором амплитуда поля уменьшается в $e=2,72$ раза (рис. 2-34), найдем, что параметры поля

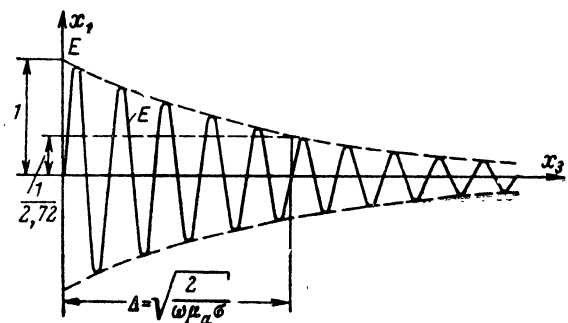


Рис. 2-34. Поле плоской волны в проводящей среде.

в проводниковой среде (в металле) определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{e}_1 E_m e^{-\frac{x_3}{\Delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x_3}{\Delta}\right); \\ \mathbf{H} &= \mathbf{e}_2 H_m e^{-\frac{x_3}{\Delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x_3}{\Delta} - 45^\circ\right); \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\sigma}} e^{j45^\circ}; \\ v_\phi &= \omega \Delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \sigma}}; \\ \lambda &= 2\pi \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-26)$$

Согласно выражению (2-7-17)

$$\Pi_0 = \frac{E_d^2}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\sigma}}} e^{-2 \frac{x_3}{\Delta}} =$$

$$= \frac{H_1^2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\sigma}} e^{-2 \frac{x_3}{\Delta}}. \quad (2-7-27)$$

В табл. 2-2 в качестве примера приведены характеристики плоской электромагнитной волны в меди при частотах $5 \cdot 10^9$ и 50 гц, что соответствует длинам волн

Таблица 2-2

Характеристики плоской электромагнитной волны в медном проводнике		
$f, \text{ гц}$	50	$5 \cdot 10^9$
$\Delta [\text{см}]$	1	10^{-4}
$v_\Phi [\text{см/сек}]$	300	$3 \cdot 10^6$
$\lambda [\text{см}]$	6	$6 \cdot 10^{-4}$

6 см и 6 000 км в вакууме. Из этой таблицы видно, что при сверхвысокой частоте (5×10^9 гц) электромагнитная энергия в меди весьма быстро затухает, уменьшаясь в 2,72 раза на пути длиной всего в 1 мкм.

Распространение плоской электромагнитной волны в движущейся среде без потерь.

Электромагнитное поле в среде без потерь ($\alpha=0$) согласно (2-7-6а) описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} -[\bar{\beta} \dot{\mathbf{H}}] &= \omega \dot{\mathbf{D}}; \\ [\bar{\beta} \dot{\mathbf{E}}] &= \omega \dot{\mathbf{B}}. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-28)$$

Полагая $u/c \ll 1$ (случай «медленно» движущейся среды) и подставляя (2-7-28) в (1-8-25) и (1-8-26), получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= -\frac{1}{\omega \epsilon_a} [\bar{\beta} \dot{\mathbf{H}}] - \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{1}{\mu \epsilon}\right) [\mathbf{u} [\bar{\beta} \dot{\mathbf{E}}]]; \\ \dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\omega \mu_a} [\bar{\beta} \dot{\mathbf{E}}] - \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{1}{\mu \epsilon}\right) [\mathbf{u} [\bar{\beta} \dot{\mathbf{H}}]]. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-29)$$

Эта система уравнений показывает, что в изотропной среде без потерь, движущейся со скоростью \mathbf{u} и не совпадающей с направлением распространения волны, проявляется анизотропия. Действительно, векторы \mathbf{D} и \mathbf{B} перпендикулярны к $\bar{\beta}$, а векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют составляющие вдоль $\bar{\beta}$, что следует из наличия вторых членов в правых частях уравнений (2-7-29).

Если векторы $\bar{\beta}$ и \mathbf{u} параллельны, то анизотропия отсутствует, однако скорость распространения электромаг-

нитного поля в движущейся среде отличается от скорости в неподвижной. Действительно, полагая $\mathbf{u} = \mathbf{e}_3 u$, $\underline{\beta} = \mathbf{e}_3 \beta$ и учитывая, что в этом случае

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{\beta} &= v_{\phi}; \\ \dot{\mathbf{H}} &= \mathbf{e}_2 \dot{H}; \\ \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{e}_1 \dot{E}; \\ \frac{\dot{H}}{\dot{E}} &= \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}}, \end{aligned} \right\} \quad (2-7-30)$$

из уравнений (2-7-29) находим:

$$v_{\phi} E = -\frac{1}{\epsilon_a} H + \left(1 - \frac{1}{\mu\epsilon}\right) u E$$

или

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} + \left(1 - \frac{1}{\mu\epsilon}\right) u < c. \quad (2-7-31)$$

При $\mu\epsilon \gg 1$ формула (2-7-31) принимает вид:

$$u_{\phi} \approx \left(\frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} + u\right) \ll c, \quad (2-7-32)$$

т.е. электромагнитное поле практически полностью увлекается «медленно» движущейся более плотной в электромагнитном смысле средой (с большой проницаемостью). Разумеется, фазовая скорость в такой среде меньше скорости света в вакууме.

Электромагнитная волна в неподвижной изотропной ионизированной среде (плазме). Примером такой среды являются верхние ионизированные слои земной атмосферы при пренебрежении постоянным магнитным полем Земли.

Под действием переменного электромагнитного поля свободные электроны приходят в колебательное движение с частотой, равной частоте поля (вынужденные колебания), накапливая кинетическую энергию. В то же время имеют место соударения свободных электронов с нейтральными атомами или ионами и потеря накопленной энергии на тормозное излучение (§ 1-9). В результате этих явлений происходит отражение и поглощение энергии электромагнитных волн; проницаемость

и электрическая проводимость плазмы становятся зависимыми от частоты поля.

Отметим, что энергия электромагнитного поля поглощается только при соударениях электронов с ионами или нейтральными молекулами. При соударении электрона с электроном энергия поля не поглощается, так как при этом импульс движения не изменяется.

Будем полагать, что длина волны много больше, чем расстояние между частицами ионизированной атмосферы, т. е. имеется весьма большое число их в объеме, много меньшем λ^3 . Будем также полагать, что токи, возникающие в ионизированной атмосфере под действием электромагнитного поля, есть результат движения только электронов, т. е. будем пренебрегать малой относительной подвижностью ионов благодаря их большой массе по сравнению с массой электронов. Иначе говоря, будем полагать, что $\frac{n}{m} \gg \frac{N}{M}$, где n — число электронов в единице объема; m — масса электрона; N — число ионов любого знака в единице объема; M — масса иона.

Уравнение движения электрона под действием электромагнитного поля можно написать в виде

$$m \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} + m \dot{v} \nu = e \dot{E}_m e^{j\omega t}. \quad (2-7-33)$$

Здесь член $m \dot{v} \nu$, в котором ν — число эффективных соударений электрона в 1 сек, выражает силу трения, поскольку при каждом соударении электрон передает молекуле импульс движения $m \dot{v}$.

При отсутствии соударений ($\nu=0$) уравнение (2-7-33) удовлетворяет законам квантовой механики, если $\hbar \omega \ll \ll mc^2$. Неравенство это имеет место при длине волны

$$\lambda \gg \frac{2\pi \hbar}{mc} \approx 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ см},$$

где \hbar — постоянная Планка.

В отношении тормозного излучения, определяемого величиной силы трения, уравнение (2-7-33) справедливо, если $\lambda \gg \frac{\hbar c}{kT} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, где k — постоянная Больцмана и T — температура [°K]. Следовательно, уравнение (2-7-33) действительно для всего диапазона радио-

волн и волн далекой области инфракрасного излучения. Решением этого уравнения является

$$\dot{v} = \dot{v} e^{j\omega t},$$

откуда

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = j\omega \dot{v}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (2-7-33), находим:

$$m(j\omega + \nu) \dot{v} = e E_m e^{j\omega t}$$

или

$$\dot{v}_m = \frac{e \dot{E}_m}{m(j\omega + \nu)} = \frac{e \dot{E}_m}{m(\omega^2 + \nu^2)} \nu - j \frac{e \dot{E}_m \omega}{m(\omega^2 + \nu^2)}. \quad (2-7-34)$$

Так как комплексная амплитуда электронного тока в ионизированном газе $\dot{J}_{me} = en \dot{v}_m$, а комплексная амплитуда плотности тока смещения $\dot{J}_{ms} = j\omega \epsilon_0 \dot{E}_m$, то в пространстве, заполненном ионизированным газом, плотность общего тока

$$\dot{J}_m = en \dot{v}_m + j\omega \epsilon_0 \dot{E}_m; \quad (2-7-35)$$

с учетом выражения (2-7-34)

$$\dot{J}_m = j\omega \epsilon_0 \left\{ \left[1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] - j \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \frac{\nu}{\omega} \right\} \dot{E}_m = \tilde{\epsilon}_a \dot{E}_m. \quad (2-7-35a)$$

Здесь

$$\omega_p = e \sqrt{\frac{n}{m\epsilon_0}} \quad (2-7-36)$$

— собственная частота плазмы, т. е. частота, с которой колеблются электроны около своего равновесного положения после прекращения действия вынуждающей силы;

$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a$ — комплексная диэлектрическая проницаемость ионизированного газа.

На основании (2-1-6) из выражения (2-7-35a) имеем

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \nu^2)}; \quad \sigma = \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \nu \epsilon_0. \quad (2-7-37)$$

Следовательно, диэлектрическая проницаемость и проводимость плазмы зависят от частоты, т. е. обладают дисперсией.

Полагая, что у плазмы независимо от концентрации $\mu=1$, находим постоянную распространения (2-1-11)

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \tilde{\epsilon}_a} = \beta - j\alpha,$$

где аналогично (2-7-12)

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}\right)^2} + \frac{\epsilon}{2}}; \\ \alpha &= \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}\right)^2} - \frac{\epsilon}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-38)$$

При малом числе соударений ($\nu \ll \omega$) проводимость плазмы $\sigma \rightarrow 0$. В этих случаях

$$\left. \begin{aligned} \beta &\approx \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\epsilon}; \\ \alpha &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-7-38a)$$

и фазовая скорость электромагнитной волны в плазме определяется формулой

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} > c. \quad (2-7-39)$$

При «малой» концентрации плазмы, определяемой на основе (2-7-36) условием

$$\omega > \omega_p, \quad (2-7-40)$$

из (2-7-37) следует, что $1 > \epsilon > 0$ и согласно (2-3-38) электромагнитная волна распространяется в плазме, как и в диэлектрике без потерь.

Подчеркнем, что, поскольку $\epsilon < 1$, фазовая скорость в ионизированной среде больше, чем в вакууме, тогда как в диэлектрической среде она меньше. Однако групповая скорость в ионизированной среде меньше фазовой. Действительно, на основании выражения (2-7-21) с подстановкой (2-7-38), (2-7-37) при $\nu \ll \omega$ имеем:

$$v_{\text{гp}} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{d\beta/d\omega} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left(\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \right)} = c \sqrt{\varepsilon}. \quad (2-7-41)$$

Среднее геометрическое $v_{\text{ф}}$ и $v_{\text{гp}}$ равно:

$$\sqrt{v_{\text{ф}} v_{\text{гp}}} = c.$$

При «большой» концентрации, определяемой условием

$$\omega < \omega_p, \quad (2-7-40a)$$

из выражения (2-7-37) получается, что $\varepsilon < 0$ и формулы (2-7-38a) и (2-7-39) дают

$$\beta = \pm j \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{|\varepsilon|}; \quad (2-7-42)$$

при этом физический смысл имеет только знак минус. Это означает, что в плазме с «большой» концентрацией электромагнитное поле распространяться не может. Действительно, подставляя в уравнение (2-7-4) значение β из (2-7-42) и $\alpha = 0$, получаем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}_m e^{-j\beta x_3} = \mathbf{E}_m e^{-\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{|\varepsilon|} x_3}.$$

В частности, при $|\varepsilon| = 1$ поле в такой ионизированной среде убывает в e раз на пути, равном небольшой доле длины волны $x_3 \approx \lambda/2\pi$.

При условии (2-7-40a) электромагнитная волна, падающая на поверхность ионизированной среды, отражается подобно тому, как это имеет место в случае поверхности проводящей среды (см. § 3-2).

Так как собственная частота плазмы (2-7-36) зависит от концентрации электронов, то в зависимости от частоты поля одна и та же плазма ведет себя либо как диэлектрическая, либо как проводящая среда.

2-8. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Поляризация определяется законом изменений направления и величины электрического вектора электромагнитной волны.

Плоскость, проведенная через вектор напряженности электрического поля и вектор, совпадающий с направлением распространения поля, называется плоскостью поляризации или плоскостью E (рис. 2-35). Угол θ , образуемый этой плоскостью с горизонтальной плоскостью, называется углом поляризации.

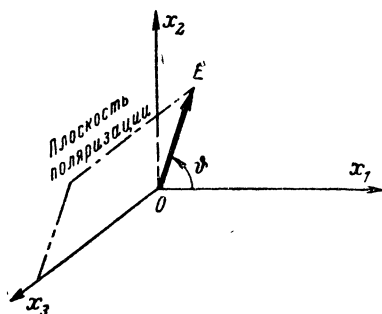


Рис. 2-35. Плоскость поляризации.

Если вектор E , изменяясь по абсолютной величине, не изменяет своего направления в пространстве, то поляризация называется линейной. При этом угол поляризации во времени и пространстве не изменяется.

Плоскость, проведенная через вектор H и вектор, совпадающий с направлением распространения поля, называется плоскостью H .

В общем случае напряженность электрического поля линейно поляризованной волны в среде без потерь ($k = \beta$) определяется выражением

$$E = E_m \cos(\omega t - \beta x_3)$$

или

$$\dot{E} = E_m e^{j(\omega t - \beta x_3)}.$$

Всякая волна, вектор E которой составляет произвольный угол с горизонтальной плоскостью, может быть разложена на составляющие горизонтальной и вертикальной поляризации

$$E = e_1 E_1 + e_2 E_2 \quad (2-8-1)$$

или в символическом виде

$$\dot{E} = e_1 E_{m1} e^{j(\omega t - \beta x_3)} + e_2 E_{m2} e^{j(\omega t - \beta x_3)}, \quad (2-8-1a)$$

где

$$E_1 = E_m \cos \vartheta \cos (\omega t - \beta x_3) = E_{m1} \cos (\omega t - \beta x_3);$$

$$E_2 = E_m \sin \vartheta \cos (\omega t - \beta x_3) = E_{m2} \cos (\omega t - \beta x_3).$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой горизонтально поляризованную волну с амплитудой E_{m1} , второе — вертикально поляризованную волну с амплитудой E_{m2} . Обе волны совпадают по фазе во времени.

В любой момент времени вектор \mathbf{E} лежит в плоскости, составляющей с горизонтальной плоскостью угол

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{E_2}{E_1} = \operatorname{arctg} \frac{E_{m2}}{E_{m1}}, \quad (2-8-2)$$

при этом

$$E_m = \sqrt{E_{m1}^2 + E_{m2}^2}. \quad (2-8-3)$$

Суперпозиция двух волн горизонтальной и вертикальной линейной поляризации, совпадающих по фазе во времени, дает линейно поляризованную волну.

Рассмотрим суперпозицию двух волн с линейной горизонтальной и вертикальной поляризацией, с разными амплитудами, сдвинутыми по фазе во времени на угол φ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_{m1} \cos (\omega t - \beta x_3) + \mathbf{e}_2 E_{m2} \cos (\omega t - \beta x_3 - \varphi). \quad (2-8-4)$$

При $\varphi=0$ получаем линейно поляризованную волну [см. выражение (2-8-1)]. Если же $\varphi = +\pi/2$ и $E_{m1} = E_{m2} = E_m$, то

$$\mathbf{E} = E_m [\mathbf{e}_1 \cos (\omega t - \beta x_3) + \mathbf{e}_2 \sin (\omega t - \beta x_3)]. \quad (2-8-5)$$

Последнее выражение представляет собой уравнение окружности в параметрической форме. Угол

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{E_2}{E_1} = (\omega t - \beta x_3) \quad (2-8-6)$$

изменяется во времени и пространстве. При фиксированном значении x_3 вектор \mathbf{E} вращается около оси x_3 с угловой скоростью ω . При $\varphi = +\pi/2$ вращение осуществляется в направлении от оси x_1 к оси x_2 , т. е. по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления распространения волны (рис. 2-36, а). Такое вращение называется левым.

При $\varphi = -\pi/2$ и $E_{m1} = E_{m2} = E_m$

$$\mathbf{E} = E_m [\mathbf{e}_1 \cos (\omega t - \beta x_3) - \mathbf{e}_2 \sin (\omega t - \beta x_3)] \quad (2-8-7)$$

и вектор \mathbf{E} вращается против часовой стрелки (правое вращение, рис. 2-36, б).

Если вектор \mathbf{E} в фиксированной плоскости, перпендикулярной направлению распространения, вращается

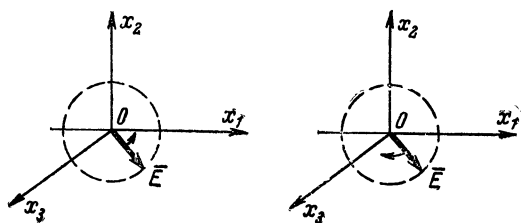


Рис. 2-36. Левая (а) и правая (б) круговая поляризация.

с угловой частотой ω и его величина остается постоянной, то поляризация называется круговой. Конек вектора \mathbf{E} в этом случае

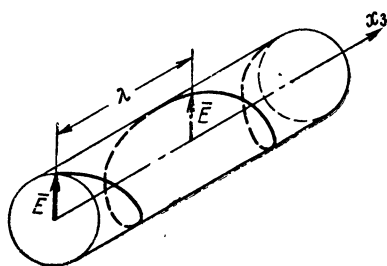


Рис. 2-37. Кривая, образуемая концом вектора \mathbf{E} при круговой поляризации.

описывает окружность. С течением времени волна перемещается в направлении оси x_3 и вследствие этого конек вектора \mathbf{E} описывает винтовую линию, расположенную на поверхности цилиндра (рис. 2-37), причем «шаг винта» равен длине волны.

В символическом виде уравнение (2-8-5)

для левой круговой поляризации можно записать так:

$$\dot{E}_{m1} = +j\dot{E}_{m2},$$

где множитель $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ указывает на сдвиг по фазе во времени на $T/4$. Для правой круговой поляризации

$$\dot{E}_{m1} = -j\dot{E}_{m2}.$$

Если в уравнении (2-8-4) угол $\varphi = \pm\pi/2$ и $E_{m1} \neq E_{m2}$, то

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_{m1} \cos(\omega t - \beta x_3) \pm \mathbf{e}_2 E_{m2} \sin(\omega t - \beta x_3). \quad (2-8-8)$$

Последнее выражение представляет собой уравнение эллипса в параметрической форме. Вектор \mathbf{E} вращается в фиксированной плоскости, перпендикулярной направлению распространения поля, изменяя свое абсолютное значение так, что конец его описывает эллипс. Такая

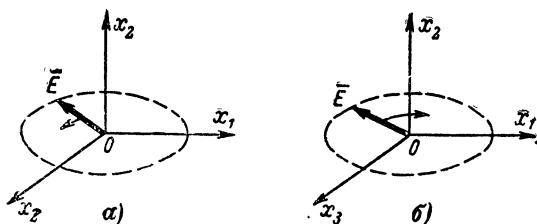


Рис. 2-38. Левая (а) и правая (б) эллиптическая поляризация.

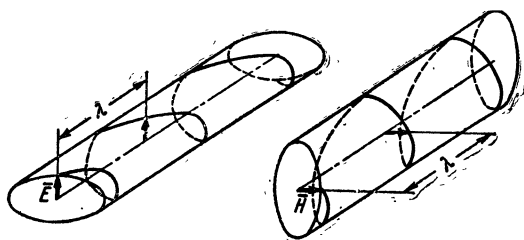


Рис. 2-39. Поверхности, образуемые концами векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} при эллиптической поляризации.

поляризация называется эллиптической; в зависимости от направления вращения она может быть правой или левой (рис. 2-38). Вектор \mathbf{E} описывает в пространстве винтовую линию, расположенную на эллиптическом цилиндре. Конец вектора \mathbf{H} также описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, но большая ось его повернута на угол $\pi/2$ относительно большей оси эллипса, описываемого вектором \mathbf{E} (рис. 2-39).

В общем случае при любом ϕ выражение (2-8-4) представляет волну эллиптической поляризации, причем эллипс может быть ориентирован в плоскости $0x_1x_2$ произвольным образом.

Всякая линейно поляризованная волна может быть разложена на две кругополяризованных волны с противоположным направлением вращения и одинаковыми амплитудами, равными половине амплитуды линейно поляризованной волны.

Так, например, горизонтально поляризованная волна, вектор напряженности электрического поля которой $E = e_1 E_m \cos(\omega t - \beta x_3)$, может быть представлена выражением

$$E = \frac{E_m}{2} [e_1 \cos(\omega t - \beta x_3) + e_2 \sin(\omega t - \beta x_3)] + \\ + \frac{E_m}{2} [e_1 \cos(\omega t - \beta x_3) - e_2 \sin(\omega t - \beta x_3)].$$

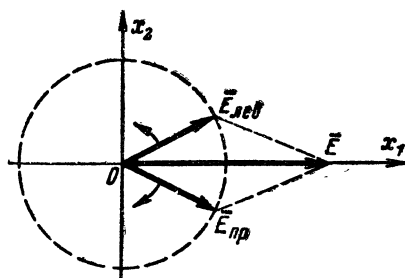


Рис. 2-40. Представление волны линейной поляризации как суммы двух волн круговой поляризации.

Первый член в правой части этого выражения представляет левую кругополяризованную волну; второй—правую. Это разложение поясняется на рис. 2-40.

Любую линейно поляризованную волну с углом поляризации θ можно представить в виде суммы двух волн с левой и правой круговой поляризацией.

Для этого следует представить такую волну как сумму двух волн с горизонтальной и вертикальной линейной поляризацией, а затем каждую из них рассматривать как суперпозицию двух кругополяризованных, вектор E которых вращается в противоположные стороны.

Любую эллиптически поляризованную волну можно представить как сумму линейно поляризованной и кругополяризованной волн. Пусть в выражение (2-8-8) $E_{m1} > E_{m2}$ и $E_{m1} - E_{m2} = E'_m$; тогда это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$E = e_1 E'_m \cos(\omega t - \beta x_3) + [e_1 E_{m2} \cos(\omega t - \beta x_3) \pm \\ \pm e_2 E_{m2} \sin(\omega t - \beta x_3)]. \quad (2-8-9)$$

Первый член полученного уравнения представляет линейно поляризованную, а выражение в квадратных скобках — кругополяризованную волну.

Эллиптически поляризованную волну можно представить и как сумму двух кругополяризованных волн с разными амплитудами и направлением вращения, так как линейно поляризованную волну можно разложить на две кругополяризованных.

2-9. МОНОХРОМАТИЧЕСКАЯ ВОЛНА В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим распространение плоской однородной электромагнитной волны в ферромагнитной анизотропной среде с малыми потерями. Примером такой среды может служить феррит, имеющий широкое применение в технике. Его химическая формула MeFe_2O_3 (Me — двухвалентный металл, например, никель, марганец, магний и т. п.). Феррит обладает малой проводимостью (10^{-4} — 10^{-6} *сим/м*), и, следовательно, поглощение электромагнитной энергии в нем невелико; относительная диэлектрическая проницаемость феррита 10—20.

В постоянном магнитном поле феррит является анизотропной средой с магнитной проницаемостью, выражаемой тензором второго ранга. Вид этого тензора определяется гироскопическими свойствами электронов, которые, вращаясь вокруг своей оси, обладают механическим и магнитным моментами (спинами).

Магнитные свойства ферромагнетиков, к которым относится и феррит, связаны с наличием нескомпенсированных спинов электронов внешних оболочек в ионах металла. Магнитный момент $\vec{p}_{\text{ме}}$ и момент количества движения электрона \vec{K}_e [кг·м²/сек] противоположны по

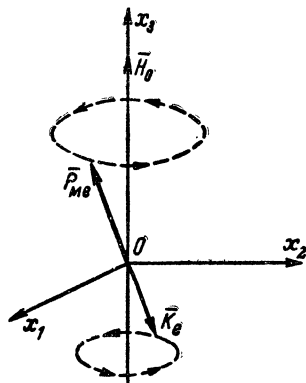


Рис. 2-41. Прецессия спина в постоянном магнитном поле.

направлению и связаны зависимостью

$$\mathbf{p}_{me} = -\gamma \mathbf{K}_e, \quad (2-9-1)$$

где

$$\gamma = \frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ к/кг} \quad (2-9-1a)$$

— отношение заряда к массе электрона, называемое гиромагнитным отношением.

В отсутствие внешних полей механический и магнитный моменты постоянны во времени. Под действием постоянного магнитного поля \mathbf{H}_0 спины стремятся ориентироваться по направлению приложенного поля. Однако наличие механического момента делает систему подобной гироскопу, и она начинает прецессировать относительно оси, совпадающей с направлением постоянного магнитного поля (рис. 2-41). Под действием вращающего момента $[\mathbf{p}_{me} \mathbf{H}_0]$ изменяется механический момент \mathbf{K}_e , производная которого по времени равна вращающему моменту

$$\frac{d\mathbf{K}_e}{dt} = \mu_0 [\mathbf{p}_{me} \mathbf{H}_0].$$

Подставляя сюда (2-9-1), получаем выражение

$$\frac{d\mathbf{p}_{me}}{dt} = -\gamma \mu_0 [\mathbf{p}_{me} \mathbf{H}_0]. \quad (2-9-2)$$

Это соотношение остается верным и при усреднении по единице объема. На основе (1-2-15) получим выражение для производной намагниченности феррита

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mu_0 [\mathbf{M} \mathbf{H}_0], \quad (2-9-3)$$

где \mathbf{M} — вектор намагниченности среды [см. выражение (1-2-13)].

Пусть в неограниченной ферромагнитной среде имеется электромагнитное поле, описываемое уравнением

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_3 H_0 + \dot{\mathbf{H}}_m e^{j\omega t}, \quad (2-9-4)$$

т. е. помимо переменного имеется еще постоянное поле $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_3 H_0$.

При напряженности поля, определяемой выражением (2-9-4), намагниченность данной среды $\mathbf{M} = \mathbf{e}_3 M_0 + \mathbf{M}_m e^{j\omega t}$.

В случае намагничивания до насыщения, т. е. когда $H_0 \geq H_s$ и $M_0 = M_s$, имеем:

$$\dot{\mathbf{M}} = e_s M_s + \mathbf{M}_m e^{i\omega t}. \quad (2-9-5)$$

Подставляя это выражение в (2-9-3) и учитывая, что в случае слабых переменных полей $H_m \ll H_0$, $M_m \ll M_s$, а произведениями $M_{mi} H_{mk}$ в пределах линейной теории можно пренебречь, находим составляющие вектора \mathbf{M}_m по осям прямоугольной системы координат

$$\left. \begin{aligned} M_{m1} &= - \left(\frac{\gamma^2 \mu_0^2 M_s H_0}{\omega^2 - \mu_0^2 \gamma^2 H_0^2} \right) \dot{H}_{m1} - \\ &\quad - j \left(\frac{\omega \mu_0 \gamma M_s}{\omega^2 - \mu_0^2 \gamma^2 H_0^2} \right) \dot{H}_{m2}; \\ \dot{M}_{m2} &= j \left(\frac{\omega \mu_0 \gamma M_s}{\omega^2 - \mu_0^2 \gamma^2 H_0^2} \right) \dot{H}_{m1} - \\ &\quad - \left(\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_s H_0}{\omega^2 - \mu_0^2 \gamma^2 H_0^2} \right) \dot{H}_{m2}; \\ \dot{M}_{m3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-6)$$

Из этих выражений видно, что составляющая слабого переменного поля \dot{H}_{m3} не вызывает переменной намагниченности, а составляющие \dot{H}_{m1} и \dot{H}_{m2} создают переменную намагниченность, при этом не только параллельную, но и перпендикулярную соответствующей составляющей поля.

Система выражений (2-9-6) может быть записана в тензорной форме

$$M_i = \chi_{ik} H_k,$$

где

$$\chi_{ik} = \left\| \begin{array}{ccc} \chi & -j\chi_a & 0 \\ j\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

— тензор магнитной восприимчивости, самосопряженный или эрмитов тензор [см. выражение (Д-2-11)], в котором

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \frac{\omega_H \omega_M}{\omega_H^2 - \omega^2}; \\ \chi_\alpha &= \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-7)$$

Здесь, в свою очередь

$$\omega_H = \gamma \mu_0 H_0. \quad (2-9-8)$$

— угловая частота прецессии и

$$\omega_M = \gamma \mu_0 M_s. \quad (2-9-8a)$$

Согласно выражению (Д-2-22) переменная составляющая магнитной индукции

$$B_i = \mu_0 (H_i + M_i) = (\delta_{ik} + \chi_{ik}) \mu_0 H_k = \mu_0 \mu_{ik} H_k,$$

где δ_{ik} — единичный тензор второго ранга [см. формулу (Д-2-21)]. При этом тензор магнитной проницаемости μ_{ik} имеет вид:

$$\mu_{ik} = \begin{vmatrix} 1+\chi & -j\chi_\alpha & 0 \\ j\chi_\alpha & 1+\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & -j\mu_\alpha & 0 \\ j\mu_\alpha & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{vmatrix}, \quad (2-9-9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu &= 1 - \frac{\omega_H \omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}; \\ \mu_\alpha &= \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}; \\ \mu_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2-9-10)$$

— компоненты тензора магнитной проницаемости.

Значения μ и μ_α имеют резонансный характер; при $\omega = \omega_H$, т. е. когда частота поля равна частоте прецессии электронов, они обращаются в бесконечность, поскольку мы пренебрегали потерями. При учете потерь эти компоненты выражаются в виде: $\tilde{\mu} = \mu' - j\mu''$ и $\tilde{\mu}_\alpha = \mu'_\alpha - j\mu''_\alpha$.

При резонансе действительные части μ' и μ'_α имеют конечное значение (рис. 2-42). Мнимые части, характери-

зующие потери, также имеют резонансный характер (рис. 2-43). Максимальные значения μ'' и μ''_α получаются при частоте поля, равной частоте прецессии электронов ω_H , определяемой величиной H_0 [см. выражение (2-9-8)]. Это явление называется ферромагнитным резонансом.

Согласно квантовомеханическим представлениям возможны лишь две ориентации спина относительно направления \mathbf{H}_0 — параллельная и антипараллельная. Этим ориентациям соответствуют различные уровни

энергии: нижний по полю и верхний против поля. Разность этих уровней определяется выражением

$$\Delta W = 2\mu_0 p_{me} H_0.$$

Для перехода с нижнего уровня на верхний необходима энергия кванта, которая равна $\hbar f_{\text{пер}} = 2\mu_0 p_{me} H_0$ [дж]. Учитывая, что магнитный момент спина электрона p_{me} равен магнетону Бора, т. е. $p_{me} = \mu_B = \frac{\hbar}{4\pi} \frac{e}{m}$, угловая частота, при которой происходит поглощение энергии, равна угловой частоте прецессии

$$\omega_{\text{пер}} = \frac{\mu_0 e}{m} H_0 = \mu_0 \gamma H_0 = \omega_H.$$

С точки зрения классической механики ферромагнитный резонанс можно представить следующим образом. Как уже было показано, при насыщении переменное поле в направлении подмагничивания (в направлении вектора \mathbf{H}_0) не изменяет намагниченности среды. Поэтому достаточно рассмотреть действие поля на спин в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{H}_0 . Для простоты предположим, что переменное магнитное поле в этой плоскости имеет круговую поляризацию, направление вращения которой совпадает с направлением прецессии, а частота поля равна частоте прецессии спина. В системе координат, вращающейся вместе с вектором \mathbf{p}_{me} , поле

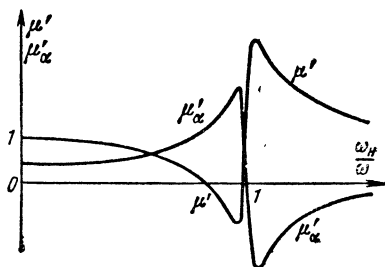


Рис. 2-42. Изменение компонент μ' и μ_α ферромагнитной анизотропной среды.

вектора \mathbf{H} можно рассматривать как постоянное. Под действием этого поля увеличивается угол между векторами $\mathbf{p}_{\text{ме}}$ и \mathbf{H}_0 . Если частота переменного магнитного поля и частота прецессии совпадают, то с течением времени этот угол может достигнуть большой величины.

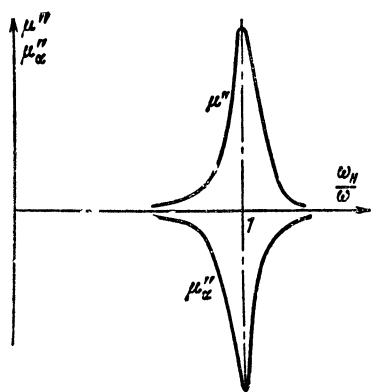


Рис. 2-43 Изменение компонент μ'' и μ''_{α} ферромагнитной анизотропной среды.

Если же частоты ω и ω_H не совпадают, что фазы прецессионного вращения и вращения поля быстро расходятся и угол уменьшается. Если переменное магнитное поле имеет линейную поляризацию, то его можно представить как сумму двух полей левой и правой круговой поляризации. При этом поле, направление вращения которого совпадает с направлением прецессии, увеличивает угол между $\mathbf{p}_{\text{ме}}$ и \mathbf{H}_0 , а поле, вращающееся в противо-

положную сторону, в среднем не изменяет его, так как в течение одной половины периода оно увеличивает угол, а в течение другой настолько же уменьшает его.

Для среды без потерь, обладающей тензорной магнитной проницаемостью, уравнение (2-1-5) записывается в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_i \dot{H}_m &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{mi}; \\ \text{rot}_i \dot{E}_m &= -j\omega \mu_0 \mu_{ik} \dot{H}_{mk} \end{aligned} \right\} \quad (2-9-11)$$

или в развернутом виде с учетом тензора (2-9-9)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_3} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m1}; \\ \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m2}; \\ \frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_2} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m3}; \end{aligned} \right\} \quad (2-9-12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_{m3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_3} &= -j\omega\mu_0 (\dot{\mu}_1 \dot{H}_{m1} - j\mu_\alpha \dot{H}_{m2}); \\ \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{E}_{m3}}{\partial x_1} &= -j\omega\mu_0 (j\mu_\alpha \dot{H}_{m1} + \mu \dot{H}_{m2}); \\ \frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_2} &= -j\omega\mu_0 \mu_3 \dot{H}_{m3}. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-13)$$

Рассмотрим случай продольного подмагничивания, т. е. когда вектор постоянного поля $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_3 H_0$ совпадает с направлением распространения электромагнитной волны. При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m &= \mathbf{H}_m e^{-jkx_3}; \\ \dot{\mathbf{E}}_m &= \mathbf{E}_m e^{-jkx_3}; \\ \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} &= 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = -jk \end{aligned}$$

и уравнения Максвелла (2-9-12) и (2-9-13) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} k\dot{H}_{m2} &= \omega\epsilon_a \dot{E}_{m1}; \\ k\dot{H}_{m1} &= -\omega\epsilon_a \dot{E}_{m2}; \\ \dot{E}_{m3} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2-9-14)$$

$$\left. \begin{aligned} kE_{m2} &= -\omega\mu_0 (\mu \dot{H}_{m1} - j\mu_\alpha \dot{H}_{m2}); \\ k\dot{E}_{m1} &= \omega\mu_0 (j\mu_\alpha \dot{H}_{m1} + \mu \dot{H}_{m2}); \\ \dot{H}_{m3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-15)$$

Подставляя значения E_{m1} и \dot{E}_{m2} , найденные из системы уравнений (2-9-14), в (2-9-15), получим:

$$\left. \begin{aligned} (k^2 - \omega^2\epsilon_a \mu_a) \dot{H}_{m1} + j\omega^2\epsilon_a \mu_a \mu_\alpha \dot{H}_{m2} &= 0; \\ j\omega^2\epsilon_a \mu_0 \mu_\alpha \dot{H}_{m1} - (k^2 - \omega^2\epsilon_a \mu_a) \dot{H}_{m2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-16)$$

Последние два уравнения образуют систему однородных уравнений, которая имеет решения, отличные от

нуля, при условии, если определитель этой системы равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} (k^2 - \omega^2 \varepsilon_a \mu_a) & j\omega^2 \varepsilon_a \mu_0 \mu_a \\ j\omega^2 \varepsilon_a \mu_0 \mu_a & - (k^2 - \omega^2 \varepsilon_a \mu_a) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $(k^2 - \omega^2 \varepsilon_a \mu_a) = \pm \omega^2 \varepsilon_a \mu_0 \mu_a$ или

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 (\mu \pm \mu_a)}. \quad (2-9-17)$$

Следовательно, постоянная распространения k имеет два значения, т. е. в направлении x_3 распространяются две волны с разными постоянными распространения и разными составляющими поля.

Так как система (2-9-16) однородная, то магнитное поле этих волн \mathbf{H} можно определить только по направлению. Подставляя (2-9-17) в уравнения (2-9-16), находим, что $\dot{H}_{m1} = \pm j\dot{H}_{m2}$, т. е. составляющие H_1 и H_2 равны по амплитуде, но сдвинуты по фазе на $\pm 90^\circ$. Следовательно, обе волны имеют магнитное поле круговой поляризации противоположного направления, разные постоянные распространения

$$\left. \begin{aligned} k^+ &= \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 (\mu + \mu_a)}; \\ k^- &= \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 (\mu - \mu_a)} \end{aligned} \right\} \quad (2-9-17a)$$

и разные фазовые скорости

$$\left. \begin{aligned} v_\phi^+ &= \frac{\omega}{k^+} = \frac{1}{\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 (\mu + \mu_a)}}; \\ v_\phi^- &= \frac{\omega}{k^-} = \frac{1}{\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 (\mu - \mu_a)}}. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-18)$$

Из выражений (2-9-17a) и (2-9-18) следует, что для волн с круговой поляризацией, распространяющихся в продольнонамагниченной ферритовой среде, эффективные скалярные параметры среды

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\text{эф}}^+ &= \mu + \mu_a; \\ \mu_{\text{эф}}^- &= \mu - \mu_a. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-19)$$

Волновое сопротивление среды для каждой из этих волн также различно

$$\left. \begin{aligned} Z_0^+ &= \sqrt{\frac{\mu_0(\mu + \mu_a)}{e_a}}; \\ Z_0^- &= \sqrt{\frac{\mu_0(\mu - \mu_a)}{e_a}}. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-20)$$

Здесь k^+ , v_ϕ^+ , Z_0^+ характеризуют правую кругополяризованную; а k^- , v_ϕ^- , Z_0^- — левую кругополяризованную волну. Направление вращения вектора \mathbf{H} кругополяризованных волн определяется относительно направления постоянного магнитного поля. Таким образом плоская волна линейной поляризации, распространяющаяся вдоль направления магнитного поля, распадается на две волны круговой поляризации с одинаковыми амплитудами векторов напряженности магнитного поля. При распространении фазовый сдвиг между этими волнами будет увеличиваться, поскольку $v_\phi^+ \neq v_\phi^-$, а вектор \mathbf{H} суммарной линейно поляризованной волны поворачиваться.

Напряженность магнитного поля волны с левой круговой поляризацией может быть выражена на основании (2-8-5) и (2-8-7) в символическом виде так:

$$\dot{\mathbf{H}}_m^- = H_m (\mathbf{e}_1 e^{-jk^-x_3} - j\mathbf{e}_2 e^{-jk^-x_3}),$$

а волны с правой круговой поляризацией

$$\dot{\mathbf{H}}_m^+ = H_m (\mathbf{e}_1 e^{-jk^+x_3} + j\mathbf{e}_2 e^{-jk^+x_3}).$$

Суперпозиция этих волн дает волну, магнитное поле которой имеет линейную поляризацию и описывается выражением

$$\dot{\mathbf{H}}_m = H_m \{ (e^{-jk^+x_3} + e^{-jk^-x_3}) \mathbf{e}_1 + j (e^{-jk^+x_3} - e^{-jk^-x_3}) \mathbf{e}_2 \}.$$

Обозначая $k^0 = \frac{k^+ + k^-}{2}$, $k^+ = k^0 + a$, $k^- = k^0 - a$, $a = \frac{k^+ - k^-}{2}$ и используя формулы (Д-5-2), перепишем это выражение в виде

$$\dot{\mathbf{H}}_m = 2H_m e^{-jk^0x_3} [\mathbf{e}_1 \cos(ax_3) + \mathbf{e}_2 \sin(ax_3)]. \quad (2-9-21)$$

Следовательно, при распространении волны вдоль оси x_3 меняется соотношение между вертикальной и горизонтальной составляющими вектора \mathbf{H} ; если при $x_3 = 0$

имеется только горизонтальная составляющая, то по мере распространения волны амплитуда горизонтальной составляющей уменьшается, а вертикальной — возрастает. В результате на расстоянии $x_3=l$ (рис. 2-44) вектор \vec{H} оказывается повернутым на угол

$$\vartheta = \arctg \frac{H_{m2}}{H_{m1}} = al = \\ = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_0} \frac{\sqrt{\mu_{\text{эф}}^+} - \sqrt{\mu_{\text{эф}}^-}}{2} l. \quad (2-9-22)$$

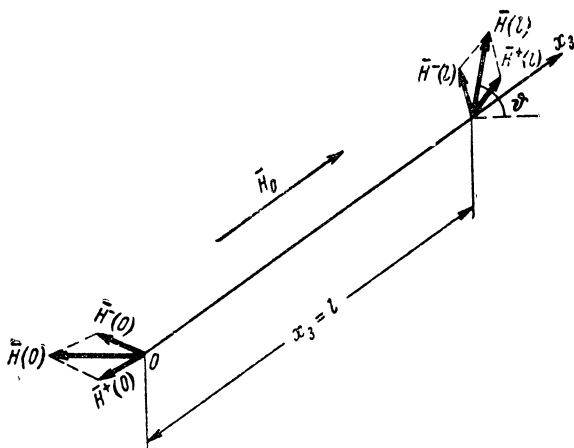


Рис. 2-44. Вращение плоскости поляризации.

Так как волновые сопротивления Z_0^+ и Z_0^- для волн круговой поляризации с различным направлением вращения различны, то амплитуды напряженности электрического поля также не равны ($E_m^+ \neq E_m^-$); поэтому электрическое поле суммарной волны имеет эллиптическую поляризацию. Под углом поворота плоскости поляризации в этом случае подразумевается угол между большей осью эллипса и направлением вектора \vec{E} исходной линейно поляризованной волны. Этот угол также определяется формулой (2-9-22).

Вращение плоскости поляризации линейно поляризованной волны, распространяющейся в намагниченной среде вдоль направления подмагничивающего постоян-

ного поля \mathbf{H}_0 , называется эффектом Фарадея. Среда, в которой этот эффект наблюдается, называется гиротропной (вращающей).

Замечательным свойством этого эффекта является его взаимность, т. е. теорема взаимности (2-1-19) здесь неприменима. Действительно, независимо от направления распространения, выбор k^+ или k^- для каждой из поляризованных по кругу волн связан с тем, в какую сторону вращается вектор \mathbf{E} , если смотреть по направлению приложенного постоянного поля. Поэтому плоскость поляризации волны, распространяющейся в направлении постоянного поля, поворачивается в ту же сторону, что и для волны, распространяющейся в противоположном направлении.

Рассмотрим теперь другой, то же важный в практическом отношении, случай поперечного подмагничивания, т. е. когда плоская электромагнитная волна распространяется в направлении x_1 , перпендикулярном направлению постоянного поля $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_3 H_0$.

Полагая в уравнениях (2-9-12) и (2-9-13) $\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} = 0$, а $\frac{\partial}{\partial x_1} = -jk$, получим:

$$\begin{aligned} E_{m1} &= 0; & \mu \dot{H}_{m1} - j\mu_\alpha \dot{H}_{m2} &= 0; \\ k\dot{H}_{m3} &= \omega \epsilon_\alpha \dot{E}_{m2}; & k\dot{E}_{m3} &= -\omega \mu_0 (j\mu_\alpha \dot{H}_{m1} + \mu \dot{H}_{m2}); \\ k\dot{H}_{m2} &= -\omega \epsilon_\alpha \dot{E}_{m3}; & k\dot{E}_{m2} &= \omega \mu_0 \mu_3 \dot{H}_{m3}. \end{aligned}$$

Эту систему уравнений можно разделить на две независимые системы

$$\left. \begin{aligned} k\dot{E}_{m2} &= \omega \mu_0 \mu_3 \dot{H}_{m3}; \\ k\dot{H}_{m3} &= \omega \epsilon_\alpha \dot{E}_{m2}. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-23)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu \dot{H}_{m1} &= j\mu_\alpha \dot{H}_{m2}; \\ k\dot{H}_{m2} &= -\omega \epsilon_\alpha \dot{E}_{m3}; \\ k\dot{E}_{m3} &= -\omega \mu_0 (j\mu_\alpha \dot{H}_{m1} + \mu \dot{H}_{m2}). \end{aligned} \right\} \quad (2-9-24)$$

Первая система уравнений (2-9-23) определяет однородную плоскую волну с вектором \mathbf{E} , перпендикулярным вектору \mathbf{H}_0 , называемую в данном случае «обыкновен-

ной» волной. Система (2-9-23) имеет решение, не равное нулю, если определитель ее равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} k & -\omega \varepsilon_a \\ \omega \mu_0 \mu_3 & -k \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим характеризующие «обыкновенную» волну: постоянную распространения

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0 \mu_3}, \quad (2-9-25)$$

фазовую скорость

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_0 \mu_3}} \quad (2-9-26)$$

и волновое сопротивление среды

$$Z_0 = \frac{E_{m2}}{H_{m3}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_3}{\varepsilon_a}}. \quad (2-9-27)$$

При насыщении феррита ($\mu_3 = 1$) характеристики «обыкновенной» волны от приложенного постоянного магнитного поля не зависят, т. е. совпадают с характеристиками плоской однородной волны в изотропной среде с параметрами ε_a и μ_0 .

Система уравнений (2-9-24) определяет неоднородную волну с продольной составляющей $H_{m1} \neq 0$, электрический вектор которой совпадает с направлением подмагничивания, называемую в данном случае «необыкновенной» волной. Составляющие H_{m1} и H_{m2} здесь сдвинуты друг относительно друга по фазе на 90° ,

$$\frac{\dot{H}_{m1}}{\dot{H}_{m2}} = j \frac{\mu_a}{\mu},$$

т. е. эта волна линейно поляризована по вектору **E** и эллиптически поляризована по вектору **H**.

Система уравнений (2-9-24) имеет решение, отличное от нуля, если определитель ее равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \mu \mu_0 & -j \mu_0 \mu_a & 0 \\ j \omega \mu_0 \mu_a & \omega \mu_0 \mu & k \\ 0 & k & \omega \varepsilon_a \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\mu_0 \mu k^2 + \omega^2 \mu_0^2 \mu_a^2 \varepsilon_a - \omega^2 \mu_0^2 \mu^2 \varepsilon_a = 0.$$

Отсюда постоянная распространения для «необыкновенной» волны

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_0 \mu_{эф}}, \quad (2-9-25a)$$

фазовая скорость

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_0 \mu_{эф}}} \quad (2-9-26a)$$

и волновое сопротивление среды

$$Z_0 = \frac{E_{m3}}{H_{m2}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{эф}}{\epsilon_a}}. \quad (2-9-27a)$$

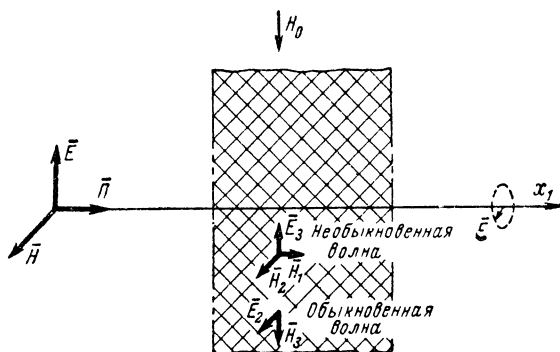


Рис. 2-45. Двойное лучепреломление.

Следовательно, характеристики «необыкновенной» волны совпадают с характеристиками плоской однородной волны в изотропной среде с относительной магнитной проницаемостью

$$\mu_{эф} = \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu}. \quad (2-9-27b)$$

Таким образом, входящая в ферритовую среду, намагниченную перпендикулярно распространению поля, однородная плоская волна произвольной линейной поляризации расщепляется на две волны: «обыкновенную» и «необыкновенную», распространяющиеся с разными скоростями [см. выражения (2-9-26) и (2-9-26a)]. При выходе из данной среды эти волны оказываются с разными фазами и, следовательно, образуют волну эллиптической поляризации (рис. 2-45).

Описанное явление представляет собой искусственное двойное лучепреломление в намагниченном феррите. Оно подобно эффекту Керра — искусственной оптической анизотропии, вызываемой в жидкостях постоянным электрическим полем, и эффекту Коттона-Мутона — двойного лучепреломления в жидкости под действием постоянного магнитного поля.

Другим примером анизотропной среды является плазма в постоянном магнитном поле. Такой средой, в частности, являются верхние ионизированные слои земной атмосферы; их анизотропные свойства возникают под действием магнитного поля Земли.

Уравнение движения электрона под действием переменного электромагнитного поля и постоянного магнитного поля отличается от уравнения (2-7-33) членом, выражающим дополнительную Лоренцову силу. В этом случае

$$m \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}}{\partial t} + \mathbf{v} m \dot{\mathbf{v}} = e \dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t} + \mu_0 e [\dot{\mathbf{v}} \mathbf{H}_0], \quad (2-9-28)$$

здесь \mathbf{H}_0 — напряженность постоянного магнитного поля.

Полагая, как и при решении уравнения (2-7-33),

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = j \omega \dot{\mathbf{v}} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_0 = c_3 H_0,$$

получим:

$$[\dot{\mathbf{v}} \mathbf{H}_0] = (\mathbf{e}_1 \dot{v}_2 - \mathbf{e}_2 \dot{v}_1) H_0.$$

Из формулы (2-9-28) находим составляющие вектора скорости

$$\left. \begin{aligned} v_{m1} &= \gamma \frac{\dot{E}_{m1}(j\omega + \nu) + \omega_H \dot{E}_{m2}}{[\omega_H^2 + (j\omega + \nu)^2]}; \\ \dot{v}_{m2} &= \gamma \frac{\dot{E}_{m2}(j\omega + \nu) - \omega_H \dot{E}_{m1}}{[\omega_H^2 + (j\omega + \nu)^2]}; \\ v_{m3} &= \gamma \frac{\dot{E}_{m3}}{(j\omega + \nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-29)$$

Подставляя найденные по этим формулам значения в уравнение плотности тока (2-7-35), возникающего в плазме под действием электрического поля $\dot{\mathbf{E}}_m$, т. е. $\dot{\mathbf{J}}_{mi} = en \dot{\mathbf{v}}_{mi} + j\omega \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_{mi}$, получим:

$$\dot{J}_{mi} = j\omega \epsilon_0 \tilde{\mathbf{e}}_{ik} \dot{E}_{mk}, \quad (2-9-30)$$

где $\tilde{\epsilon}_{ik}$ — тензор комплексной диэлектрической проницаемости намагниченной плазмы (Д-2-11)

$$\tilde{\epsilon}_{ik} = \begin{vmatrix} \tilde{\epsilon} & -j\epsilon_{\alpha} & 0 \\ j\tilde{\epsilon}_{\alpha} & \tilde{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_3 \end{vmatrix}. \quad (2-9-31)$$

Компоненты этого тензора

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\epsilon} &= 1 - \frac{j\omega_p^2(j\omega + \nu)}{\omega[\omega_H^2 + (j\omega + \nu)^2]}; \\ \tilde{\epsilon}_{\alpha} &= \frac{\omega_p^2\omega_H}{\omega[\omega_H^2 + (j\omega + \nu)^2]}; \\ \tilde{\epsilon}_3 &= 1 - \frac{j\omega_p^2}{\omega(j\omega + \nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-32)$$

Здесь согласно выражениям (2-7-36) и (2-9-8)

$$\omega_p = e \sqrt{\frac{n}{\epsilon_0 m}} \quad \text{и} \quad \omega_H = \mu_0 \gamma H_0 = \mu_0 \frac{e}{m} H_0.$$

При $\nu \ll \omega$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\epsilon} &= \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_H^2)}; \\ \tilde{\epsilon}_{\alpha} &= \epsilon_{\alpha} = \frac{\omega_p^2\omega_H}{\omega(\omega_H^2 - \omega^2)}; \\ \tilde{\epsilon}_3 &= \epsilon_3 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2-9-33)$$

Из полученных формул следует, что намагниченная плазма является гиротропной средой. Распространение плоской однородной электромагнитной волны в такой среде, как и в ферромагнитной анизотропной, сопровождается вращением плоскости поляризации (эффект Фарадея) и двойным лучепреломлением.

Если вектор постоянного магнитного поля \mathbf{H}_0 совпадает с направлением распространения волны, то наблюдается вращение плоскости поляризации. При этом угол поворота плоскости поляризации в анизотропной плазме определяется формулой

$$\vartheta = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} (\sqrt{\varepsilon + \varepsilon_\alpha} - \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_\alpha})}{2} l, \quad (2-9-34)$$

которая аналогична формуле (2-9-22).

Если вектор \mathbf{H}_0 перпендикулярен направлению распространения, то наблюдается двойное лучепреломление. При этом «обыкновенная» волна характеризуется фазовой скоростью и волновым сопротивлением среды, определяемыми выражениями

$$\left. \begin{aligned} v_\phi &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_3}}; \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_3}}, \end{aligned} \right\} \quad (2-9-35)$$

а «необыкновенная» волна характеризуется выражениями

$$\left. \begin{aligned} v_\phi &= \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_0 \varepsilon_{эф}}}; \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_0 \varepsilon_{эф}}}, \end{aligned} \right\} \quad (2-9-36)$$

где, аналогично (2-9-276),

$$\varepsilon_{эф} = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_\alpha^2}{\varepsilon}. \quad (2-9-37)$$

В заключение отметим, что практический интерес представляют и некоторые другие вещества, которые под действием электрического или магнитного поля приобретают свойства анизотропной среды. К их числу относятся дигидрофосфат калия KH_2PO_4 и дигидрофосфат аммония $\text{NH}_4 \cdot \text{H}_2\text{PO}_4$. Под действием постоянного электрического поля в диапазоне оптических волн в них происходит двойное лучепреломление.

Ферромагнитный резонанс, вращение плоскости поляризации и двойное лучепреломление находят применение в вентилях, переключателях и модуляторах потока электромагнитной энергии, в антеннах с электронным качанием (сканированием) луча и в ряде других устройств.

Вращение плоскости поляризации и возникновение двойного лучепреломления происходит при распространении радиоволн в верхних ионизированных слоях атмосферы Земли.

Глава третья

МОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

3-1. ДИФРАКЦИЯ

Электромагнитное поле, создаваемое какими-либо источниками в неограниченной однородной среде с параметрами μ_{a1} , ϵ_{a1} и σ_1 , отличается от поля тех же источников, если в этой среде оказывается неоднородность в виде ограниченной области с другими параметрами μ_{a2} , ϵ_{a2} и σ_2 .

Различие вызывается тем, что скорость распространения поля и плотность его энергии определяются параметрами среды. В результате этого при наличии неоднородностей в общем случае изменяется направление распространения поля (электромагнитных волн или фотонов).

Если по заданной линии (не обязательно прямой) расположен ряд полуволновых вибраторов, то можно ожидать, что преимущественное направление потока электромагнитной энергии будет следовать этой линии, т. е. возникнут направленные электромагнитные волны. Направленные волны возникают около поверхности диэлектриков или проводников, которые могут служить направляющими системами.

Поле, возникающее в однородной среде при наличии в ней неоднородности, называется дифрагированным; оно характеризуется векторами

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{(1)} &= \mathbf{E} + \mathbf{E}_0; \\ \mathbf{H}_{(1)} &= \mathbf{H} + \mathbf{H}_0. \end{aligned} \right\} \quad (3-1-1)$$

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} определяют невозмущенное поле, создаваемое данными источниками в среде с параметрами μ_{a1} , ϵ_{a1} , σ_1 без неоднородностей; это поле, называемое первичным или полем падающей волны, при решении задач является заданным. Векторы \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 определяют возникающее при наличии неоднородностей в первой среде вторичное поле, называемое полем рассеяния или полем отраженной волны.

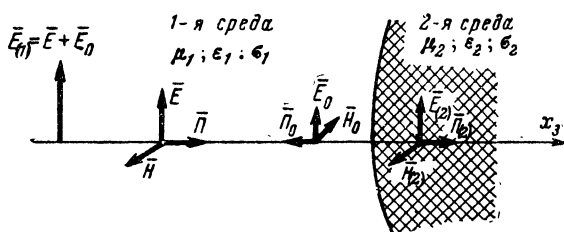


Рис. 3-1. Электромагнитное поле в среде с неоднородностью.

Заметим, что равенства (3-1-1) действительны лишь в идеализированном случае: когда источник первичного поля находится на бесконечно большом расстоянии от неоднородности, вследствие чего предполагается, что вторичное поле не достигает источника и заряды и токи источника остаются такими же, как в отсутствие неоднородности.

Поле, возникающее внутри неоднородности с параметрами μ_{a2} , ϵ_{a2} , σ_2 и характеризуемое векторами $\mathbf{E}_{(2)}$, $\mathbf{H}_{(2)}$, называется полем прошедшей или преломленной волны. Эти наименования характеризуют физический процесс, который возникает в среде при скачкообразном изменении параметров μ_a , ϵ_a и σ . Когда электромагнитная волна, распространяясь в изотропной среде, падает на некоторое тело, то в нем возникают вынужденные колебания свободных и связанных зарядов. Эти заряды колеблются с частотой вынуждающего поля и, в свою очередь, создают вторичное поле, также изменяющееся с частотой падающей волны (рис. 3-1). При этом в общем случае часть энергии падающей волны перейдет во вторую среду (внутри тела), а другая ее часть останется в первой среде, изменяя первоначаль-

ное направление своего движения, т. е. как бы отражается данным телом.

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих вектора \mathbf{E} на поверхности раздела двух сред [см. выражение (1-5-6-)], т. е. $E_{\tau(1)} = E_{\tau(2)}$, следует:

$$E_m e^{i\omega t} + \dot{E}_{m0} e^{i\omega_0 t} = \dot{E}_{m(2)} e^{i\omega_2 t}.$$

Так как амплитуды E_m , \dot{E}_{m0} , $\dot{E}_{m(2)}$ от t не зависят, а равенство выполняется при любом t , то $\omega = \omega_0 = \omega_2$, т. е. частота поля отраженной ω_0 и прошедшей ω_2 волн та же,

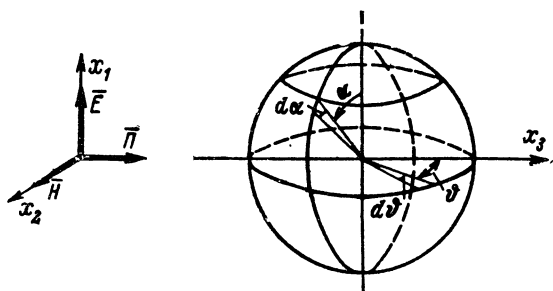


Рис. 3-2. Дифракция от шара.

что и частота падающей волны ω . Это следствие соответствует вышеприведенной физической интерпретации вторичного поля.

Существуют точные и приближенные методы расчета дифрагированного поля. Точные методы состоят в решении дифференциальных уравнений (2-1-10), (2-1-5) с учетом граничных условий; при этом применяется система координат, которая соответствует геометрии тела.

Дифракция от шара. Пусть в однородной неограниченной среде с параметрами μ_{a1} , ϵ_{a1} , $\sigma_1 = 0$ имеется шар радиусом a с параметрами μ_{a2} , ϵ_{a2} , $\sigma_2 \neq 0$ (рис. 3-2). Требуется по заданному полю падающей плоской волны, описываемому выражениями

$$\dot{E}_m = \mathbf{e}_1 E_m e^{-ik_1 x_3}, \quad (3-1-2)$$

$$\dot{H}_m = \mathbf{e}_2 \frac{E_m}{\sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}}} e^{-jk_1 x_3}, \quad (3-1-3)$$

где $k_1 = \omega \sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}}$, найти напряженности поля $E_{(1)}$, $H_{(1)}$ в первой среде и $E_{(2)}$, $H_{(2)}$ внутри шара.

В сферической системе координат согласно выражениям (Д-6-61) комплексные амплитуды напряженности поля падающей волны

$$\dot{E}_m = -E_m \sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [M_{n+}^1 - jN_{n-}^1]; \quad (3-1-4)$$

$$\dot{H}_m = \frac{k_1 E_m}{\omega \mu_{a1}} \sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [M_{n-}^1 + jN_{n+}^1]. \quad (3-1-5)$$

Учитывая, что при $r = \infty$ поле отраженной волны равно нулю, а поле прошедшей волны при $r=0$ не равно нулю, поле отраженной волны определяется следующими выражениями:

$$\dot{E}_{mo} = -E_m \sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^{(0)} M_{n+}^1 - j b_n^{(0)} N_{n-}^1]; \quad (3-1-6)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{mo} = & \frac{k_1 E_m}{\omega \mu_{a1}} \sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \times \\ & \times [b_n^{(0)} M_{n-}^1 + j a_n^{(0)} N_{n+}^1], \end{aligned} \quad (3-1-7)$$

где $M_{n\mp}^1$ и $N_{n\mp}^1$ определяются формулами (Д-6-62), в которых $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) = H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$. Для поля прошедшей волны

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m(2)} = & -E_m \sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \times \\ & \times [a_n^{(2)} M_{n+}^1 - j b_n^{(2)} N_{n-}^1]; \end{aligned} \quad (3-1-8)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{m(2)} = & \frac{k_2}{\omega \mu_{a2}} E_m \sum_{n=1}^{\infty} (-j)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \times \\ & \times [b_n^{(2)} M_{n-}^1 + j a_n^{(2)} N_{n+}^1], \end{aligned} \quad (3-1-9)$$

где $M_{n\mp}^1$ и $N_{n\mp}^1$ определяются формулами (Д-6-62), в которых $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) = J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$. Удовлетворяя граничным условиям на поверхности шара ($r=a$), получим:

$$\left. \begin{aligned} a_n^{(0)} &= - \frac{\mu_2 j_n(\dot{k}_2 a) [k_1 a j_n(k_1 a)]' - \dots}{\mu_2 j_n(\dot{k}_2 a) [k_1 a h_n^{(2)}(k_1 a)]' - \dots} \rightarrow \\ &\leftarrow \dots \frac{-\mu_1 j_n(k_1 a) [\dot{k}_2 a j_n(\dot{k}_2 a)]'}{-\mu_1 h_n^{(2)}(k_1 a) [\dot{k}_2 a j_n(\dot{k}_2 a)]'}; \\ b_n^{(0)} &= - \frac{\mu_2 j_n(k_1 a) [\dot{k}_2 a j_n(\dot{k}_2 a)]' - \dots}{\mu_2 h_n^{(2)}(k_1 a) [\dot{k}_2 a j_n(\dot{k}_2 a)]' - \dots} \rightarrow \\ &\leftarrow \dots \frac{-\mu_1 \left(\frac{\dot{k}_2}{k_1}\right)^2 j_n(\dot{k}_2 a) [k_1 a j_n(k_1 a)]'}{-\mu_1 \left(\frac{\dot{k}_2}{k_1}\right)^2 j_n(\dot{k}_2 a) [k_1 a h_n^{(2)}(k_1 a)]'}; \\ a_n^{(2)} &= \frac{\mu_2 j_n(k_1 a) [k_1 a h_n^{(2)}(k_1 a)]' - \dots}{\mu_2 j_n(\dot{k}_2 a) [k_1 a h_n^{(2)}(k_1 a)]' - \dots} \rightarrow \\ &\leftarrow \dots \frac{-\mu_2 [k_1 a j_n(k_1 a)]' h_n^{(2)}(k_1 a)}{-\mu_1 h_n^{(2)}(k_1 a) [\dot{k}_2 a j_n(\dot{k}_2 a)]'}; \\ b_n^{(2)} &= \frac{\mu_2 \frac{\dot{k}_2}{k_1} h_n^{(2)}(k_1 a) [k_1 a j_n(k_1 a)]' - \dots}{\mu_2 h_n^{(2)}(k_1 a) [\dot{k}_2 a j_n(\dot{k}_2 a)]' - \dots} \rightarrow \\ &\leftarrow \dots \frac{-\mu_2 \frac{\dot{k}_2}{k_1} j_n(k_1 a) [k_1 a h_n^{(2)}(k_1 a)]'}{-\mu_1 \left(\frac{\dot{k}_2}{k_1}\right)^2 j_n(\dot{k}_2 a) [k_1 a h_n^{(2)}(k_1 a)]'}. \end{aligned} \right\} \quad (3-1-10)$$

Штрихи в этих выражениях означают дифференцирование по аргументам $k_1 r$ и $\dot{k}_2 r$, а $j_n(ka)$ и $h_n^{(2)}(ka)$ — сферические функции, определяемые выражением (Д-6-62 а), причем

$$\dot{k}_2 = \omega \sqrt{\mu_{a2} \tilde{\epsilon}_{a2}} = \beta_2 - j\alpha_2.$$

Если проводимость сферы велика или проницаемость ее много больше проницаемости окружающей среды, то $|\dot{k}_2 a| \gg 1$ и коэффициенты $a_n^{(0)}$ и $b_n^{(0)}$ в системе выраже-

ний (3-1-10), относящиеся к отраженной волне, можно упростить, воспользовавшись асимптотическими выражениями (Д-6-33) и (Д-6-33а), в которых n заменено на $n + \frac{1}{2}$:

$$a_n^{(o)} \approx - \frac{j_n(k_1 a)}{h_n^{(2)}(k_1 a)};$$

$$b_n^{(o)} \approx - \frac{[(k_1 a) j_n(k_1 a)]'}{[(k_1 a) h_n^{(2)}(k_1 a)]'}.$$

Из выражений (3-1-6) — (3-1-10) следует, что электромагнитное поле, возникающее в результате дифракции от шара, обладает сложной структурой. В общем случае вторичное поле вблизи шара является неоднородной сферической волной и векторы напряженности отраженного поля \mathbf{E}_o и \mathbf{H}_o содержат все три компоненты. Однако в частном случае, когда $a_n^{(o)} = 0$, продольная со-

ставляющая магнитного поля отсутствует (ТМ- или Е-поле); когда же $b_n^{(o)} = 0$, то отсутствует продольная составляющая электрического поля (ТЕ- или Н-поле). Электромагнитное поле может иметь различные «типы» структуры, соответствующие различным частотам собственных электрических колебаний шара.

На рис. 3-3 показаны три типа структуры Е-поля. Сплошные линии изображают здесь электрические силовые линии, а пунктирные — магнитные.

На больших расстояниях от шара согласно выражениям (3-1-6) и (3-1-7) с учетом приближенных формул (Д-6-33) и (Д-6-33а), в которых n заменено на $n + \frac{1}{2}$,

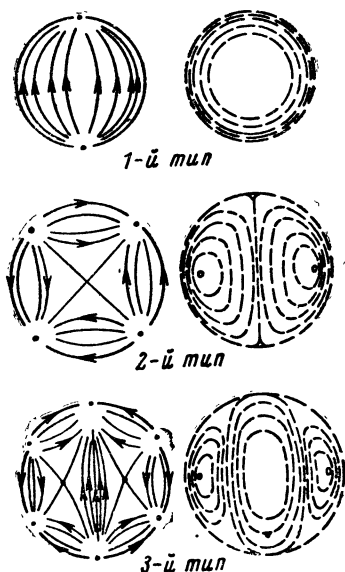
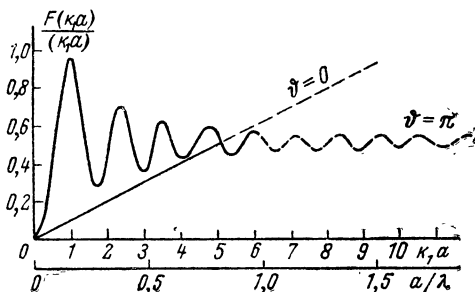


Рис. 3-3. Структура электромагнитного поля «электрической» волны трех различных типов.

радиальная составляющая отраженного поля убывает пропорционально $1/r^2$, а поперечные составляющие $E_{\vartheta 0}$, $E_{\alpha 0}$ и $H_{\alpha 0}$, $H_{\vartheta 0}$ убывают пропорционально $1/r$. Поэтому на очень больших расстояниях остаются только поперечные составляющие. При этом составляющие напряженности отраженного поля $E_{\vartheta 0}$ и $E_{\alpha 0}$ сдвинуты по фазе, и поле это в отличие от поля падающей волны с линейной поляризацией имеет эллиптическую поляризацию.



Уис. 3-4. Зависимость вторичного поля излучения шара от величины $k_1 a$.

Исключение составляют направления, соответствующие $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$; в первом случае $E_{\alpha 0}=0$, во втором — $E_{\vartheta 0}=0$ и, следовательно, отраженная волна имеет линейную поляризацию. Численное определение отраженного шаром поля весьма трудоемко. В связи с этим для металлического шара ($\sigma_2 \gg \omega \epsilon_{a2}$) в вакууме на рис. 3-4 приведены графики, дающие представление о характере вторичного поля в плоскости $\alpha=0$, распространяющегося навстречу первичному полю ($\vartheta=\pi$) и в направлении его ($\vartheta=0$). На этих графиках выражение (3-1-6) дано для общности в виде относительной величины

$$F_{\vartheta} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} = \left| \frac{\dot{E}_{m0}}{k_1 a E_m} \right|_{\vartheta} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} = \frac{F(k_1 a)}{(k_1 a)},$$

выражающей зависимость величины вторичного поля от длины волны $\lambda_1=2\pi/k_1$ падающего поля при $a=\text{const}$. Осциллирующий характер кривой при $\vartheta=\pi$ указывает на наличие резонансных частот (волн), определяемых размером шара:

$$\lambda_r^{(n)} \approx \frac{2\pi a}{0,86}, \quad \frac{2\pi a}{1,81}, \quad \frac{2\pi a}{2,77} \dots$$

При резонансе, т. е. когда длина волны падающего поля совпадает с резонансной длиной волны $\lambda_r^{(n)}$, интенсивность вторичного излучения достигает максимального значения. При больших значениях $k_1 a$

$$F_{\vartheta=\pi} \rightarrow \frac{1}{2};$$

$$F_{\vartheta=0} \rightarrow \frac{k_1 a}{2}.$$

Поле вторичного излучения в зависимости от расстояния r определяется формулой

$$F_{\vartheta=\pi}(r) = \frac{a}{r} \frac{F(k_1 a)}{k_1 a}.$$

Векторы напряженностей результирующего поля согласно выражениям (3-1-1)

$$\dot{\mathbf{E}}_{(1)} = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}_0;$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{(1)} = \dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{H}}_0.$$

При этом радиальную составляющую комплексного вектора Пойнтинга [см. выражение (2-2-2)]

$$\dot{P}_{\text{рад}} = \frac{1}{2} (\dot{E}_{\vartheta(1)} \dot{H}_{\alpha(1)}^* - \dot{E}_{\alpha(1)} \dot{H}_{\vartheta(1)}^*)$$

можно представить в виде суммы

$$\dot{P}_{\text{рад}} = \dot{P}_{\text{пад}} + \dot{P}_{\text{изл}} + \dot{P}_{\Sigma}, \quad (3-1-11)$$

в которой

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_{\text{пад}} &= \frac{1}{2} (\dot{E}_{\vartheta} \dot{H}_{\alpha}^* - \dot{E}_{\alpha} \dot{H}_{\vartheta}^*); \\ \dot{P}_{\text{изл}} &= \frac{1}{2} (\dot{E}_{\vartheta_0} \dot{H}_{\alpha_0}^* - \dot{E}_{\alpha_0} \dot{H}_{\vartheta_0}^*); \\ \dot{P}_{\Sigma} &= \frac{1}{2} (\dot{E}_{\vartheta} \dot{H}_{\alpha_0}^* - \dot{E}_{\alpha_0} \dot{H}_{\vartheta}^*) + \\ &+ \frac{1}{2} (\dot{E}_{\vartheta_0} \dot{H}_{\alpha}^* - \dot{E}_{\alpha} \dot{H}_{\vartheta_0}^*). \end{aligned} \right\} \quad (3-1-11a)$$

Если взять интеграл выражения (3-1-11) по поверхности сферы, в центре которой помещен шар, получим уравнение

$$\oint_S \operatorname{Re} \dot{P}_{\text{пад}} dS = \oint_S \operatorname{Re} \dot{P}_{\text{изл}} dS + \oint_S \operatorname{Re} \dot{P}_{\Sigma} dS. \quad (3-1-12)$$

Член, выражающий поток мощности падающей волны, в этом уравнении отсутствует потому, что он равен нулю

$$\oint_S \operatorname{Re} \dot{P}_{\text{пад}} dS = 0,$$

ибо окружающая шар среда потерями не обладает, а источник поля падающей волны в бесконечности.

Уравнение (3-1-12) выражает баланс мощностей в области, охваченной сферой радиусом r ; оно может быть представлено в виде

$$P_{0\Sigma} = P_{0\text{ изл}} + P_{0\text{ пог}}. \quad (3-1-12a)$$

Здесь

$$P_{0\Sigma} = - \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \dot{P}_{\Sigma} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha \quad (3-1-13)$$

— поток мощности, извлеченной из падающей волны и расходуемой на вторичное излучение и поглощение в шаре;

$$P_{0\text{ изл}} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \dot{P}_{\text{изл}} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha \quad (3-1-13a)$$

— мощность вторичного излучения шаром в результате отражения от него;

$$P_{0\text{ пог}} = - \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} P_{\text{пад}} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha \quad (3-1-13б)$$

— мощность, поглощаемая шаром (при наличии потерь в нем).

После подстановки в формулы (3-1-13) и (3-1-13a) значений \dot{P}_{Σ} и $\dot{P}_{\text{изл}}$ из (3-1-11a) с учетом выражений (3-1-6) — (3-1-11) в результате интегрирования при $r \gg a$ получим:

$$\left. \begin{aligned} P_{0\text{ изл}} &= \sigma_0 P_{0\text{ пад}}; \\ P_{0\text{ пог}} &= A_0 P_{0\text{ пад}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-1-14)$$

Здесь

$$P_{0 \text{ пад}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{P}_{\text{пад}} = \frac{E_m^2}{2 \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}}}$$

— средняя плотность потока мощности падающей волны;

$$\sigma_o = \pi a^2 \frac{2}{(k_1 a)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n^{(o)}|^2 + |b_n^{(o)}|^2) \quad (3-1-15)$$

— эквивалентная отражающая площадь шара;

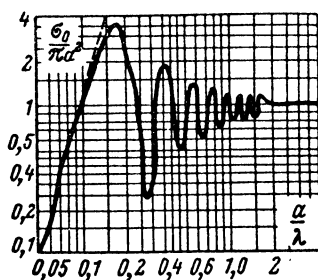


Рис. 3-5. Зависимость эквивалентной отражающей площади металлического шара от отношения $\frac{a}{\lambda}$.

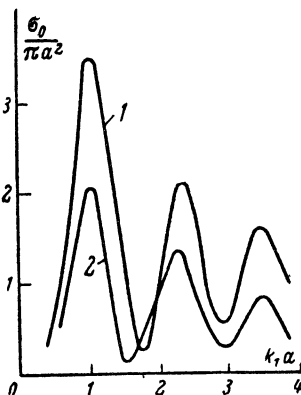


Рис. 3-6. Зависимость эквивалентной отражающей площади металлического (1) и водяного (2) шаров от $k_1 a$.

$$A_o = \pi a^2 \frac{2}{(k_1 a)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [\operatorname{Re} (a_n^{(o)} + b_n^{(o)}) - (|a_n^{(o)}|^2 + |b_n^{(o)}|^2)] \quad (3-1-16)$$

— эффективная поглощающая площадь шара.

При $\vartheta = \pi$ и $\alpha = \pi/2$ величина σ_o определяет мощность вторичного излучения в направлении к источнику первичного поля и совпадает с эквивалентной отражающей площадью цели σ_n [см. выражение (2-6-20)], входящей в уравнение (2-6-21) для случая совмещенного расположения передатчика и приемника радиолокационной станции.

Величина A_0 аналогична эффективной поглощающей площади антенны A_2 , определяемой формулой (2-6-17) и входящей в выражение (2-6-16).

На рис. 3-5 приведена зависимость σ_0 от a/λ для металлического шара при $\alpha = \pi/2$, $\vartheta = \pi$. Этот график пригоден и для диэлектрического шара с $\epsilon_2 \gg 1$, что подтверждает рис. 3-6, на котором приведены графики σ_0 для металлического (кривая 1) и водяного (кривая 2) шаров при небольших значениях $k_1 a$.

В случае «маленького» шара ($k_1 a < \frac{1}{2}$), когда $\mu_1 = \mu_2$, для определения σ_0 достаточно одного члена

$$|b_{1(0)}| \approx \frac{2}{3} \frac{\left| \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 - 1 \right|}{\left| \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 + 2 \right|} (k_1 a)^3.$$

В этом случае выражение (3-1-15) принимает вид:

$$\sigma_0 \approx \frac{8}{3} \left[\frac{\left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 - 1}{\left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 + 2} \right]^2 (k_1 a)^4 \pi a^2. \quad (3-1-15a)$$

Входящий в эту формулу множитель $(k_1 a)^4$ указывает на то, что мощность излучения «маленькой» сферы пропорциональна четвертой степени частоты поля. Этим излучение сферы отличается от излучения «маленького» провода, мощность излучения которого пропорциональна только второй степени частоты [см. выражения (2-3-15) и (2-3-15a)].

Для диэлектрического шара, практически не обладающего потерями, при $\epsilon_1 = 1$ формула (3-1-15a) принимает вид:

$$\sigma_0 \approx \frac{8}{3} \left[\frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2 + 2} \right]^2 (k_1 a)^4 \pi a^2. \quad (3-1-15б)$$

Если для проводящего шара $\sigma_2 \gg \omega \epsilon_{a2}$ а для диэлектрического шара $\epsilon_2 \gg 1$, формула (3-1-15) преобразуется в формулу

$$\sigma_0 \approx \frac{8}{3} (k_1 a)^4 \pi a^2, \quad (3-1-15в)$$

действительную для проводящего и диэлектрического шара. Практическим примером применения этой форму-

лы является определение по ней в радиолокации величины $\sigma_{\text{ц}}$ капелек воды, образующих облака.

Дифракция от цилиндра. Пусть идеально проводящий бесконечно длинный цилиндр радиусом a находится в вакууме, постоянную распространения в котором обозначим k_1 . Рассмотрим сначала случай, когда вектор напряженности электрического поля падающей волны \mathbf{E} параллелен оси цилиндра (случай \mathbf{E}_{\parallel} , рис. 3-7, а). Напряженность электрического поля плоской падающей волны

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{e}_z E_m e^{-jk_1 x_1}$$

или в цилиндрической системе координат (рис. Д-9):

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{e}_z E_m e^{-jk_1 r \cos \alpha}.$$

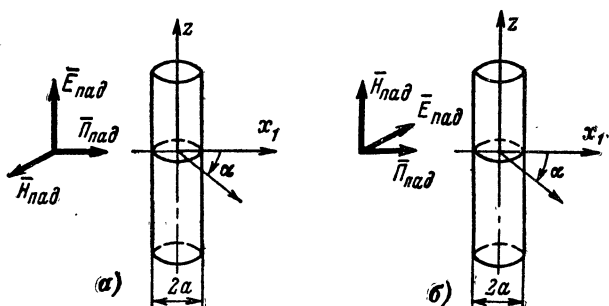


Рис. 3-7. Дифракция от цилиндра, когда (а) вектор напряженности электрического поля параллелен (\mathbf{E}_{\parallel}) или перпендикулярен (\mathbf{E}_{\perp}) оси цилиндра (б).

Согласно (Д-6-37а) это выражение можно представить рядом цилиндрических функций

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{e}_z E_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n J_n(k_1 r) e^{jn\alpha}, \quad (3-1-17)$$

где $J_n(k_1 r)$ — функция Бесселя [см. выражение (Д-6-30)].

Так как падающее (первичное) поле вдоль оси z однородно, то для выполнения граничных условий необходимо, чтобы и отраженное поле вдоль этой оси так же было однородно, т. е. $\frac{\partial E_{z0}}{\partial z} = 0$. Кроме того, $\dot{\mathbf{E}}_{m0} = \mathbf{e}_z \dot{E}_{m0}$.

На основании этого волновое уравнение (2-1-10) для отраженного поля можно записать в виде скалярного уравнения

$$\Delta \dot{E}_{z0} + k_1^2 \dot{E}_{z0} = 0.$$

В цилиндрической системе координат [см. формулу (Д-6-22)] это уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \dot{E}_{z0} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \dot{E}_{z0} + k_1^2 \dot{E}_{z0} = 0.$$

Решается последнее уравнение методом Фурье; общее решение получается в виде, аналогичном (3-1-17),

$$E_{mz0} = E_{m0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n a_n H_n^{(2)}(k_1 r) e^{-jn\alpha}, \quad (3-1-18)$$

где $H_n^{(2)}(k_1 r)$ — функция Ханкеля (Д-6-32). Подставляя выражения (3-1-17) и (3-1-18) при $r=a$ в граничное условие $\dot{E}_z + \dot{E}_{z0} = 0$, определяем коэффициенты

$$a_n = - \frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)}$$

и получаем следующее окончательное выражение для напряженности электрического поля отраженной волны

$$\dot{E}_{mz0} = -E_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-j)^n \frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)} H_n^{(2)}(k_1 r) e^{jn\alpha}. \quad (3-1-19)$$

Практический интерес представляет поле в волновой зоне, т. е. поле вторичного излучения, определяемое условием $k_1 r \gg 1$. При этом согласно формуле (Д-6-33а)

$$H_n^{(2)}(k_1 r) \approx (-j)^n \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} e^{j \left(k_1 r - \frac{\pi}{4} \right)}$$

выражение (3-1-19) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{mz0} = & -E_m \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} e^{j \left(k_1 r - \frac{\pi}{4} \right)} \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)} e^{jn\alpha}. \end{aligned} \quad (3-1-20)$$

Аналогичным путем можно найти, что для случая, когда вектор напряженности электрического поля падающей волны \mathbf{E} перпендикулярен оси цилиндра (случай \mathbf{E}_\perp — рис. 3-7, б), напряженность электрического поля вторичного излучения при $k_1 r \gg 1$ определяется выражением

$$\dot{E}_{m\alpha 0} = E_m \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} \times \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{(J_n(k_1 a))'}{(H_n^{(2)}(k_1 a))'} e^{jn\alpha} \right] e^{j(k_1 r - \frac{\pi}{4})}. \quad (3-1-21)$$

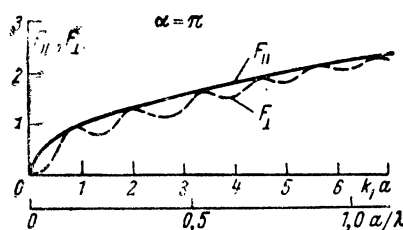


Рис. 3-8. Зависимость вторичного излучения цилиндра в сторону источника первичного поля от величины $k_1 a$ для случаев \mathbf{E}_\perp и \mathbf{E}_\parallel .

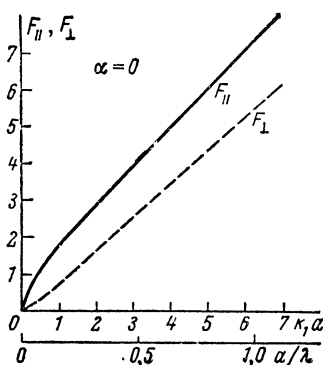


Рис. 3-9. Зависимость вторичного излучения цилиндра в направлении распространения первичного поля от величины $k_1 a$ для случаев \mathbf{E}_\perp и \mathbf{E}_\parallel .

На рис. 3-8 и 3-9 приведены графики выражений для \dot{E}_{mz0} и $\dot{E}_{m\alpha 0}$ (3-1-20) и (3-1-21) в виде функций

$$F_\parallel = \left| \frac{\dot{E}_{mz0}}{E_m \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}}} \right| \frac{1}{\sqrt{(k_1 a)}} \text{ при } \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases};$$

$$F_\perp = \left| \frac{\dot{E}_{m\alpha 0}}{E_m \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}}} \right| \frac{1}{\sqrt{(k_1 a)}} \text{ при } \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}.$$

Эти функции характеризуют зависимость напряженности электрического поля вторичного излучения от вели-

чины $k_1 a$ в направлении к источнику поля ($\alpha = \pi$) и в противоположном направлении ($\alpha = 0$). При «тонком» проводе ($k_1 a \ll 1$) вторичное излучение в противоположном направлении в случае E_{\parallel} значительно больше. Следовательно, когда ось провода совпадает с направлением поляризации первичного поля, то около такого провода могут возникнуть направленные волны; если же ось тонкого провода перпендикулярна вектору электрической напряженности первичного поля (случай E_{\perp}), то явление дифракции не возникает и падающая волна проходит без какого-либо изменения структуры своего поля.

При «толстом» проводе ($k_1 a \gg 1$) различие вторичного поля в случаях E_{\parallel} и E_{\perp} практически отсутствует, что можно объяснить, пользуясь методом геометрической оптики.

Диаграммы вторичного излучения, показывающие зависимость напряженности поля от угла α для случая E_{\parallel} при различных значениях $k_1 a$, даны на рис. 3-10. При «тонком» цилиндре ($k_1 a \ll 1$) поле вторичного излучения от угла α практически не зависит [как и у полуволнового вибратора (см. § 2-5)]. При сравнимых величинах a и λ в диаграммах возникают максимумы (лепестки). Если диаметр цилиндра во много раз превосходит длину волны ($k_1 a \rightarrow \infty$), поле имеет расплывчатый максимум в сторону источника первичного поля и область тени в противоположном направлении; последнее легко объясняется методом геометрической оптики.

Используя соотношения

$$P_{0 \text{ изл}} = \sigma_0 \Pi_0;$$

$$P_{0 \text{ изл}} = \int_0^{2\pi} \Pi_{0 \text{ изл}} r d\alpha;$$

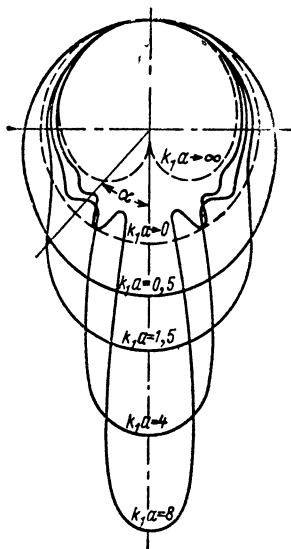


Рис. 3-10. Диаграммы вторичного излучения для случая E_{\parallel} .

$$\Pi_{0 \text{ изл}}' = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{E}_{z0} H_{z0}^*) \quad (\text{случай } E_{\parallel});$$

$$\Pi_{0 \text{ изл}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{E}_{z0} H_{z0}^*) \quad (\text{случай } E_{\perp}),$$

где σ_0 — эквивалентная отражающая площадь единицы длины цилиндра. Используя выражения (3-1-20) и (3-1-21), можно найти полную эквивалентную отражающую площадь единицы длины цилиндра в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{0\parallel} &= \frac{4a}{k_1 a} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J_n(k_1 a)}{H_n^{(2)}(k_1 a)} \right|^2 \quad \text{случай } E_{\parallel}; \\ \sigma_{0\perp} &= \frac{4a}{k_1 a} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{(J_n(k_1 a))'}{(H_n^{(2)}(k_1 a))'} \right|^2 \quad \text{случай } E_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (3-1-22)$$

Зависимость этих величин от произведения $k_1 a$ графически показана на рис. 3-11. Из этих кривых видно, что при «тонком» цилиндре ($k_1 a \rightarrow 0$) $\sigma_{0\parallel} \gg \sigma_{0\perp}$; следовательно, «тонкий» цилиндр, т. е. провод в случае E_{\parallel} , может служить системой, направляющей электромагнитные волны. В случае же E_{\perp} провод не может быть такой системой.

При «толстом» цилиндре ($k_1 a \rightarrow \infty$) $\sigma_{0\parallel} \approx \sigma_{0\perp}$, т. е. эквивалентная отражающая площадь такого цилиндра

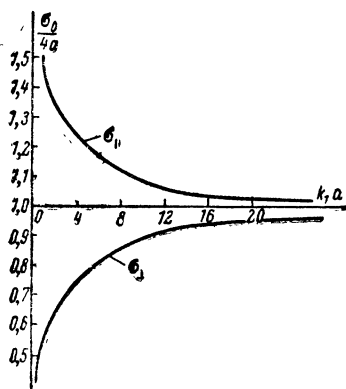


Рис. 3-11. Зависимость эквивалентной отражающей площади цилиндра от $k_1 a$ для случаев E_{\perp} и E_{\parallel} .

от поляризации падающей волны не зависит. К этому результату можно прийти и методом геометрической оптики.

Расчет дифракции от тонкого провода конечной длины является более сложной задачей. Однако определение экстремальных значений напряженностей вторичного поля, возникающих при «резонансных» длинах провода, можно упростить, используя теорему взаимности (2-1-19). График эквивалентной отражающей

щей площади $\sigma_{\text{ц}}$ тонкого провода приведен на рис. 3-12; он составлен на основе приближенного решения интегрального уравнения поля вторичного излучения. При $l \approx \frac{\lambda}{2}$ величина $\sigma_{\text{ц}}$ имеет острый максимум.

Рассмотрим для сравнения дифракцию от цилиндра приближенным методом геометрической оптики, который допустимо использовать, если $\lambda \ll a$, т. е. когда $ka \rightarrow \infty$. Так как распространение плоской волны можно характеризовать волновым вектором \mathbf{k} , совпадающим с направлением распространения и перпендикулярным плоскости равных фаз, то плоскую волну можно рассматривать как луч, идущий в определенном направлении. На основании этого распространяющаяся перпендикулярно оси цилиндра плоская волна заменяется параллельным пучком лучей, которые отражаются от поверхности цилиндра по закону Снеллиуса [см. выражение (3-2-11)] — угол падения равен углу отражения (рис. 3-13). Совокупность отраженных от цилиндра волн образует поле, рассеянное цилиндром. Область, куда лучи не попадают, называется областью тени.

Рассмотрим два луча, идущих в падающей волне на расстоянии Δx ; один из лучей отражается под углом 2φ к падающему, другой — под углом $2(\varphi + \Delta\varphi)$. Если проследить за ходом этих лучей, то увидим, что параллельный, падающий пучок после отражения превращается в расходящийся из точки O . При этом плотность потока мощности изменяется обратно пропорционально ширине пучка; в сечениях, отмеченных Δx и Δl , отношение абсолютных значений вектора Пойнтинга отраженной и падающей волны будет:

$$\frac{P_{0 \text{ изл}}}{P_0} = \frac{\Delta x}{\Delta l}.$$

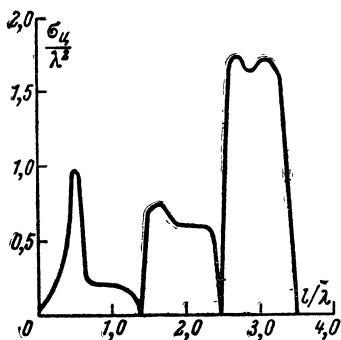


Рис. 3-12. Зависимость $\sigma_{\text{ц}}$ тонкого провода от отношения $\frac{l}{\lambda}$.

Так как $\Delta x = \Delta \varphi \cdot a \cos \varphi$ и $\Delta l = r' 2\Delta \varphi$, то

$$\frac{\Pi_{0 \text{ изл}}}{\Pi_0} = \frac{a}{2r'} \cos \varphi.$$

На достаточно большом расстоянии от цилиндра ($r \gg a$) можно полагать $r' \approx r$. При этом в полярной системе координат, где точка наблюдения характеризуется радиусом r и углом $\alpha = 2\varphi$, получим:

$$\frac{\Pi_{0 \text{ изл}}}{\Pi_0} = \frac{a}{2r} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (3-1-23)$$

Построенная по этой формуле диаграмма интенсивности вторичного поля (рис. 3-14) совпадает с диаграм-

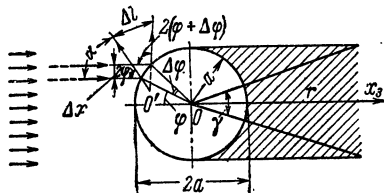


Рис. 3-13. К методу геометрической оптики.

мой, полученной в результате точного решения для случая $k_1 a \rightarrow \infty$ (рис. 3-10). Это и является подтверждением допустимости метода геометрической оптики при $a \gg \lambda$.

Угловую ширину γ «теневого» лепестка можно определить из простого геометрического соотношения (см. рис. 3-13)

$$\gamma = 2 \arctg \frac{a}{r} \approx 2 \frac{a}{r}. \quad (3-1-24)$$

Дифракция на отверстии. Так называют возникновение электромагнитного поля в полупространстве, отделенном бесконечно большим идеально проводящим экраном с отверстием, на который падает из другого полупространства плоская электромагнитная волна с напряженностью поля

$$\dot{E}_m = e_1 E_m e^{-j k x_3}.$$

В случае «большого» отверстия, т. е. когда $D \gg \lambda$ (рис. 3-15), дифрагированное поле приближенно определяется как поле излучения плоского поверхностного магнитного излучателя, т. е. полагается, что во всех точках поверхности отверстия поле однородно.

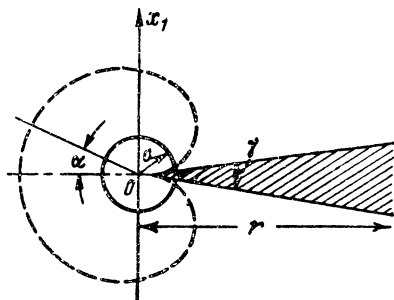


Рис. 3-14 К определению диаграммы поля рассеяния от цилиндра методом геометрической оптики.

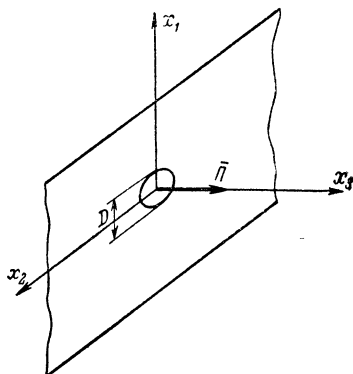


Рис. 3-15. К дифракции от отверстия.

Согласно принципу двойственности (см. стр. 90, 91) выражения, характеризующие дифрагированное поле от отверстия могут быть получены из (2-5-14) при соответствующей замене.

3-2. ПЕРЕХОД ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Как показано в предыдущем параграфе, при падении электромагнитной энергии на поверхность раздела двух сред в общем случае только часть энергии переходит во вторую среду, а другая ее часть отражается, вызывая изменение структуры поля в первой среде. При этом электромагнитная энергия распространяется вдоль поверхности раздела в виде неоднородных волн.

На поверхности раздела двух сред, имеющих различные электромагнитные параметры, однородная волна может преобразоваться в неоднородную и наоборот.

В частности, однородная волна, падая на неоднородность в виде сферы, порождает неоднородную волну.

При исследовании общего случая распространения неоднородной электромагнитной волны постоянную распространения [см. выражение (2-1-11a)] следует рассматривать как волновой комплексный вектор. При этом напряженности электрического и магнитного полей плоской волны

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= E_m e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}; \\ \dot{H}_m &= \frac{E_m}{Z_0} e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}, \end{aligned} \right\} \quad (3-2-1)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3 x_3$ — радиус-вектор, определяющий положение исследуемой точки в пространстве;

$$\mathbf{k}' = \bar{\beta}' - j\bar{\alpha}' \quad (3-2-2)$$

— комплексный волновой вектор; Z_0 — волновое сопротивление среды.

Подчеркнем, что величины β' и α' совпадают с величинами β и α , определяемыми параметрами среды и частотой поля [см. выражения (2-1-11) и (2-7-12)], лишь в случае распространения однородной волны. В общем случае неоднородной волны величины β' и α' зависят не только от параметров сред и частоты поля, но и от условий возбуждения электромагнитного поля и характера неоднородностей сред; постоянная затухания α' при этом может определять убывание амплитуды не связанное с поглощением энергии поля. В частности, как показано ниже, в среде без потерь может возникнуть и распространяться неоднородная электромагнитная волна, у которой $\alpha' \neq 0$, однако поглощения энергии не происходит.

Пусть две однородных изотропных среды, из которых одна с потерями характеризуется параметрами $\tilde{\mu}_{a1}$, $\tilde{\epsilon}_{a1}$, а вторая без потерь характеризуется параметрами μ_{a2} , ϵ_{a2} , разделены плоской границей, совпадающей с плоскостью Ox_1x_2 (рис. 3-16). В первой среде распространяется плоская однородная электромагнитная волна с постоянной распространения

$$k_{(1)} = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_{a1} \tilde{\epsilon}_{a1}} = \beta_{(1)} - j\alpha_{(1)};$$

волна эта падает на плоскость раздела под углом θ , причем направление распространения лежит в плоскости координат $0x_2x_3$. Падающая волна возбуждает колебания связанных и свободных зарядов, находящихся на поверхности раздела. Амплитуды этих колебаний, как видно из рис. 3-16, различны и определяются множителем $e^{-\alpha_{(1)} x_2 \cos \theta}$.

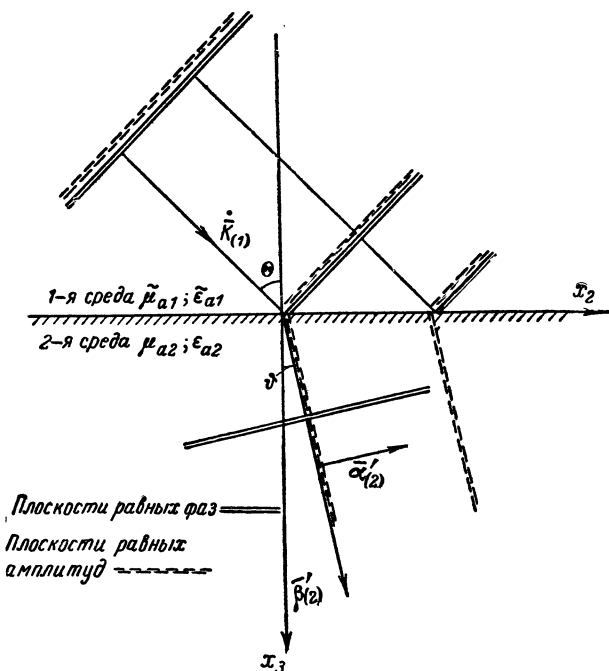


Рис. 3-16. Образование неоднородной волны в среде без потерь.

Во второй среде, не обладающей потерями, амплитуды поля прошедшей волны постоянны в плоскостях, перпендикулярных плоскости $x_2 0 x_3$ и совпадающих с направлением распространения. Вектор $\vec{\alpha}_{(2)}$, совпадающий с направлением затухания волны, перпендикулярен плоскости равных амплитуд, а величина его определяется потерями в первой среде и углом падения θ . Величина $\alpha_{(2)} \neq 0$, хотя потери во второй среде отсутствуют.

Плоскость равных фаз во второй среде из-за различия параметров также изменяет положение, причем век-

тор $\bar{\beta}'_{(2)}$, представляющий нормаль к этой плоскости и совпадающий с направлением распространения волны, перпендикулярен вектору $\bar{\alpha}'_{(2)}$. Таким образом, имеет место преобразование однородной волны в первой среде в неоднородную во второй среде с комплексным волновым вектором $\dot{\mathbf{k}}'_{(2)} = \bar{\beta}'_{(2)} - j\bar{\alpha}'_{(2)}$.

Скалярное произведение $(\dot{\mathbf{k}}' \mathbf{r})$ можно выразить через направляющие косинусы в следующем виде:

$$(\dot{\mathbf{k}}' \mathbf{r}) = \dot{k} \left[\frac{\beta' \cos(\bar{\beta}' \mathbf{e}_1) - j\alpha' \cos(\bar{\alpha}' \mathbf{e}_1)}{\dot{k}} x_1 + \frac{\beta' \cos(\bar{\beta}' \mathbf{e}_2) - j\alpha' \cos(\bar{\alpha}' \mathbf{e}_2)}{\dot{k}} x_2 + \frac{\beta' \cos(\bar{\beta}' \mathbf{e}_3) - j\alpha' \cos(\bar{\alpha}' \mathbf{e}_3)}{\dot{k}} x_3 \right].$$

Здесь мы ввели в числитель и знаменатель каждого слагаемого постоянную распространения $\dot{k} = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_a \tilde{\epsilon}_a} = \beta - j\alpha$, величина которой зависит от параметров среды и частоты поля.

Вводя в показатель выражений (3-2-1) параметры среды через косинусы комплексных углов

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta' \cos(\bar{\beta}' \mathbf{e}_1) - j\alpha' \cos(\bar{\alpha}' \mathbf{e}_1)}{\dot{k}} &= \cos \dot{\Omega}_1; \\ \frac{\beta' \cos(\bar{\beta}' \mathbf{e}_2) - j\alpha' \cos(\bar{\alpha}' \mathbf{e}_2)}{\dot{k}} &= \cos \dot{\Omega}_2; \\ \frac{\beta' \cos(\bar{\beta}' \mathbf{e}_3) - j\alpha' \cos(\bar{\alpha}' \mathbf{e}_3)}{\dot{k}} &= \cos \dot{\Omega}_3, \end{aligned} \right\} \quad (3-2-3)$$

получаем:

$$(\dot{\mathbf{k}}' \mathbf{r}) = \dot{k} (x_1 \cos \dot{\Omega}_1 + x_2 \cos \dot{\Omega}_2 + x_3 \cos \dot{\Omega}_3). \quad (3-2-4)$$

Если на плоскую поверхность раздела двух сред падает однородная плоская волна, то угол θ , образованный нормалью к поверхности раздела, направленной во вторую среду, и направлением распространения волны (направлением $\bar{\beta}$), называется углом падения. Плоскость, проведенная через нормаль к поверхности раздела и направление распространения падающей волны, называется плоскостью падения.

Падение плоской неоднородной волны формально характеризуется комплексным углом падения θ , образованным комплексным вектором $\mathbf{k}' = \bar{\beta}' - j\bar{\alpha}'$ и нормалью к поверхности раздела, направленной во вторую среду. В этом случае плоскостью падения называется плоскость, проведенная через вектор \mathbf{k}' и нормаль к поверхности раздела.

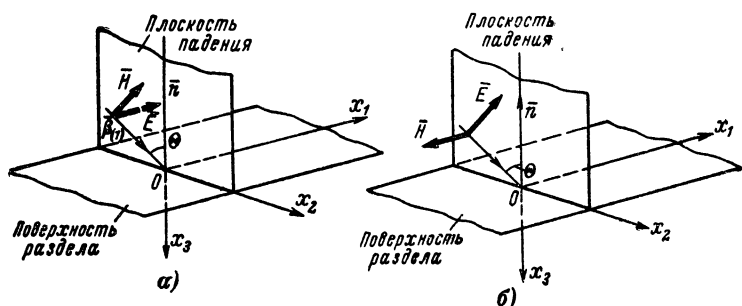


Рис. 3-17. Наклонное падение электромагнитной волны при ее горизонтальной (а) и вертикальной (б) поляризации.

Переход неоднородной плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k}'_{(1)} = \bar{\beta}'_{(1)} - j\bar{\alpha}'_{(1)}$ через поверхность раздела двух сред, постоянные распространения, в которых $\dot{k}_{(1)} = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_{a1} \tilde{\epsilon}_{a1}} = \beta_{(1)} - j\alpha_{(1)}$ и $\dot{k}_{(2)} = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_{a2} \tilde{\epsilon}_{a2}} = \beta_{(2)} - j\alpha_{(2)}$.

При этом возможны два случая: 1) горизонтальная поляризация падающей волны, т. е. когда ее вектор \mathbf{H} лежит в плоскости падения, а вектор \mathbf{E} перпендикулярен ей (рис. 3-17, а) и 2) вертикальная поляризация падающей волны, когда в плоскости падения лежит вектор \mathbf{E} , а вектор \mathbf{H} перпендикулярен ей (рис. 3-17, б).

Среду, в которой $x_3 < 0$ и распространяются падающая и отраженная волны, будем называть первой, а средоу, в которой $x_3 > 0$ и распространяется прошедшая волна — второй. Величины, относящиеся к этим средам, будем отмечать индексами «1» и «2»; при векторных величинах \mathbf{E} , \mathbf{H} , $\mathbf{\Pi}_0$ и \mathbf{k} эти индексы будем ставить в скобках, чтобы отличить их от составляющих по осям

координат x_i ($i=1, 2, 3$); в скобках будем ставить также индексы «1» и «2» при векторах скорости \mathbf{v} .

Значение напряженностей электрического и магнитного полей в первой среде определяются как суммы напряженностей соответствующих полей падающей и отраженной волн, т. е. $\mathbf{E}_{(2)} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_{(2)} = \mathbf{H} + \mathbf{H}_0$ [см. выражения (3-1-1)]. Поле во второй среде является прошедшей (преломленной) волной и характеризуется векторами $\mathbf{E}_{(2)}$ и $\mathbf{H}_{(2)}$. При этом частота поля отраженной

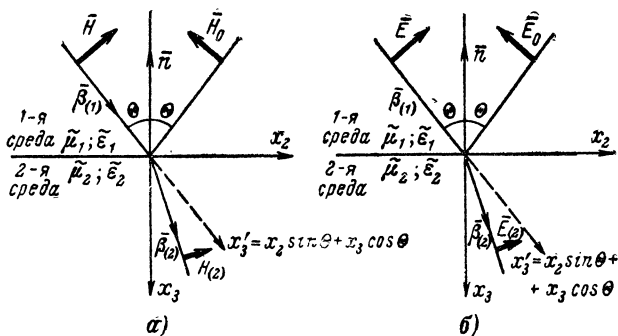


Рис. 3-18. Отражение и преломление электромагнитной волны при горизонтальной (а) и вертикальной (б) поляризации.

и прошедшей волн одинакова с частотой поля падающей волны (см. § 3-1).

При горизонтальной поляризации падающей волны (рис. 3-18, а) согласно формулам (3-2-3) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{\beta}'_{(1)} \mathbf{e}_1) &= 0; \cos(\bar{\alpha}'_{(1)} \mathbf{e}_1) = 0, \cos \bar{\Omega}_1 = 0; \\ \cos(\bar{\beta}'_{(1)} \mathbf{e}_2) &= \sin \theta_\beta; \cos(\bar{\alpha}'_{(1)} \mathbf{e}_2) = \sin \theta_\alpha; \\ \cos \bar{\Omega}_2 &= \frac{\beta'_{(1)} \sin \theta_\beta - j\alpha'_{(1)} \sin \theta_\alpha}{k_{(1)}} = \sin \bar{\theta}; \\ \cos(\bar{\beta}'_{(1)} \mathbf{e}_3) &= \cos \theta_\beta, \cos(\bar{\alpha}'_{(1)} \mathbf{e}_3) = \cos \theta_\alpha; \\ \cos \bar{\Omega}_3 &= \frac{\beta'_{(1)} \cos \theta_\beta - j\alpha'_{(1)} \cos \theta_\alpha}{k_{(1)}} = \cos \bar{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-3a)$$

Выражение (3-2-4) для этого случая принимает вид:

$$(\mathbf{k}'_{(1)} \mathbf{r}) = \dot{k}_{(1)} (x_2 \sin \dot{\theta} + x_3 \cos \dot{\theta}) \quad (3-2-5)$$

и поле падающей волны описывается выражениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{e}_1 E_m e^{-j\dot{k}_{(1)} (x_2 \sin \dot{\theta} + x_3 \cos \dot{\theta})} e^{j\omega t}; \\ \dot{\mathbf{H}} &= \frac{\text{rot } \dot{\mathbf{E}}}{-j\omega \tilde{\mu}_{a1}} = \frac{E}{Z_{01}} (\mathbf{e}_2 \cos \dot{\theta} - \\ &- \mathbf{e}_3 \sin \dot{\theta}) e^{-j\dot{k}_{(1)} (x_2 \sin \dot{\theta} + x_3 \cos \dot{\theta})} e^{j\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (3-2-6)$$

где согласно формуле (2-7-14)

$$\begin{aligned} Z_{01} &= \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a1}}} = |Z_{01}| e^{j\varphi_1}; \\ |Z_{01}| &= \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} \sqrt{\frac{\cos \delta_{\partial 1}}{\cos \delta_{\mathbf{M}1}}}; \\ \varphi_1 &= \frac{\delta_{\partial 1} - \delta_{\mathbf{M}1}}{2}. \end{aligned}$$

Поле падающей волны от x_1 не зависит. Поэтому из условия симметрии очевидно, что и вторичное поле не зависит от x_1 . Это означает, что отраженная и прошедшая волны также распространяются в плоскости падения.

Обозначим $\dot{\theta}_0$ угол, образуемый комплексным волновым вектором отраженной волны с положительным направлением оси x_3 , а $\dot{\theta}$ — угол преломления — угол, образуемый комплексным вектором $\mathbf{k}'_{(2)}$ прошедшей волны с положительным направлением оси x_3 . Так как отраженная волна распространяется в той же среде, что и падающая, аналогично (3-2-6) будем иметь выражения для отраженной волны

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_0 &= \mathbf{e}_1 \dot{E}_{m0} e^{-j\dot{k}_{(1)} (x_2 \sin \dot{\theta}_0 + x_3 \cos \dot{\theta}_0)} e^{j\omega t}; \\ \dot{\mathbf{H}}_0 &= \frac{E_{m0}}{Z_{01}} (\mathbf{e}_2 \cos \dot{\theta}_0 - \mathbf{e}_3 \sin \dot{\theta}_0) \times \\ &\times e^{-j\dot{k}_{(1)} (x_2 \sin \dot{\theta}_0 + x_3 \cos \dot{\theta}_0)} e^{j\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (3-2-7)$$

и для прошедшей

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{(2)} &= \mathbf{e}_1 \dot{E}_{m(2)} e^{-j\dot{k}_{(2)} (x_2 \sin \dot{\vartheta} + x_3 \cos \dot{\vartheta})} e^{j\omega t}; \\ \dot{\mathbf{H}}_{(2)} &= \frac{\dot{E}_{m(2)}}{Z_{02}} (\mathbf{e}_2 \cos \dot{\vartheta} - \mathbf{e}_3 \sin \dot{\vartheta}) \times \\ &\times e^{-j\dot{k}_{(2)} (x_2 \sin \dot{\vartheta} + x_3 \cos \dot{\vartheta})} e^{j\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (3-2-8)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{02} &= \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} = |Z_{02}| e^{j\varphi_2}; \\ |Z_{02}| &= \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon_{a2}}} \sqrt{\frac{\cos \delta_{\vartheta 2}}{\cos \delta_{m2}}}; \\ \varphi_2 &= \frac{\delta_{\vartheta 2} - \delta_{m2}}{2}. \end{aligned}$$

На основании выражений (3-2-3) и (3-2-3а)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta'_{(2)} \sin \vartheta_{\beta} - j\alpha'_{(2)} \sin \vartheta_{\alpha}}{\dot{k}_2} &= \sin \dot{\vartheta}; \\ \frac{\beta'_2 \cos \vartheta_{\beta} - j\alpha'_{(2)} \cos \vartheta_{\alpha}}{\dot{k}_{(2)}} &= \cos \dot{\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-8a)$$

Из формул (3-2-6), (3-2-7) и (3-2-8) следует, что плоскости равных амплитуд и равных фаз в падающей, отраженной и прошедшей волнах не совпадают, так как они определяются различными выражениями. Действительно, мнимые части комплексных

$$\begin{aligned} j\dot{k}_{(1)} (x_2 \sin \dot{\vartheta} + x_3 \cos \dot{\vartheta}), \quad j\dot{k}_{(1)} (x_2 \sin \dot{\vartheta}_0 + x_3 \cos \dot{\vartheta}_0) \text{ и} \\ j\dot{k}_{(2)} (x_2 \sin \dot{\vartheta} + x_3 \cos \dot{\vartheta}), \end{aligned}$$

приравненные постоянной величине, определяют плоскости равных фаз, а вещественные части — плоскости равных амплитуд. Таким образом, неоднородная падающая волна в общем случае вызывает неоднородные отраженную и прошедшую волны.

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих вектора \mathbf{E} на границе двух сред, т. е. $\dot{E}_{\tau(1)} = \dot{E}_{\tau(2)}$ при $x_3=0$, с учетом выражений (3-2-6), (3-2-7) и (3-2-8) получаем:

$$E_m e^{-i\dot{k}_{(1)} x_2 \sin \dot{\theta}} + \dot{E}_{m0} e^{-i\dot{k}_{(1)} x_2 \sin \dot{\theta}_0} = \dot{E}_{m(2)} e^{-i\dot{k}_{(2)} x_2 \sin \dot{\theta}}. \quad (3-2-9)$$

Так как амплитуды E_m , \dot{E}_{m0} , $\dot{E}_{m(2)}$ от x_2 не зависят, то это уравнение удовлетворяется при любых значениях x_2 , если

$$\dot{k}_{(1)} \sin \dot{\theta} = \dot{k}_{(1)} \sin \dot{\theta}_0 = \dot{k}_{(2)} \sin \dot{\theta}. \quad (3-2-10)$$

Отсюда следует: 1) угол отражения $\pi - \dot{\theta}_0$, образованный нормалью к поверхности раздела и комплексным вектором \mathbf{k}'_0 отраженной волны, равен углу падения, т. е.

$$(\pi - \dot{\theta}_0) = \dot{\theta}; \quad (3-2-11)$$

2) углы падения и преломления связаны отношением

$$\frac{\sin \dot{\theta}}{\sin \dot{\theta}} = \frac{\dot{k}_{(1)}}{\dot{k}_{(2)}}. \quad (3-2-12)$$

Для случая падения однородной волны на поверхность раздела сред без потерь выражения (3-2-11) и (3-2-12) представляют законы Снеллиуса.

На основании (3-2-10) выражение (3-2-9) может быть переписано в следующем виде:

$$E_m + \dot{E}_{m0} = \dot{E}_{m(2)}. \quad (3-2-13)$$

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих вектора \mathbf{H} на границе сред, когда поверхностный ток равен нулю [см. выражение (1-5-9)], согласно выражениям (3-1-1), (3-2-6) и (3-2-8) с учетом (3-2-11) получим:

$$(H_m - \dot{H}_{m0}) \cos \dot{\theta} = \dot{H}_{m(2)} \cos \dot{\theta}. \quad (3-2-13a)$$

Явления отражения и прохождения волны через границу двух сред при горизонтальной поляризации удобно характеризовать коэффициентами отражения и прохождения по электрическому полю

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_E &= \frac{\dot{E}_{m0}}{E_m} \Big|_{x_2=0}; \\ \dot{P}_E &= \frac{\dot{E}_{m(2)}}{E_m} \Big|_{x_2=0}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-14)$$

Преобразуя выражения (3-2-13) и (3-2-13а) с учетом (3-2-14), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Gamma}_E &= \frac{(Z_{02}/Z_{01}) \cos \dot{\theta} - \cos \dot{\theta}}{(Z_{02}/Z_{01}) \cos \dot{\theta} + \cos \dot{\theta}}; \\ \dot{P}_E &= \frac{2(Z_{02}/Z_{01}) \cos \dot{\theta}}{(Z_{02}/Z_{01}) \cos \dot{\theta} + \cos \dot{\theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-15)$$

Выражения (3-2-15) для случая падения однородной волны на поверхность раздела двух сред без потерь называются *формулами Френеля*.

Характеристики поля в первой среде найдем, подставляя в (3-1-1) уравнения (3-2-6) и (3-2-7); с учетом выражений (3-2-11) и (3-2-14) и используя первую формулу (Д-5-2), будем иметь:

$$\begin{aligned} E_{m(1)} = e_1 E_m \left[(1 - \dot{\Gamma}_E) e^{-j\dot{k}_{(1)} (x_2 \sin \dot{\theta} + x_3 \cos \dot{\theta})} + \right. \\ \left. + 2\dot{\Gamma}_E \cos (\dot{k}_{(1)} x_3 \cos \dot{\theta}) e^{-j\dot{k}_{(1)} x_2 \sin \dot{\theta}} \right]. \end{aligned} \quad (3-2-16)$$

На основании первого выражения (3-2-8) с учетом (3-2-14) напряженность электрического поля во второй среде

$$\dot{E}_{m(2)} = e_1 E_m \dot{P}_E e^{-j\dot{k}_{(2)} (x_2 \sin \dot{\theta} + x_3 \cos \dot{\theta})}. \quad (3-2-17)$$

Формулы (3-2-16) и (3-2-17) являются решениями нашей задачи; они выражают напряженность электрического поля в первой и второй средах через заданные характеристики падающей волны и параметры сред.

При вертикальной поляризации падающей волны вектор \mathbf{H} перпендикулярен плоскости падения (рис. 3-18, б) и выражения для падающей волны имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= e_1 H_m e^{-j\dot{k}_{(1)} (x_2 \sin \dot{\theta} + x_3 \cos \dot{\theta})} e^{j\omega t}; \\ \dot{\mathbf{E}} &= -H_m Z_{01} (e_2 \cos \dot{\theta} - e_3 \sin \dot{\theta}) \times \\ &\times e^{-j\dot{k}_{(1)} (x_2 \sin \dot{\theta} + x_3 \cos \dot{\theta})} e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-18)$$

Обращаясь к выражениям (3-2-6), видим, что выражения (3-2-18) могут быть получены из (3-2-6) при замене

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &\rightarrow \dot{\mathbf{H}}; \\ E_m &\rightarrow H_m; \\ \frac{1}{Z_{01}} &\rightarrow -Z_{01}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-18a)$$

Если произвести аналогичную замену в выражениях (3-2-7) и (3-2-8), то получим выражения поля отраженной и преломленной волн при вертикальной поляризации. Следовательно, законы (3-2-11) и (3-2-12) действительны при любой поляризации.

В случае вертикальной поляризации поле удобнее характеризовать коэффициентами отражения и прохождения по магнитному полю

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Gamma}_H &= \frac{\dot{H}_{m0}}{H_m} \Big|_{x_3=0}; \\ \dot{P}_H &= \frac{\dot{H}_{m(2)}}{H_m} \Big|_{x_3=0}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-14a)$$

Аналогично формулам (3-2-15) при вертикальной поляризации имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Gamma}_H &= - \frac{(Z_{02}/Z_{01}) \cos \dot{\theta} - \cos \dot{\theta}}{(Z_{02}/Z_{01}) \cos \dot{\theta} + \cos \dot{\theta}}; \\ \dot{P}_H &= \frac{2 \cos \dot{\theta}}{\frac{Z_{02}}{Z_{01}} \cos \dot{\theta} + \cos \dot{\theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-15a)$$

Из выражения (3-2-16) следует, что при падении плоской электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред поле в первой среде в общем случае является неоднородной волной и может рассматриваться как поле двух волн. Одна из них распространяется в направлении падения, а вторая — вдоль поверхности раздела (в направлении оси x_2). Фазы и амплитуды обеих волн имеют сложную зависимость от угла падения, координат и параметров обеих сред.

Из выражения (3-2-17) следует, что поле во второй среде в общем случае также имеет сложную структуру и здесь также возможно возникновение поля неоднородной волны.

Частным случаем неоднородной волны является поверхностная волна, описываемая выражением

$$\begin{aligned}\dot{E}_m &= \mathbf{e}_1 E_m e^{-\alpha'(px_2+x_3)} e^{-j\beta'(x_2+qx_3)} \approx \\ &\approx \mathbf{e}_1 E_m e^{-\alpha'x_3} e^{-j\beta'x_2},\end{aligned}\quad (3-2-19)$$

в котором $p \ll 1$ и $q \ll 1$.

Поверхностная волна представляет электромагнитное поле, сосредоточенное у поверхности раздела двух сред («явление прилипания») и распространяющееся преимущественно вдоль поверхности раздела (вдоль оси x_2), т. е. фронт волны перпендикулярен или почти перпендикулярен поверхности раздела. Амплитуда этого поля медленно убывает с ростом x_2 и быстро — с ростом x_3 .

Уравнения (3-2-16) и (3-2-17) могут принять вид (3-2-19) в двух случаях:

1) $\Gamma=0$ («полное прохождение») — поверхностная волна возникает в первой, не обладающей потерями среде, при падении неоднородной волны на поверхность второй проводящей среды;

2) $|\Gamma|=1$ («полное внутреннее отражение») — поверхностная волна возникает во второй непроводящей среде при падении однородной волны, распространяющейся в первой также непроводящей среде, более плотной в электромагнитном смысле, т. е. когда $\mu_1\epsilon_1 > \mu_2\epsilon_2$.

Следовательно, поверхностная волна в общем случае возникает у поверхности раздела двух сред, в которых фазовые скорости и волновые сопротивления различны ($v_{(1)} \neq v_{(2)}$ и $Z_{01} \neq Z_{02}$; здесь $v_{(1)}$ и $v_{(2)}$ — фазовые скорости, определяемые параметрами μ_a , ϵ_a и σ соответствующей среды). Поверхностная волна возникает в среде, в которой эта скорость больше, причем скорость распространения самой поверхностной волны лежит между значениями $v_{(1)}$ и $v_{(2)}$. В связи с этим поверхностная волна может рассматриваться как «замедленная» волна по отношению к среде, в которой она распространяется. Плоская поверхность раздела двух сред, вызывающая поверхностную волну, является простейшей «замедляющей системой».

Полное прохождение электромагнитной волны через поверхность раздела двух сред имеет место при $\Gamma=0$ и $\dot{R}=1$. При вертикальной поляризации волны уравнения, описывающие поле в первой и второй средах, согласно (3-2-16), (3-2-17) и (3-2-18а) при условии $\dot{\Gamma}_H=0$ принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{m(1)} &= \mathbf{e}_1 H e^{-jk_{(1)}(x_2 \sin \dot{\theta} + x_3 \cos \dot{\theta})}; \\ \dot{\mathbf{H}}_{m(2)} &= \mathbf{e}_1 H_m e^{-jk_{(2)}(x_2 \sin \dot{\theta} + x_3 \cos \dot{\theta})}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-20)$$

На основании выражений (3-2-12) и (3-2-15а) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \sin \dot{\theta} &= \frac{\dot{k}_{(1)}}{\dot{k}_{(2)}} \sin \dot{\theta}; \\ \cos \dot{\theta} &= \frac{Z_{01}}{Z_{02}} \cos \dot{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-21)$$

Решая эту систему уравнений, получаем значение угла $\dot{\theta}$, при котором может наблюдаться полное прохождение неоднородной волны:

$$\left. \begin{aligned} \sin \dot{\theta} &= \sqrt{\frac{1 - (Z_{02}/Z_{01})^2}{1 - (Z_{02}/Z_{01})^2 \left(\frac{\dot{k}_{(1)}}{\dot{k}_{(2)}} \right)^2}} = a + jb; \\ \cos \dot{\theta} &= \frac{Z_{02}}{Z_{01}} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\dot{k}_{(1)}}{\dot{k}_{(2)}} \right)^2}{1 - (Z_{02}/Z_{01})^2 \left(\frac{\dot{k}_{(1)}}{\dot{k}_{(2)}} \right)^2}} = p + jq. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-22)$$

Из выражений (3-2-22) следует, что полное прохождение через поверхность раздела двух сред однородной волны, т. е. в случае $\dot{\theta} = \theta$, возможно, если обе среды не обладают потерями или если $\Phi_1 = \Phi_2$ и $\frac{\alpha_{(1)}}{\beta_{(1)}} = \frac{\alpha_{(2)}}{\beta_{(2)}}$.

Для случая полного прохождения уравнения (3-2-3а) и (3-2-8а) с учетом выражений (3-2-21) и (3-2-22) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_{(1)} \sin \dot{\theta} &= \dot{k}_{(1)} (a + jb) = \\ &= \beta'_{(1)} \sin \theta_{\beta} - j\alpha'_{(1)} \sin \theta_{\alpha}; \\ \dot{k}_{(1)} \cos \dot{\theta} &= \dot{k}_{(1)} (p + jq) = \\ &= \beta'_{(1)} \cos \theta_{\beta} - j\alpha'_{(1)} \cos \theta_{\alpha}; \\ \dot{k}_{(2)} \sin \dot{\theta} &= \dot{k}_{(1)} (a + jb) = \\ &= \beta'_{(2)} \sin \theta_{\beta} - j\alpha'_{(2)} \sin \theta_{\alpha}; \end{aligned} \right\} \quad (3-2-23)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_{(2)} \cos \dot{\vartheta} &= \dot{k}_{(2)} (p + jq) \frac{Z_{01}}{Z_{02}} = \\ &= \beta'_{(2)} \cos \vartheta_{\beta} - j\alpha'_{(2)} \cos \vartheta_{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-23)$$

Эти уравнения позволяют определить по параметрам сред и по частоте поля действительные углы, образованные векторами $\vec{\beta}'$ и $\vec{\alpha}'$ с нормалью к поверхности раздела. Подставляя (3-2-23) в уравнения (3-2-20), получим выражения, определяющие напряженности магнитного поля в первой и второй средах через действительные углы падения и преломления:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{m(1)} &= \mathbf{e}_1 H_m e^{-\alpha'_{(1)} (x_2 \sin \theta_{\alpha} + x_3 \cos \theta_{\alpha})} \times \\ &\times e^{-j\beta'_{(1)} (x_2 \sin \theta_{\beta} + x_3 \cos \theta_{\beta})}, \\ \dot{\mathbf{H}}_{m(2)} &= \mathbf{e}_1 H_m e^{-\alpha'_{(2)} (x_2 \sin \theta_{\alpha} + x_3 \cos \theta_{\alpha})} \times \\ &\times e^{-j\beta'_{(2)} (x_2 \sin \theta_{\beta} + x_3 \cos \theta_{\beta})}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-20a)$$

Из последних выражений следует, что электромагнитные поля в первой и второй средах в общем случае являются неоднородными волнами с продольной составляющей вектора \mathbf{E} при вертикальной поляризации падающей волны. Плоскости равных фаз и амплитуд в первой среде определяются выражениями

$$\beta'_{(1)} (x_2 \sin \theta_{\beta} + x_3 \cos \theta_{\beta}) = \text{const}; \quad \alpha'_{(1)} (x_2 \sin \theta_{\alpha} + x_3 \cos \theta_{\alpha}) = \text{const}$$

и во второй среде выражениями

$$\beta'_{(2)} (x_2 \sin \theta_{\beta} + x_3 \cos \theta_{\beta}) = \text{const}; \quad \alpha'_{(2)} (x_2 \sin \theta_{\alpha} + x_3 \cos \theta_{\alpha}) = \text{const}.$$

Полное прохождение при горизонтальной поляризации имеет место, когда $\Gamma_E = 0$, и характеризуется оно выражениями (3-2-20), в которых H_m заменено на E_m и $\mathbf{H}_{m(1)}$, $\mathbf{H}_{m(2)}$ соответственно на $\mathbf{E}_{m(1)}$ и $\mathbf{E}_{m(2)}$. На основании формул (3-2-12) и (3-2-15) для этого случая

$$\left. \begin{aligned} \sin \dot{\vartheta} &= \frac{\dot{k}_{(1)}}{\dot{k}_{(2)}} \sin \dot{\vartheta}, \\ \cos \dot{\vartheta} &= \frac{Z_{02}}{Z_{01}} \cos \dot{\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-21a)$$

Сравнивая эти равенства с (3-2-21), видим, что для случая горизонтальной поляризации формулы (3-2-22) имеют тот же вид с заменой $\frac{Z_{01}}{Z_{02}}$ на $\frac{Z_{02}}{Z_{01}}$.

При горизонтальной поляризации поле характеризуется продольной составляющей вектора \mathbf{H} .

Из выражений (3-2-20а) следует, что фазовые скорости в первой и второй средах имеют составляющие по x_2 и x_3 ; определяются эти скорости следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} v'_{(1)} &= \frac{\omega}{\beta'_{(1)}}, \quad v'_{2(1)} = \frac{\omega}{\beta'_{(1)} \sin \theta_\beta}, \quad v'_{3(1)} = \frac{\omega}{\beta'_{(1)} \cos \theta_\beta}; \\ v'_{(2)} &= \frac{\omega}{\beta'_{(2)}}, \quad v'_{2(2)} = \frac{\omega}{\beta'_{(2)} \sin \vartheta_\beta}, \quad v'_{3(2)} = \frac{\omega}{\beta'_{(2)} \cos \vartheta_\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-24)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

С л у ч а й 1. $Z_{02}=Z_{01}$, $k_{(1)} \neq k_{(2)}$.

Из формул (3-2-22) и (3-2-23) следует, что при этом условии $\dot{\theta}=\theta_\beta=\theta_\alpha=0$, $\dot{\vartheta}=\vartheta_\beta=\vartheta_\alpha=0$, $\beta'_{(1)}=\beta_{(1)}$, $\alpha'_{(1)}=\alpha_{(1)}$, $\beta'_{(2)}=\beta_{(2)}$, $\alpha'_{(2)}=\alpha_{(2)}$; поэтому показатели в выражениях (3-2-20а) имеют вид:

$$-j\dot{k}_{(1)}(x_2 \sin \dot{\theta} + x_3 \cos \dot{\theta}) = -j\beta_{(1)}x_3 - \alpha_{(1)}x_3;$$

$$-j\dot{k}_{(2)}(x_2 \sin \dot{\vartheta} + x_3 \cos \dot{\vartheta}) = -j\beta_{(2)}x_3 - \alpha_{(2)}x_3.$$

Это означает, что при равенстве волновых сопротивлений обеих сред полное прохождение (без отражения) имеет место при нормальном падении однородной волны на поверхность раздела. Скорости распространения поля в обеих средах при этом различны, так как $k_{(1)} \neq k_{(2)}$. Согласно (1-6-19) поверхность раздела испытывает давление по нормали.

С л у ч а й 2. $k_{(1)}=k_{(2)}$, $Z_{01} \neq Z_{02}$.

В этом случае из выражений (3-2-22) и (3-2-23) следует, что

$$\dot{\theta}=\theta_\beta=\theta_\alpha=\frac{\pi}{2}, \quad \dot{\vartheta}=\vartheta_\beta=\vartheta_\alpha=\frac{\pi}{2},$$

$$\beta'_{(1)}=\beta_{(1)}, \quad \alpha'_{(1)}=\alpha_{(1)}, \quad \beta'_{(2)}=\beta_{(2)}, \quad \alpha'_{(2)}=\alpha_{(2)};$$

показатели в выражениях (3-2-20а) поэтому имеют вид:

$$-j\dot{k}_{(1)}(x_2 \sin \dot{\theta} + x_3 \cos \dot{\theta}) = -j\beta_{(1)}x_2 - \alpha_{(1)}x_2;$$

$$-j\dot{k}_{(2)} (\dot{x}_2 \sin \dot{\vartheta} + \dot{x}_3 \cos \dot{\vartheta}) = -j\beta_{(2)} \dot{x}_2 - \alpha_{(2)} \dot{x}_3.$$

Это означает, что при равенстве постоянных распространения в обеих средах отражение отсутствует в случае однородной волны, распространяющейся параллельно поверхности раздела. Векторы **E** и **H** при этом лежат в плоскости $x_1 0 x_3$, причем вектор **E** нормален к поверхности раздела, на которой он испытывает скачок (т. е. при $x_3=0$)

$$\dot{\mathbf{E}}_{m(1)} - \dot{\mathbf{E}}_{m(2)} = \dot{\mathbf{H}}_m (Z_{01} - Z_{02}).$$

В случае горизонтальной поляризации вектор **H** нормален к поверхности раздела и испытывает скачок при $x_3=0$. Так как скорости распространения в обеих средах одинаковы и направлены параллельно поверхности раздела, то эта поверхность не испытывает давления.

С л у ч а й 3. Обе среды без потерь $Z_{01} > Z_{02}$ и $\epsilon_2 > \epsilon_1$. В этом случае

$$\dot{k}_{(1)} = \beta_{(1)} = \omega \sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}}, \quad \alpha_{(1)} = 0, \quad Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}};$$

$$\dot{k}_{(2)} = \beta_{(2)} = \omega \sqrt{\mu_{a2} \epsilon_{a2}}, \quad \alpha_{(2)} = 0 \text{ и } Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon_{a2}}}.$$

Подставляя значения $k_{(1)}$, $k_{(2)}$, Z_{01} , Z_{02} в формулы (3-2-22) и (3-2-23), будем иметь при вертикальной поляризации

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{Z_{02}}{Z_{01}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2}}; \\ \sin \vartheta &= \frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{Z_{02}}{Z_{01}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-25)$$

Это означает, что полное прохождение в этом случае может иметь место при однородной волне и угле падения θ , определяемом формулами (3-2-25). Если $\mu_2 = \mu_1 = 1$, то

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta^{(B)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}; \\ \operatorname{tg} \theta^{(B)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \end{aligned} \right\} \quad (3-2-26)$$

при этом $\theta^{(B)} + \theta^{(B)} = \frac{\pi}{2}$, т. е. отраженный и преломленный лучи нормальны друг другу. Угол $\theta^{(B)}$ называется углом Брюстера (см. рис. 3-24, б и д).

В качестве примера определим угол Брюстера при переходе электромагнитной волны из атмосферы в воду. При сантиметровых и более длинных волнах $\varepsilon_2 \approx 80$; следовательно, для волн такой длины $\sin \theta^{(B)} \approx 1$ и $\theta^{(B)} \approx 90^\circ$. При волнах оптического диапазона $\varepsilon_2 \approx 1,6$ (см. § 1-2) и, следовательно $\sin \theta^{(B)} \approx 0,78$ и $\theta^{(B)} \approx 50^\circ$. Таким образом, при частотах $f < 10^{10}$ гц вертикально поляризованная падающая волна отражается от водной поверхности практически при любом значении угла падения. При более высоких частотах отражение отсутствует, если угол падения $\theta \approx 50^\circ$.

При горизонтальной поляризации первая формула (3-2-25) для угла θ принимает вид:

$$\sin \theta \approx \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{Z_{01}}{Z_{02}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}}. \quad (3-2-25a)$$

Из этого выражения следует, что при $\mu_1 = \mu_2 = 1$ в случае горизонтальной поляризации полное прохождение не имеет места. В результате этого при падении на границу раздела двух сред под углом $\theta^{(B)}$ волны с любой линейной, круговой или эллиптической поляризацией будет возникать отраженная волна с горизонтальной поляризацией. В связи с этим угол $\theta^{(B)}$ [см. выражения (3-2-26)] называют также углом полной поляризации.

Для случая полного прохождения электромагнитной волны вертикальной поляризации через поверхность раздела двух сред без потерь выражения (3-2-20) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{m(1)} &= \mathbf{e}_1 H_m e^{-j\beta_1 (x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)}; \\ \mathbf{H}_{m(2)} &= \mathbf{e}_1 H_m e^{-j\beta_2 (x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-27)$$

Это означает, что при условии, определяемом формулами (3-2-25), электромагнитное поле имеет структуру однородной волны.

Полное прохождение электромагнитной волны через поверхность раздела двух сред без потерь возможно при любом угле падения (рис. 3-24, в), если $\mu_1 = \mu_2$ и $\epsilon_1 = \epsilon_2$. Действительно, согласно соотношению (3-2-12) при $k_1 = k_2$ угол преломления равен углу падения ($\theta = \theta$) и согласно формулам (3-2-15) и (3-2-15а) при $Z_{01} = Z_{02}$

$$\Gamma_E = \Gamma_H = 0.$$

Если первой средой является вакуум или атмосфера, то пластина из материала с параметрами $\mu_2 \approx 1$ и $\epsilon_2 \approx 1$ является полностью прозрачной для электромагнитного поля при любом угле падения. Заметим, что та же пластина в другой среде, электромагнитные параметры которой отличаются от вакуума, не будет полностью прозрачной.

Примером диэлектрика с параметрами $\mu_2 \approx 1$ и $\epsilon_2 \approx 1$ является пенополистирол, применяемый для изготовления «радиопрозрачных» оболочек антенн сантиметрового диапазона. В оптическом диапазоне этот материал является непрозрачным, поскольку параметры его при оптических частотах не отвечают условиям прохождения электромагнитного поля без отражения и поглощения.

С л у ч а й 4. Первая среда без потерь, вторая среда — проводник, т. е. $\operatorname{tg} \delta_{s2} = \frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_{a2}} \gg 10$.

Будем полагать, что $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$, как это имеет место во многих важных практических случаях. Для проводника даже с малой проводимостью $\sigma_2 \approx 10^6$ см/м условие $\operatorname{tg} \delta_{s2} \gg 10$ выполняется при

$$f \leq \frac{1,8 \cdot 10^{15}}{\epsilon_2} [\text{гц}],$$

и неудовлетворяется лишь при частотах, для которых среды нельзя рассматривать как «сплошные».

На основании выражений (2-7-24а) и (2-7-26) в данном случае

$$\dot{k}_{(1)} = \beta_{(1)} = \omega \sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}} = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}};$$

$$k_{(2)} \approx \beta_{(2)} \sqrt{2} e^{-j \frac{\pi}{4}}, \quad \beta_{(2)} \approx \alpha_{(2)} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2} \sigma_2}{2}};$$

$$Z_{02} = |Z_{02}| e^{j\varphi_2}, \quad |Z_{02}| = \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2}}{\sigma_2}}, \quad \varphi_2 \approx \frac{\pi}{4}.$$

Так как $\operatorname{tg} \delta_{a2} \geq 10$, а $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$, то

$$\left(\frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}} \right)^2 \left(\frac{|Z_{02}|}{\sqrt{2} Z_{01}} \right)^2 = \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \operatorname{ctg} \delta_{a2} \right]^2 \ll 1.$$

При этом выражения (3-2-22) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - j \left(\frac{|Z_{02}|}{Z_{01}} \right)^2} &\approx (a + jb); \\ \left(\frac{|Z_{02}|}{Z_{01}} \right) e^{j \frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - j \left(\frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)} \sqrt{2}} \right)^2} &\approx (p + jq). \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получаем: $a \approx +1$,

$$p \approx \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|Z_{02}|}{Z_{01}} \right) < \frac{1}{10}, \quad b \approx -p^2, \quad q \approx p.$$

Подставляя эти значения в уравнения (3-2-23), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \beta'_{(1)} &\approx \beta_{(1)} \sqrt{1 + p^2}; \quad \sin \theta_\beta \approx \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}; \\ \cos \theta_\beta &\approx \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}; \\ \alpha'_{(1)} &\approx \beta_{(1)} p \sqrt{1 + p^2}; \quad \sin \theta_\alpha \approx \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}; \\ \cos \theta_\alpha &\approx -\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}; \\ \beta'_{(2)} &\approx \beta_{(2)} \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}} \right)^2}; \\ \sin \theta_\beta &\approx \frac{\beta_{(1)} / \beta_{(2)}}{\sqrt{1 + (\beta_{(1)} / \beta_{(2)})^2}}; \end{aligned} \right\} \quad (3-2-28)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta_{\beta} &\approx \frac{1}{\sqrt{1 + (\beta_{(1)}/\beta_{(2)})^2}}; \\ \alpha'_{(2)} &\approx \beta_{(2)} \sqrt{1 + p^4 \left(\frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}} \right)^2}, \\ \sin \vartheta_{\alpha} &\approx \frac{p^2 \beta_{(1)}/\beta_{(2)}}{\sqrt{1 + p^4 (\beta_{(1)}/\beta_{(2)})^2}}, \\ \cos \vartheta_{\alpha} &\approx \frac{1}{\sqrt{1 + p^4 (\beta_{(1)}/\beta_{(2)})^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-28)$$

Подставляя (3-2-28) в (3-2-20а), получаем выражения, описывающие поле в первой и второй средах для данного случая:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{m(1)} &= \mathbf{e}_1 H_m e^{-\beta_{(1)} p(x_2 - x_3)} e^{-j\beta_{(1)}(x_2 + px_3)}, \\ \mathbf{H}_{m(2)} &= \mathbf{e}_1 H_m e^{-\beta_{(2)} \left(p^2 \frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}} x_2 + x_3 \right)} \times \\ &\quad \times e^{-j\beta_{(2)} \left(\frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}} x_2 + x_3 \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-29)$$

Из этих выражений следует, что в обеих средах поле представляет собой неоднородные волны. При $p \ll 1$ и $\beta_{(1)}/\beta_{(2)} \ll 1$ выражения (3-2-29) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{m(1)} &\approx \mathbf{e}_1 H_m e^{\beta_{(1)} px_3} e^{-j\beta_{(1)} x_2}, \\ \dot{H}_{m(2)} &\approx \mathbf{e}_1 H_m e^{-\beta_{(2)} x_3} e^{-j\beta_{(2)} x_3}, \end{aligned} \right\} \quad (3-2-29a)$$

Следовательно, в этом случае поле в первой среде является неоднородной поверхностной волной, распространяющейся вдоль поверхности раздела, а поле во второй среде является однородной волной, распространяющейся по нормали к поверхности раздела.

Из выражений (3-2-29) следует, что амплитуда поля уменьшается в e раз на расстоянии $|x_3|_{(1)} = \frac{1}{\beta_{(1)} p}$ от поверхности раздела в первой среде и на расстоянии $|x_3|_{(2)} = \frac{1}{\beta_{(2)}}$ во второй среде. Если первой средой является воздух (вакуум), а второй средой проводник

($\sigma_2 \geq 10^6$ см/м), то $\frac{|x_3|_{(1)}}{|x_3|_{(2)}} \geq 6 \cdot 10^7 \lambda$; следовательно, область, занятая полем в первой среде, значительно больше области, занятой полем во второй среде (даже в случае самых коротких волн, при которых среда может рассматриваться еще как «сплошная»).

Взаимное расположение плоскостей равных фаз и равных амплитуд в обеих средах показано на рис. 3-19. Из этого рисунка следует, что в данном случае (первая

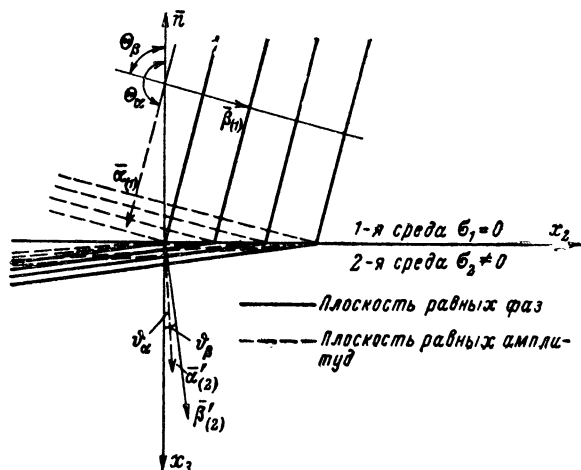


Рис. 3-19. Переход неоднородной волны через поверхность проводящей среды.

среда без потерь, вторая — проводник) плоскость равных фаз падающей волны почти перпендикулярна к поверхности раздела, а плоскость равных амплитуд почти параллельна ей.

Подставляя в выражения (3-2-24) значения соответствующих величин из (3-2-28), находим фазовые скорости в первой и второй средах

$$\left. \begin{aligned} v'_{(1)} &\approx \frac{v_{(1)}}{\sqrt{1+p^2}}; \\ v'_{(2)} &\approx \frac{v_{(2)}}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3-2-30)$$

Здесь $v_{(1)} = \omega/\beta_{(1)}$ и $v_{(2)} = \omega/\beta_{(2)}$ — фазовые скорости в неограниченных средах с теми же параметрами μ_a , ϵ_a и σ . Отсюда следует, что фазовая скорость поверхностной волны, распространяющейся в диэлектрической среде, около проводящей поверхности, меньше, чем в неограниченной среде; следовательно, по отношению к этой среде поверхностная волна является замедленной

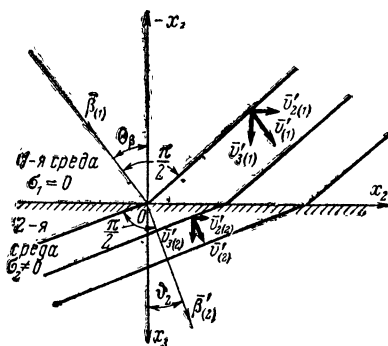


Рис. 3-20. Составляющие скорости распространения неоднородных волн.

В данном случае замедляющей системой служит поверхность раздела непроводящей и проводящей сред. В дальнейшем будут показаны условия, при которых возникает поверхностная замедленная волна на поверхности раздела двух непроводящих сред. Из выражения (3-2-24) также следует, что фазовые скорости, а следовательно, и длины волн зависят от действительных величин углов падения θ_p и преломления θ_p (рис. 3-20).

Воспользовавшись выражениями (3-2-29) и уравнением I системы (2-1-5), найдем составляющие вектора \mathbf{E} в первой и второй средах

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{m(1)} &= \left[-\mathbf{e}_2 e^{i\frac{\pi}{4}} + \mathbf{e}_3 \frac{Z_{01}}{|Z_{02}|} \right] |Z_{02}| \dot{H}_{m(1)}; \\ \dot{\mathbf{E}}_{m(2)} &= j \left[-\mathbf{e}_2 e^{-j\frac{\pi}{4}} + \mathbf{e}_3 \frac{\beta_{(1)}}{\sqrt{2} \beta_{(2)}} \right] |Z_{02}| \dot{H}_{m(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-31)$$

Из этих выражений видно, что при вертикальной поляризации падающей волны электрическое поле имеет эл-

липтическую поляризацию с составляющими E_2 и E_3 (рис. 3-21). Угол наклона большой оси эллипса к поверхности раздела в первой среде, ввиду того что $\frac{Z_{01}}{|Z_{02}|} \gg 1$, близок к $\frac{\pi}{2}$, а во второй среде, так как $\frac{\beta_{(1)}}{\sqrt{2} \beta_{(2)}} \ll 1$, близок к нулю.

Среднее значение составляющих вектора Пойнтинга (2-2-3) в первой и второй средах определяются выражениями

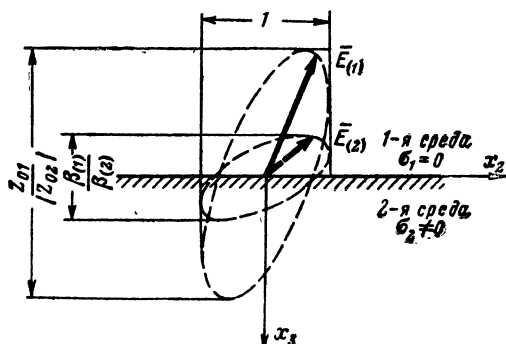


Рис. 3-21. Эллиптическая поляризация электромагнитного поля у поверхности проводящей среды.

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{02(1)} &= Z_{01} \frac{H_m^2}{2} e^{2\beta_{(1)} \rho (x_3 - \rho x_2)}, \\ \Pi_{03(1)} &= \rho Z_{01} \frac{H_m^2}{2} e^{2\beta_{(1)} \rho (x_3 - \rho x_2)}, \\ \Pi_{02(2)} &= 0; \\ \Pi_{03(2)} &= \rho Z_{01} \frac{H_m^2}{2} e^{-2\beta_{(2)} \left(x_3 + \rho^2 \frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}} x_2 \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-32)$$

Из этих выражений следует, что $\frac{\Pi_{03(1)}}{\Pi_{02(1)}} = \rho \ll 1$, т. е.

в диэлектрической среде энергия распространяется преимущественно вдоль проводящей поверхности и только сравнительно небольшая часть ее переходит через поверхность раздела в проводящую среду. Рисунок 3-22, а

иллюстрирует убывание поля в зависимости от координаты x_3 по закону, определяемому выражениями (3-2-32). В первой среде поток мощности $\bar{P}_{02(1)}$ уменьшается в ϵ раз на расстоянии от проводящей поверхности

$$|x_3|_{(1)} = \frac{1}{2\rho\beta_{(1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega\epsilon_{a1}|Z_{02}|}. \quad (3-2-33)$$

Следовательно, с увеличением диэлектрической проницаемости первой среды ϵ_{a1} при данном значении Z_{02} поле концентрируется вблизи проводящей поверхности.

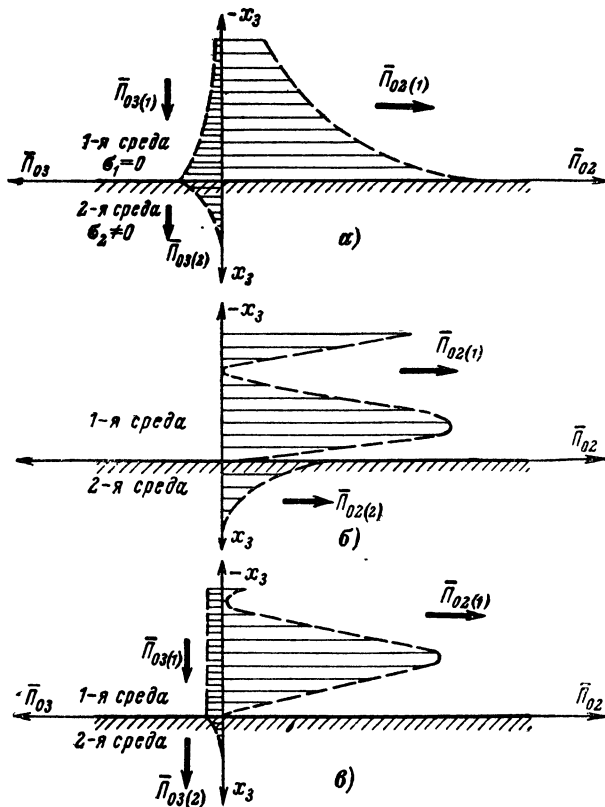


Рис. 3-22. Эпюры плотности потока мощности около поверхности раздела двух сред.

а — полное прохождение неоднородной волны у проводящей поверхности; *б* — полное внутреннее отражение от поверхности непроводящих сред; *в* — падение однородной волны на проводящую поверхность.

Если поток энергии вдоль оси x_2 считать полезной передаваемой энергией, а поток, движущийся в направлении x_3 и поглощаемый во второй среде, рассматривать как потерю энергии, то к. п. д. направляющей системы, каковой в нашем случае является поверхность проводящей среды, будет равен:

$$\eta = \frac{P_{02(1)}(x_2 = l)}{P_{02(1)}(x_2 = 0)} = \frac{\Pi_{02(1)}(x_2 = l)}{\Pi_{02(1)}(x_2 = 0)}.$$

Делая соответствующие подстановки из (3-2-32), находим:

$$\eta \approx e^{-2\beta_{(1)} p^2 l} \approx 1 - 2\beta_{(1)} p^2 l. \quad (3-2-34)$$

Полагая, что первой средой является воздух (вакуум), а второй медь ($\sigma_2 \approx 0,5 \cdot 10^8$ ссм/м), находим, что к. п. д. падает до 0,9 уже на длине направляющей системы

$$l \approx \lambda^2 \sigma_2 \approx 5 \cdot 10^7 \lambda^2 [\text{м}]. \quad (3-2-34a)$$

Так, например, при $\lambda = 1$ мм длина $l \leq 50$ м, а при $\lambda = 1$ м $l \approx 50\,000$ км. Отсюда следует, что использование направляющей системы для канализации электромагнитной энергии при очень больших частотах оказывается невыгодным даже в случае применения самого лучшего проводника — меди.

Выражения (3-2-29) и (3-2-31), найденные нами из условия полного прохождения неоднородной волны из первой среды без потерь во вторую, представляющую собой проводник, описывают поле, связанное с протеканием тока в проводнике в направлении оси x_2 с плотностью, определяемой выражением

$$j_{m2(2)} \approx -j |Z_{02}| e^{-j \frac{\pi}{4}} \sigma_2 \dot{H}_{m(2)} \approx -\beta_2 \sqrt{2} e^{j \frac{\pi}{4}} \dot{H}_{m(2)}.$$

Амплитуда тока, протекающего в направлении оси x_1 по сечению проводника шириной в 1 м и глубиной $x_3 \rightarrow \infty$, определяется выражением

$$I_{m(2)} = \int_0^\infty j_{m2(2)} dx_3 = H_m e^{-p^2 \beta_{(1)} x_2} e^{-j \beta_{(1)} x_2}, \quad (3-2-35)$$

а его мгновенное значение

$$i = H_m e^{-p^2 \beta_{(1)} x_2} \cos(\omega t - \beta_{(1)} x_2).$$

Распределение линий тока вблизи границы проводник — диэлектрик показано на рис. 3-23; линии тока смещения в непроводящей среде являются продолжением линий тока проводимости в проводящей среде.

Падение неоднородной волны с горизонтальной поляризацией на границу раздела диэлектрик — проводник описывается выражениями (3-2-29) и (3-2-31) при условии (3-2-18а). В этом случае продольную составляющую

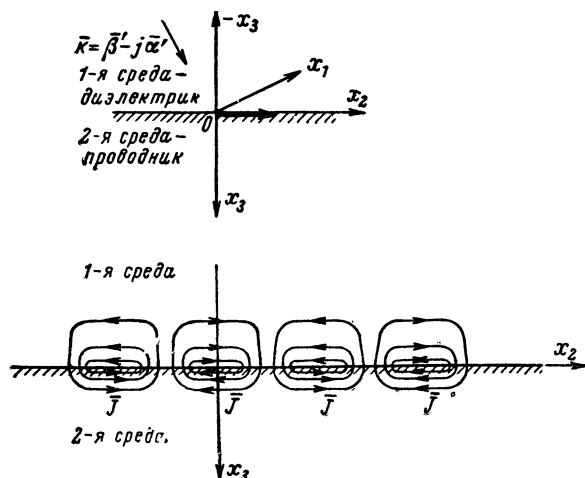


Рис. 3-23. Распределение линий тока у поверхности проводника.

имеет вектор \mathbf{H} , а не \mathbf{E} и поле связано с протеканием тока на поверхности раздела в направлении оси x_1 .

Ток, протекающий вдоль оси x_2 по неограниченной поверхности, можно представить как ток, текущий по круглому проводу с «большим» радиусом a , если $a \gg \lambda_1$. Ток, протекающий вдоль оси x_1 по неограниченной поверхности, можно представить как кольцевой ток по поверхности проводящего цилиндра с «большим» радиусом R , если $R \gg \lambda_1$. В пределах этих ограничений уравнения (3-2-29) и (3-2-31) можно использовать при решении многих практических задач, в том числе о распределении поля и токов у поверхности провода произвольного сечения, если только радиус кривизны этого сечения значительно больше глубины проникновения тока [см. выражение (2-7-25)].

Отражение однородной волны от плоской поверхности раздела двух сред может быть изучено на основе выражений (3-2-12), (3-2-15) — (3-2-17), если подставить в них вместо комплексного угла θ действительный угол падения ϑ . Рассмотрим некоторые частные случаи.

Случай 1. Обе среды без потерь, т. е.

$$\dot{k}_{(1)} = \beta_{(1)} = \omega \sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}} = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}};$$

$$\dot{k}_{(2)} = \beta_{(2)} = \omega \sqrt{\mu_{a2} \epsilon_{a2}} = \frac{2\pi}{\lambda_2}, \quad Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon_{a2}}}.$$

Подставляя вещественные значения величин $\dot{k}_{(1)}$ и $\dot{k}_{(2)}$ в формулу (3-2-12), будем иметь:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \theta} = \frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}} = \frac{v_{(2)}}{v_{(1)}} = \frac{n_1}{n_2} = n_{1,2}, \quad (3-2-36)$$

где $n_1 = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$, $n_2 = \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$ — коэффициенты преломления; $n_{1,2}$ — относительный коэффициент преломления;

$$v_{(1)} = \frac{\omega}{\beta_{(1)}} \quad \text{и} \quad v_{(2)} = \frac{\omega}{\beta_{(2)}}$$

— фазовые скорости в первой и второй неограниченных средах (соответственно рис. 3-24, a и z).

Подставляя далее в формулы (3-2-15) — (3-2-17) значения параметров обеих сред, получим выражения, описывающие поля в первой и второй средах. В частности, при горизонтальной поляризации

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m(1)} &= \mathbf{e}_1 E_m \left[(1 - \Gamma_E) e^{-j\beta_{(1)}(x_2 \sin \vartheta + x_3 \cos \vartheta)} + \right. \\ &\quad \left. + 2\Gamma_E \cos(\beta_{(1)} x_3 \cos \vartheta) e^{-j\beta_{(1)} x_2 \sin \vartheta} \right]; \\ \dot{E}_{m(2)} &= \mathbf{e}_1 E_m P_E e^{-j\beta_{(2)}(x_2 \sin \vartheta + x_3 \cos \vartheta)}, \end{aligned} \right\} \quad (3-2-37)$$

где

$$\Gamma_E = \frac{\left(\frac{Z_{02}}{Z_{01}}\right) \cos \theta - \cos \vartheta}{\left(\frac{Z_{02}}{Z_{01}}\right) \cos \theta + \cos \vartheta};$$

$$P_E = \frac{2 \left(\frac{Z_{02}}{Z_{01}} \right) \cos \theta}{\left(\frac{Z_{02}}{Z_{01}} \right) \cos \theta + \cos \vartheta}.$$

Из выражений (3-2-37) следует, что при наклонном падении плоской однородной волны поле в первой среде можно рассматривать как поле двух волн (рис. 3-25). Первая волна движется в направлении падения с амплитудой, не зависящей от координат. Вторая волна движется в направлении оси x_2 с амплитудой, зависящей от координаты x_3 , причем распределение амплитуд в направ-

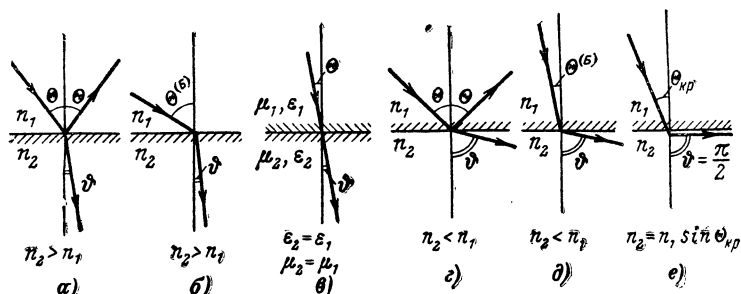


Рис. 3-24. Падение электромагнитной волны на поверхность раздела двух сред без потерь под разными углами.

$$\theta(B) = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}}; \quad \sin \theta_{kp} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}.$$

лении x_3 имеет вид стоячей волны с расстояниями между одинаковыми абсолютными значениями, равными:

$$|x_3| = n \frac{\lambda_1}{2 \cos \theta}, \quad (3-2-38)$$

где λ_1 — длина волны в неограниченной среде с параметрами μ_{a1} и ϵ_{a1} ;
 n — целое число.

Во второй среде, как видно из выражения (3-2-37), распространяется однородная плоская волна (см. рис. 3-25).

При вертикальной поляризации падающей волны выражения для поля в первой и второй средах могут быть получены из формул (3-2-6) — (3-2-8) с учетом (3-2-18а).

На поверхности раздела сред без потерь может возникнуть поверхностная волна при полном

внутреннем отражении. Полное отражение однородной волны (рис. 3-24, *e*) возможно при переходе из среды более плотной в электромагнитном смысле в менее плотную, т. е. если $\mu_1 \epsilon_1 > \mu_2 \epsilon_2$ или $n_{1,2} > 1$. Действительно, если в формуле (3-2-36) $n_{1,2} > 1$ и $n_{1,2} \sin \theta = 1$, то угол преломления $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; это означает, что преломленная волна распространяется параллельно поверхности раздела.

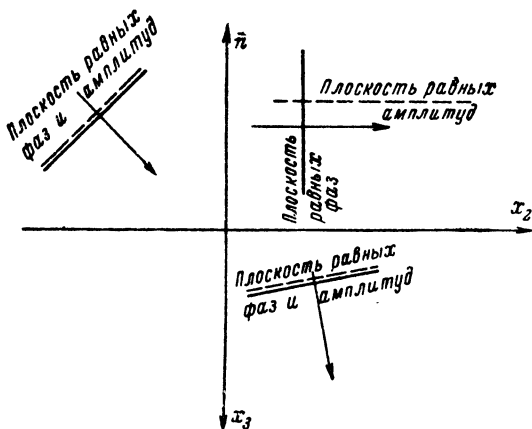


Рис. 3-25. Разложение электромагнитных волн при наклонном падении на границу двух диэлектриков.

Угол падения $\theta_{кр}$, определяемый соотношением

$$\sin \theta_{кр} = \frac{1}{n_{1,2}}, \quad (3-2-39)$$

называется критическим углом полного отражения. При $\theta > \theta_{кр}$ электромагнитная энергия падающей волны во вторую среду не проникает, а направляется вдоль поверхности раздела, тогда как в общем случае, описываемом уравнениями (3-2-37), часть энергии падающей волны переходит во вторую среду, а другая часть движется вдоль поверхности раздела.

При $n_{1,2} > 1$ и $n_{1,2} \sin \theta > 1$ согласно выражению (3-2-36) $\sin \vartheta > 1$, т. е. угол преломления теряет обычный геометрический смысл; в этом случае

$$\cos \vartheta = \pm \sqrt{1 - n_{1,2}^2 \sin^2 \theta} = \pm j |\cos \vartheta|, \quad (3-2-40)$$

т. е. $\cos \theta$ является мнимой величиной. Физический смысл имеет величина со знаком минус, так как при этом значении напряженностей поля нигде не равны бесконечности. Подставляя выражение (3-2-40) в (3-2-15) и (3-2-15a), находим, что в случае полного внутреннего отражения коэффициенты отражения и прохождения являются комплексными величинами, причем модули коэффициентов отражения равны единице:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Gamma}_E &= e^{j\psi_{OE}}, & \dot{P}_E &= P_{OE} e^{\frac{j\psi_{OE}}{2}}; \\ \dot{\Gamma}_H &= e^{j\psi_{OH}}, & \dot{P}_H &= P_{OH} e^{\frac{j\psi_{OH}}{2}}; \\ \operatorname{tg} \frac{\psi_{OE}}{2} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - \frac{1}{n_{1,2}^2}}{1 - \sin^2 \theta}}, \\ P_{OE} &= 2 \cos \left(\frac{\psi_{OE}}{2} \right); \\ \operatorname{tg} \frac{\psi_{OH}}{2} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta - \frac{1}{n_{1,2}^2}}{1 - \sin^2 \theta}}, \\ P_{OH} &= 2 \cos \left(\frac{\psi_{OH}}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3-2-41)$$

Подставляя (3-2-40) и (3-2-41) в уравнения (3-2-16) и (3-2-17), получим выражения, определяющие поле в первой и второй средах при горизонтальной поляризации

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m(1)} &= \mathbf{e}_1 2E_m \cos \left(\beta_{(1)} x_3 \cos \theta + \frac{\psi_{OE}}{2} \right) \times \\ &\quad \times e^{-j \left(\beta_{(1)} x_2 \sin \theta - \frac{\psi_{OE}}{2} \right)}; \\ \dot{H}_{m(1)} &= \frac{\dot{E}_{m(1)}}{Z_{01}} \left[-\mathbf{e}_2 j \cos \theta \operatorname{tg} \left(\beta_{(1)} x_3 \cos \theta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\psi_{OE}}{2} \right) - \mathbf{e}_3 \sin \theta \right]; \end{aligned} \right\} \quad (3-2-42)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m(2)} &= \mathbf{e}_1 P_{OE} E_m e^{-\beta_{(2)} x_3 |\cos \dot{\theta}|} \times \\ &\times e^{-i \left(\beta_{(2)} x_2 \sin \dot{\theta} - \frac{\psi_{OE}}{2} \right)}, \\ \dot{H}_{m(2)} &= \frac{\dot{E}_{m(2)}}{Z_{02}} \left[-\mathbf{e}_2 j |\cos \dot{\theta}| - \mathbf{e}_3 \sin \dot{\theta} \right], \end{aligned} \right\} \quad (3-2-42)$$

где $\sin \dot{\theta}$ и $\cos \dot{\theta}$ на основании (3-2-36) и (3-2-40), определяются формулами

$$\sin \dot{\theta} = n_{1,2} \sin \theta; \quad |\cos \dot{\theta}| = \sqrt{n_{1,2}^2 \sin^2 \theta - 1}.$$

Из формул (3-2-42) следует, что поле во второй, менее плотной среде ($\mu_2 \epsilon_2 < \mu_1 \epsilon_1$) представляет поверхностную волну. Фронт волны перпендикулярен поверхности раздела. В направлении оси x_3 поле убывает по экспоненте, в этом направлении плотность потока мощности $P_{03(2)} = 0$, а в направлении x_2 с учетом (3-2-36)

$$P_{02(2)} = \frac{(P_{OE} E_m)^2}{2 |Z_{02}|} \sin \dot{\theta} e^{-2\beta_{(2)} x_3 |\cos \dot{\theta}|}. \quad (3-2-43)$$

Затухание поля во второй среде с увеличением расстояния $|x_3|$, когда поглощение в ней отсутствует, свидетельствует о том, что поток энергии во вторую среду не проходит из-за полного отражения на поверхности раздела. Заметим, что это явление имеет место лишь в установившемся режиме. На рис. 3-26 показано разложение вектора Пойнтинга в первой среде на нормальную и тангенциальную составляющие, которое иллюстрирует отсутствие потока энергии в направлении оси x_3 .

Фазовая постоянная поверхностной волны согласно третьему выражению системы (3-2-42) равна $\beta_{(2)} \sin \dot{\theta}$, вследствие чего фазовая скорость во второй среде определяется выражением

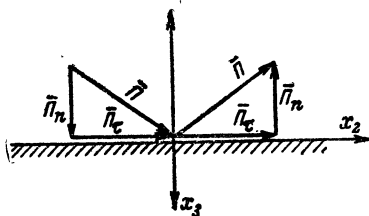


Рис. 3-26. Разложение вектора Пойнтинга на границе раздела двух диэлектриков при полном отражении.

$$v'_{(2)} = \frac{\omega}{\beta_{(2)} \sin \vartheta} < v_{(2)}$$

или

$$v'_{(2)} = \frac{\omega}{\beta_{(1)} \sin \theta} > v_{(1)}, \quad (3-2-44)$$

поскольку, согласно формуле (3-2-36)

$$\beta_{(2)} \sin \vartheta = \beta_{(1)} \sin \theta. \quad (3-2-44a)$$

Так как при полном внутреннем отражении $\sin \vartheta > 1$, из выражений (3-2-44) и (3-2-44a) следует, что фазовая скорость поверхностной волны меньше скорости распространения в неограниченной среде с параметрами μ_2 , ϵ_2 и больше таковой в неограниченной среде с параметрами μ_1 и ϵ_1 .

Согласно выражениям (3-2-42) поле в первой среде является также неоднородной волной, амплитуда которой зависит от координаты x_3 с периодичностью, определяемой формулой (3-2-38). Поток энергии в первой среде, как и во второй, направлен вдоль оси x_2 , т. е.

$$\left. \begin{aligned} P_{03(1)} &= 0; \\ P_{02(1)} &= \frac{E_m^2}{Z_{01}} \sin \theta \left[1 + \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(2\beta_{(1)} x_3 \cos \theta + 2 \frac{\psi_{OE}}{2} \right) \right] \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-43a)$$

При $x_3 = 0$, когда $\mu_1 = \mu_2$ согласно (3-2-43) с учетом (3-2-36) $P_{02(1)} = P_{02(2)}$.

Распределение поля в первой и второй средах при полном внутреннем отражении иллюстрирует рис. 3-22, б.

Фазовая постоянная поля в первой среде согласно первому выражению системы (3-2-42) равна $\beta_{(1)} \sin \theta$. Следовательно, фазовая скорость в этой среде

$$v'_{(1)} = \frac{\omega}{\beta_{(1)} \sin \theta} > v_{(1)}. \quad (3-2-44б)$$

Совпадая по величине с фазовой скоростью поверхностной волны [см. выражение (3-2-44a)], $v'_{(1)}$ превосходит фазовую скорость в неограниченной среде с такими же параметрами μ_1 и ϵ_1 .

Электромагнитное поле, возникающее в результате полного внутреннего отражения, может рассматриваться согласно выражениям (3-2-44) и (3-2-44б) как «замедленная» волна во второй среде и как «ускоренная» волна в первой среде.

Таким образом, при «полном отражении» однородной волны гладкая поверхность диэлектрика и полное прохождение неоднородной волны гладкая поверхность проводника являются простейшими замедляющими системами.

Фаза электромагнитного поля, возникающего в первой среде при полном внутреннем отражении, как это следует из выражений (3-2-42), отличается от фазы поля падающей волны. Это отличие может привести к изменению характера поляризации поля. Если падающая волна имеет любую линейную поляризацию, то в результате полного внутреннего отражения в первой среде возникает поле с эллиптической поляризацией, характеризующейся относительным сдвигом фаз $\psi = \psi_{OH} - \psi_{OE}$. При этом

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi_{OH}}{2} - \operatorname{tg} \frac{\psi_{OE}}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\psi_{OH}}{2} \operatorname{tg} \frac{\psi_{OE}}{2}}$$

или с учетом (3-2-41)

$$\psi = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{(\epsilon_1/\epsilon_2 - \mu_1/\mu_2) \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{1}{n_{1,2}^2}}}{(n_{1,2}^2 - 1) \sin^2 \theta} \right\}. \quad (3-2-45)$$

При углах падения $\theta = \theta_{кр}$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ относительный сдвиг фаз $\psi = 0$. Максимальное значение ψ имеет при угле падения

$$\theta = 2 \operatorname{arcsin} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(n_{1,2}^2 + 1)}} \right]. \quad (3-2-45a)$$

Случай 2 Обе среды с потерями. При этом условии на основании равенства (3-2-12)

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta &= \frac{k_{(1)}}{k_{(2)}} \sin \vartheta = A e^{i\gamma}, \\ \cos \vartheta &= \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta} = N e^{-i\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-46)$$

Здесь

$$A = \sin \vartheta \sqrt{\frac{\beta_{(1)}^2 + \alpha_{(1)}^2}{\beta_{(2)}^2 + \alpha_{(2)}^2}}; \quad \gamma = \arctg \left[\frac{\beta_{(1)} \alpha_{(2)} - \alpha_{(1)} \beta_{(2)}}{\beta_{(1)} \beta_{(2)} + \alpha_{(1)} \alpha_{(2)}} \right];$$

$$N = (1 - 2A^2 \cos 2\gamma + A^4)^{1/4}, \quad \zeta = \frac{1}{2} \arctg \left[\frac{A^2 \sin 2\gamma}{1 - A^2 \cos 2\gamma} \right].$$

Подставляя значения Z_{01} , Z_{02} и $\cos \vartheta$ в выражения (3-2-15) и (3-2-15a), находим значения коэффициентов отражения и прохождения по полю

$$\Gamma_E = \Gamma_E e^{i\psi_E}, \quad \dot{P}_E = P_E e^{i\zeta_E}, \quad \Gamma_H = \Gamma_H e^{i\psi_H}, \quad \dot{P}_H = P_H e^{i\zeta_H}.$$

После ряда преобразований (которые мы опускаем вследствие их громоздкости) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_E &= \frac{1 - a_E}{\sqrt{1 + a_E^2}}; \\ \psi_E &= \pi - \arctg \left\{ \frac{2m \sin [\zeta + (\varphi_2 - \varphi_1)]}{1 - m^2} \right\}; \\ P_E &= \frac{2m}{\sqrt{1 + a_E^2}}; \quad \zeta_E = \arctg \left\{ \frac{\sin [\zeta + (\varphi_2 - \varphi_1)]}{m + \cos [\zeta + (\varphi_2 - \varphi_1)]} \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (3-2-47)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} a_E &= \frac{2m \cos [\zeta + (\varphi_2 - \varphi_1)]}{1 + m^2}, \\ m &= \frac{|Z_{02}| \cos \vartheta}{|Z_{01}| N} = \rho \sqrt{2} \frac{\cos \vartheta}{N}, \\ \Gamma_H &= \frac{1 - a_H}{\sqrt{1 + a_H^2}}, \\ \psi_H &= \pi + \arctg \left\{ \frac{2n \sin [(\varphi_2 - \varphi_1) - \zeta]}{n^2 - 1} \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (3-2-47a)$$

$$\left. \begin{aligned} P_H &= \frac{2}{\sqrt{1+a_H^2}}, \quad \xi_H = \zeta - (\varphi_2 - \varphi_1) + \\ &+ \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sin [(\varphi_2 - \varphi_1) - \zeta]}{n + \cos [(\varphi_2 - \varphi_1) - \zeta]} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-47a)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_H &= \frac{2n \cos [(\varphi_2 - \varphi_1) - \zeta]}{1 + n^2}; \\ n &= \frac{|Z_{02}|}{|Z_{01}|} \frac{N}{\cos \theta} = p \sqrt{2} \frac{N}{\cos \theta}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (3-2-46), (3-2-47) в (3-2-16) и (3-2-17), получим выражения, описывающие поля в первой и второй средах, обладающих потерями, при падении на поверхность их раздела плоской однородной волны. При этом оказывается, что поля в первой и второй средах являются неоднородными волнами, амплитуды и фазы которых сложным образом зависят от параметров обеих сред и от угла падения θ .

В практически важном случае, когда первой средой является воздух (или вакуум), а второй — проводящая среда с параметрами

$$\operatorname{tg} \delta_{s2} \geq 10, \quad \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 = 1 \quad \text{и} \quad \mu_2 = \mu_1 = 1,$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} k_{(1)} &= \beta_{(1)} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad Z_{01} = 120\pi, \quad \varphi_1 = 0; \\ k_{(2)} &\approx \beta_{(2)} \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad \beta_{(2)} \approx \alpha_{(2)} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2} \sigma_2}{2}}, \\ |Z_{02}| &\approx \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2}}{\sigma_2}}, \quad \varphi_2 \approx \frac{\pi}{4}; \\ \frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}} \frac{1}{\sqrt{2}} &= p \sqrt{2} \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \sqrt{\operatorname{tg} \delta_{s2}}} < 1; \\ A &\approx \frac{\beta_{(1)} \sin \theta}{\beta_{(2)} \sqrt{2}} < 1, \quad \gamma \approx \frac{\pi}{4}, \\ N &\approx (1 + A^4)^{1/4} \approx 1, \quad \zeta \approx \frac{A^2}{2} \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-48)$$

Напряженности электрического поля в первой и второй средах в этом случае согласно выражениям (3-2-16) и (3-2-17) при горизонтальной поляризации падающей волны

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m(1)} &= e_1 E_m \left[(1 - \Gamma_E e^{j\psi_E}) e^{-j\beta_{(1)}(x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta)} + \right. \\ &\quad \left. + 2\Gamma_E e^{j\psi_E} \cos(\beta_{(1)} x_3 \cos \theta) e^{-j\beta_{(1)} x_2 \sin \theta} \right]; \\ \dot{E}_{m(2)} &= e_1 E_m P_E e^{j\xi_E} e^{-j\beta_{(2)} x_3} \left[1 + \left(\frac{\beta_{(1)} \sin \theta}{2\beta_{(2)}} \right)^2 \right] x_2 \times \\ &\quad \times e^{-j\beta_{(2)} \left\{ \frac{\beta_{(1)} \sin \theta}{\beta_{(2)}} x_2 + \left[1 - \left(\frac{\beta_{(1)} \sin \theta}{2\beta_{(2)}} \right)^2 \right] x_3 \right\}} \end{aligned} \right\} \quad (3-2-49)$$

Если $\frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}} \sin \theta \ll 1$, то

$$\dot{E}_{m(2)} \approx e_1 E_m P_E e^{j\xi_E} e^{-j\beta_{(2)} x_3} e^{-j\beta_{(2)} x_3}. \quad (3-2-49a)$$

Аналогичные выражения для напряженности поля при вертикальной поляризации получаются из формул (3-2-49) при замене

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &\rightarrow H_m, \quad \Gamma_E \rightarrow \Gamma_H, \quad P_E \rightarrow P_H, \\ \psi_E &\rightarrow \psi_H, \quad \xi_E \rightarrow \xi_H. \end{aligned}$$

Из выражений (3-2-49) следует, что в первой среде поле имеет структуру неоднородной волны, аналогичную с полем, описываемым выражениями (3-2-37), и отличается лишь фазой отраженного поля на угол ψ_E при горизонтальной поляризации и на угол ψ_H при вертикальной. Вследствие этого при любой линейной поляризации падающей волны поле в первой среде будет иметь эллиптическую поляризацию с относительным сдвигом фазы на угол $\psi = \psi_E - \psi_H$. На основании выражений (3-2-47) с учетом (3-2-48)

$$\operatorname{tg} \psi \approx \frac{|Z_{02}|}{|Z_{01}|} \sqrt{2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}. \quad (3-2-50)$$

Следовательно, с увеличением проводимости σ_2 угол $\psi \rightarrow 0$.

Для проводящей среды ($\sigma_2 \geq 10^8 \div 10^{10} \text{ см/м}$) согласно выражениям (3-2-47) коэффициент отражения близок

к единице и практически не зависит от угла падения θ даже при весьма высоких частотах. Действительно, если принять $\Gamma_E \geq 0,99$, то получим неравенство

$$\frac{|Z_{02}|}{|Z_{01}|} \sqrt{2 \cos \theta} \leq 0,01,$$

которое будет иметь место при $\theta = 0$, $\epsilon_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ и $\sigma_2 \geq 10^8 \div 10^{10}$ *сим/м*, если $\lambda \geq 300 \div 3$ *мкм*. Следует, однако, отметить, что хорошие проводники (металлы) можно рассматривать как «сплошную» среду лишь для волн длиннее 10 *мкм*.

Практически полное отражение электромагнитных волн от поверхности металлов и проникновение их на весьма небольшую глубину при $\lambda > 10$ *мкм* обусловлено большим числом электронов ($10^{22} - 10^{23}$ *см⁻³*), слабо связанных с атомами вещества. Вынужденные колебания этих электронов, возникающие при падении на поверхность металлов электромагнитной волны, создают сильное вторичное поле (отраженную волну) и, взаимодействуя с кристаллической решеткой, приводят к быстрому затуханию поля прошедшей волны.

При $\lambda < 1$ *мкм* во взаимодействии падающего поля с микроструктурой металлов большую роль играют уже квантовые эффекты (внутренний фотоэффект и др.). При этом фазовая постоянная β и множитель затухания α в значительной степени зависят от частоты поля, причем $\alpha \gg \beta$ и величина их не определяется формулой (2-7-24а), которая действительна лишь для «сплошной» среды (см. табл. 3-1). При $\lambda \leq 0,4$ *мкм* (ультрафиолетовые лучи) коэффициент отражения сильно

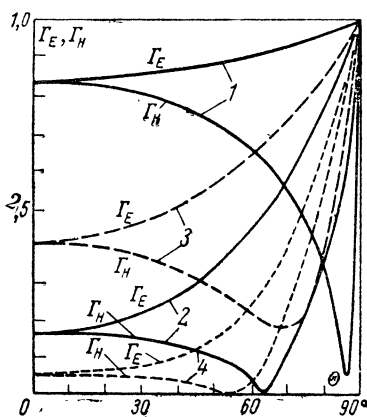


Рис. 3-27. Зависимость коэффициента отражения от угла падения на поверхности раздела при различных значениях $\text{tg } \delta_a$.

1 — $\text{tg } \delta_a \approx 1$ (морская поверхность при $\lambda < 30$ *см*; сухая почва при $\lambda < 60$ *м*);
 2 — $\text{tg } \delta_a \approx 0,1$ (морская поверхность при $\lambda < 3$ *см*; сухая почва при $\lambda < 6$ *м*);
 3 — $\text{tg } \delta_a \approx 3,5$ (металлическая поверхность при $\lambda \approx 10^{-4}$ *см*); 4 — $\text{tg } \delta_a \approx 0$ (металлическая поверхность при $\lambda \approx 10^{-6}$ *см*).

уменьшается, а коэффициент прохождения возрастает, т. е. металлы приобретают свойства диэлектриков. В области рентгеновских лучей ($\lambda \leq 0,02 \text{ мкм} = 200 \text{ \AA}$) металлы по электромагнитным параметрам не отличаются от диэлектриков.

Зависимость Γ_E и Γ_H от угла падения θ для различных значений $\text{tg } \delta_0$ показана графиками на рис. 3-27; эти значения встречаются при изучении распространения

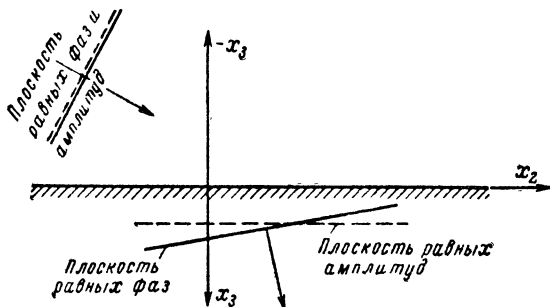


Рис. 3-28. Прохождение волны через плоскую поверхность проводящей среды.

электромагнитных волн вдоль земной поверхности (см. § 3-8).

Отметим, что дисперсия электромагнитных параметров σ и ϵ у плохих проводников и у диэлектриков наблюдается на более низких частотах, чем у металлов ($\lambda > 1 \text{ см}$). Поэтому коэффициенты отражения и прохождения следует определять по тем значениям β и α , которые характерны для данной частоты.

Во второй среде согласно выражениям (3-2-49) поле представляет собой неоднородную волну, сходную с волной, описываемой выражением (3-2-29). Хотя амплитуда волны и убывает по экспоненте с увеличением x_3 , поверхность волной она не является, поскольку $\Pi_{02(2)} \approx 0$. Плоскость равных амплитуд здесь параллельна поверхности раздела, а плоскость равных фаз наклонена к ней (рис. 3-28). Как следует из второй формулы (3-2-49), действительный угол преломления определяется ниже-следующим выражением:

$$\sin \vartheta_{\beta} = \frac{\frac{\beta_{(1)}}{\beta_{(2)}} \sin \theta}{1 + \left(\frac{\beta_{(1)}}{2\beta_{(2)}} \right)^2 \sin^2 \theta}. \quad (3-2-51)$$

Согласно последнему выражению и формуле (3-2-36) фазовая скорость волны в проводящей среде равна:

$$\begin{aligned} v'_{(2)} = \frac{\omega}{\beta'_{(2)}} &= \frac{\omega \sin \vartheta}{\beta_{(1)} \sin \theta} = \frac{\omega}{\beta_{(2)} \left[1 + \left(\frac{\beta_{(1)}}{2\beta_{(2)}} \right)^2 \sin^2 \theta \right]} < \\ < \frac{\omega}{\beta_{(2)}} &= v_{(2)}. \end{aligned} \quad (3-2-52)$$

Из этой формулы следует, что фазовая скорость неоднородной волны, возбуждаемой в проводящей среде падением на ее поверхность плоской однородной волны, меньше фазовой скорости однородной волны в такой же среде [см. выражение (2-7-26)]. Скорость $v'_{(2)}$ зависит не только от параметров проводящей среды, но и от параметров первой непроводящей среды и угла падения θ . С увеличением проводимости σ_2 и уменьшением частоты ω отношение $\beta_{(1)}/\beta_{(2)} \rightarrow 0$. При этом плоскость равных фаз согласно выражению (3-2-51) становится параллельной плоскости раздела и совпадает с плоскостью равных амплитуд; согласно выражению (3-2-52) $v'_{(2)} \rightarrow v_{(2)}$.

На основании уравнения II системы (2-1-5) и формул (2-2-3) и (3-2-49), получим следующие выражения, определяющие плотности потока мощности в первой и второй средах:

$$\left. \begin{aligned} P_{02(1)} &= \frac{E_m^2}{2|Z_{01}|} \sin \theta \left[1 + \Gamma_E^2 + 2\Gamma_E \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos(2\beta_{(1)} x_3 \cos \theta + \Psi_E) \right]; \\ P_{03(1)} &= \frac{E_m^2}{2|Z_{01}|} (1 - \Gamma_E^2) \cos \theta; \\ P_{02(2)} &\approx 0; \\ P_{03(2)} &\approx \frac{(E_m P_E)^2}{2|Z_{02}|} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\beta_{(2)} x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-53)$$

На рис. 3-22, в представлено распределение плотности потока мощности для этого случая.

При «идеально проводящей» второй среде ($\sigma_2 \rightarrow \infty$), $\Gamma_E = 1$, $\psi_E = \pi$ и $P_E = 0$, вследствие чего выражения (3-2-49) и (3-2-53) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m(1)} &= \mathbf{e}_1 j2E_m \sin(\beta_{(1)} x_3 \cos \theta) e^{-j\beta_{(1)} x_2 \sin \theta}; \\ \dot{E}_{m(2)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-54)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{02(1)} &= \frac{E_m^2}{Z_{01}} \sin \theta [1 - \cos(2\beta_{(1)} x_3 \cos \theta)]; \\ P_{03(1)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-2-55)$$

3-3. НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим поле в первой и второй средах, не обладающих потерями, при нормальном падении плоской волны на границу раздела этих сред ($\theta=0$). В этом случае согласно формуле (3-2-36) на основе выражений (3-2-15) и (3-2-15а) имеем следующие выражения для коэффициентов отражения и прохождения:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_E &= \frac{\frac{Z_{02}}{Z_{01}} - 1}{\frac{Z_{02}}{Z_{01}} + 1}, \quad \Gamma_E = -\Gamma_H; \\ P_E &= \frac{2 \frac{Z_{02}}{Z_{01}}}{\frac{Z_{02}}{Z_{01}} + 1}, \quad P_E = 1 + \Gamma_E; \\ P_H &= \frac{Z_{01}}{Z_{02}} P_E. \end{aligned} \right\} \quad (3-3-1)$$

Из этих выражений следует, что при

$$\begin{aligned} Z_{01} &= Z_{02} \\ \Gamma_E &= 0, \quad P_E = 1, \end{aligned}$$

т. е. при равенстве волновых сопротивлений граничащих сред отражение электромагнитной энергии отсутствует (см. § 3-2).

Если первой средой является вакуум или атмосфера Земли, а второй — диэлектрическая среда, у которой $\mu_2=1$, то коэффициент отражения

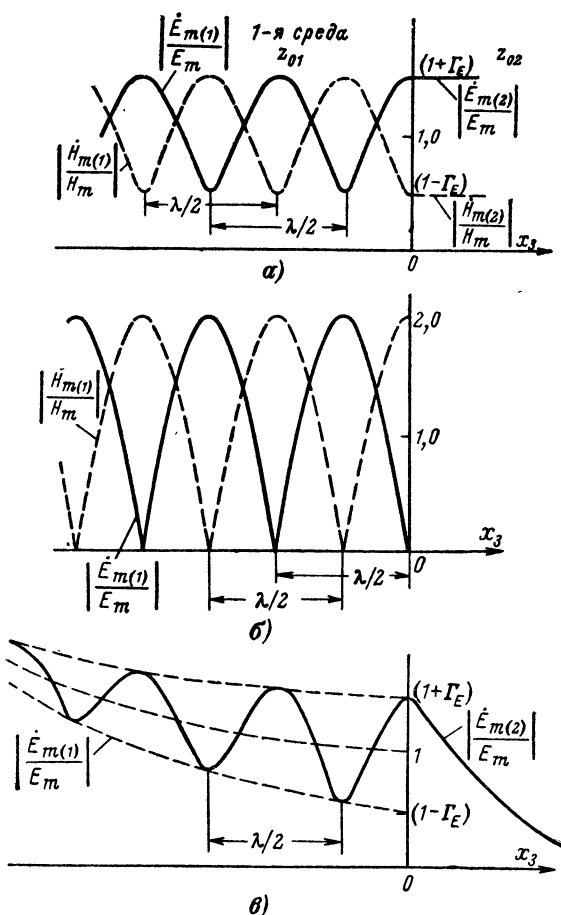


Рис. 3-29. Распределение амплитуд при нормальном падении плоской однородной волны на плоскую поверхность раздела двух сред.

а — случай $Z_{02}/Z_{01} > 1$, $|\Gamma_E| < 1$, обе среды без потерь;

б — случай $Z_{02}/Z_{01} = 0$, $\Gamma_E = -1$, первая среда без потерь;

в — обе среды с потерями.

$$\Gamma_E = - \frac{\sqrt{\epsilon_2 - 1}}{\sqrt{\epsilon_2 + 1}}. \quad (3-3-1a)$$

Поле в первой и второй средах на основании выражений (3-2-37), описывается следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m(1)} &= \mathbf{e}_1 E_m \left[(1 - \Gamma_E) e^{-i\beta_{(1)} x_3} + 2\Gamma_E \cos(\beta_{(1)} x_3) \right]; \\ \mathbf{H}_{m(1)} &= \frac{\text{rot } \dot{E}_{m(1)}}{-j\omega\mu_{a1}} = \mathbf{e}_2 \frac{E_m}{Z_{01}} \left[(1 + \Gamma_E) e^{-i\beta_{(1)} x_3} - \right. \\ &\quad \left. - 2\Gamma_E \cos(\beta_{(1)} x_3) \right]; \\ \dot{E}_{m(2)} &= \mathbf{e}_1 E_m P_E e^{-i\beta_{(2)} x_3}, \\ \dot{H}_{m(2)} &= \mathbf{e}_2 \frac{E_m}{Z_{01}} P_E e^{-i\beta_{(2)} x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (3-3-2)$$

Из этих выражений следует, что поля в первой и второй средах представляют собой однородные плоские волны, плоскости равных фаз и равных амплитуд которых совпадают; при этом амплитуда волны в первой среде зависит от координаты x_3 . На рис. 3-29 показана зависимость от координаты x_3 модулей амплитуды поля, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\dot{E}_{m(1)}}{E_m} \right| &= \sqrt{1 + \Gamma_E^2 + 2\Gamma_E \cos(2\beta_{(1)} x_3)}; \\ \left| \frac{\dot{H}_{m(1)}}{H_m} \right| &= \sqrt{1 + \Gamma_E^2 - 2\Gamma_E \cos(2\beta_{(1)} x_3)}. \end{aligned} \right\} \quad (3-3-2a)$$

Как видно из графика на рис. 3-29, *a*, построенного на основе выражения (3-3-2a), в первой среде соседние максимумы и минимумы расположены на расстоянии $\frac{\lambda}{2}$.

Рисунок 3-29, *б* иллюстрирует случай падения и отражения волны, амплитуда которой согласно выражению (2-7-4) убывает в направлении распространения из-за наличия потерь.

Электромагнитное поле в первой среде в общем виде представляет сумму полей бегущей и стоячей волн. Это означает, что, помимо перехода энергии из первой среды во вторую, происходит непрерывный взаимный обмен энергией между источниками первичного поля и полем

в первой среде. Такое поле характеризуется коэффициентом стоячей волны по напряжению

$$КСВН = \left| \frac{E_{m(1) \text{ макс}}}{E_{m(1) \text{ мин}}} \right| = \frac{1 + |\Gamma_E|}{1 - |\Gamma_E|} \quad (3-3-3)$$

и коэффициентом стоячей волны по мощности

$$КСВ = \frac{(1 + |\Gamma_E|)^2}{(1 - |\Gamma_E|)^2}. \quad (3-3-4)$$

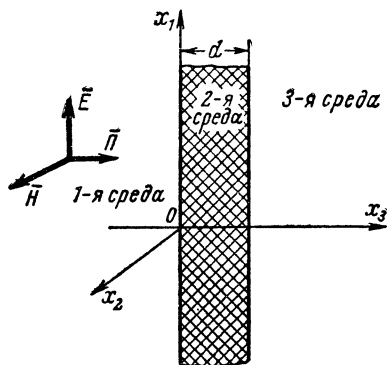


Рис. 3-30. К определению коэффициентов отражения и пропускания (прозрачности) плоской пластины.

В пространстве, ограниченном двумя плоскостями, параллельными поверхности раздела и проходящими через соседние минимумы $|\dot{E}_{m(1)}|$ и $|\dot{H}_{m(1)}|$, происходит обмен энергией между магнитным и электрическим полями.

Переход электромагнитной волны через плоскопараллельную диэлектрическую пластину (рис. 3-30). Пусть в общем случае все три среды имеют различные параметры, а следовательно, различные волновые сопротивления Z_{01} , Z_{02} , Z_{03} и различные постоянные распространения $k_{(1)} = \beta_{(1)} = \frac{2\pi}{\lambda_1}$, $k_{(2)} = \beta_{(2)} - j\alpha_{(2)}$ и $k_{(3)} = \beta_{(3)} = \frac{2\pi}{\lambda_3}$ (первая и третья среды без потерь). Тогда, полагая, в выражениях (3-2-6) — (3-2-8) угол $\theta = 0$ и учи-

таявая конечную толщину пластины, можно написать следующие выражения для напряженности электрического поля во всех трех средах:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{(1)} &= \mathbf{e}_1 \left(E_m e^{-j\beta(1) x_3} + \dot{E}_{mo} e^{j\beta(1) x_3} \right) e^{j\omega t}; \\ \dot{E}_{(2)} &= \mathbf{e}_1 \left(\dot{E}_{m(2)} e^{-jk(2) x_3} + \dot{E}_{mo(2)} e^{jk(2) x_3} \right) e^{j\omega t}; \\ \dot{E}_{(3)} &= \mathbf{e}_1 \dot{E}_{m(3)} e^{-j\beta(3) x_3} e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (3-3-5)$$

Здесь E_m и \dot{E}_{mo} — амплитуды падающей и отраженной волн в первой среде;

$\dot{E}_{m(2)}$ и $\dot{E}_{mo(2)}$ — во второй среде;

$\dot{E}_{m(3)}$ — амплитуда падающей волны в третьей среде.

Из этих выражений согласно граничным условиям (1-5-6) и (1-5-9) следует, что напряженности поля на обеих граничных плоскостях ($x_3=0$ и $x_3=d$) имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} E_m + \dot{E}_{mo} &= \dot{E}_{m(2)} + \dot{E}_{mo(2)}; \\ E_m - \dot{E}_{mo} &= \frac{Z_{01}}{Z_{02}} \left(\dot{E}_{m(2)} - \dot{E}_{mo(2)} \right); \\ \dot{E}_m e^{-jk(2)d} + \dot{E}_{mo(2)} e^{jk(2)d} &= \dot{E}_{m(3)} e^{-j\beta(3)d}; \\ E_{m(2)} e^{-jk(2)d} - \dot{E}_{mo(2)} e^{jk(2)d} &= \\ &= \frac{Z_{02}}{Z_{01}} \dot{E}_{m(3)} e^{-j\beta(3)d}. \end{aligned} \right\} \quad (3-3-5a)$$

Из решения этих уравнений находим $\dot{\Gamma}_{\Sigma}$ и \dot{P}_{Σ} — коэффициенты отражения и прохождения через пластину:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{\Sigma} &= \frac{\dot{E}_{mo}}{E_m} = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{Z_{01}}{Z_{02}}\right) \left(1 + \frac{Z_{02}}{Z_{03}}\right) + \left(1 + \frac{Z_{01}}{Z_{02}}\right) \left(1 - \frac{Z_{02}}{Z_{03}}\right) e^{-j2k(2)d}}{\left(1 + \frac{Z_{01}}{Z_{02}}\right) \left(1 + \frac{Z_{02}}{Z_{03}}\right) + \left(1 - \frac{Z_{01}}{Z_{02}}\right) \left(1 - \frac{Z_{02}}{Z_{03}}\right) e^{-j2k(2)d}}; \quad (3-3-6) \\ \dot{P}_{\Sigma} &= \frac{\dot{E}_{m(3)}}{E_m} = \end{aligned}$$

$$= \frac{4e^{jk_{(2)}d}}{\left(1 - \frac{Z_{01}}{Z_{02}}\right)\left(1 - \frac{Z_{02}}{Z_{03}}\right)e^{-jk_{(2)}d} + \left(1 + \frac{Z_{01}}{Z_{02}}\right)\left(1 + \frac{Z_{02}}{Z_{03}}\right)e^{jk_{(2)}d}}. \quad (3-3-7)$$

Зависимость коэффициента отражения от толщины пластины и параметров всех трех сред показана графически на рис. 3-31.

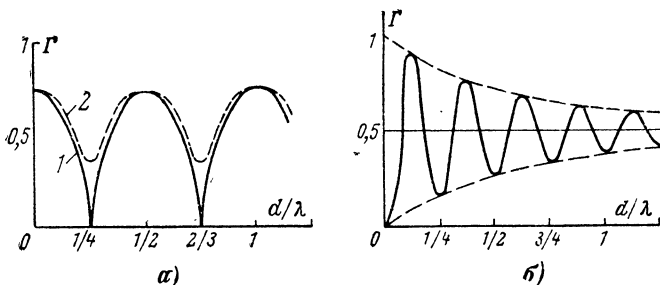


Рис. 3-31. Зависимость коэффициента отражения от толщины пластины.

a — пластина из диэлектрика без потерь: 1 — при $Z_{02} = \sqrt{Z_{01}Z_{03}}$; 2 — при $Z_{02} \neq \sqrt{Z_{01}Z_{03}}$; *б* — слой воды при $\lambda_1 = 9,35 \text{ см}$, $\beta_2 = 6 \text{ см}^{-1}$, $\alpha_2 \approx 0,46 \text{ см}^{-1}$.

Если материал пластины (диэлектрик) практически не вносит потерь, то из выражений (3-3-6) и (3-3-7) видно, что если толщина пластины d и ее волновое сопротивление Z_{02} определяются формулами

$$\begin{aligned} Z_{02} &= \sqrt{Z_{01}Z_{03}}, \\ d &= \frac{\lambda_2}{4}; \end{aligned} \quad (3-3-8)$$

где λ_2 — длина волны во второй среде, то коэффициенты отражения и прохождения

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{E\Sigma} &= 0, & P_{E\Sigma} &= \sqrt{\frac{Z_{03}}{Z_{01}}}; \\ \Gamma_{H\Sigma} &= 0, & P_{H\Sigma} &= \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{03}}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-3-8a)$$

Это означает, что такая пластина, называемая четвертьволновым трансформатором, позво-

ляет избежать отражения электромагнитной энергии при переходе волны из одной среды в другую при различных их волновых сопротивлениях. Четвертьволновый слой (пластину) в данном случае называют трансформатором, потому что он трансформирует волновое сопротивление третьей заданной среды, делая его как бы равным волновому сопротивлению первой среды. Такая трансформация называется также согласованием сопротивлений.

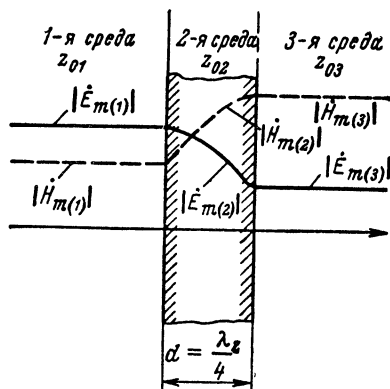


Рис. 3-32. Четвертьволновый трансформатор

$$z_{02} = \sqrt{z_{01} z_{03}}, \quad z_{03} < z_{01}, \\ |E_{m(3)}| < |E_{m(1)}|$$

Поле в первой и третьей средах представляет собой бегущую волну, а в промежуточном слое толщиной $\lambda_2/4$ поле образуется из бегущей и стоячей волн (рис. 3-32). Отсутствие отраженной волны в первой среде можно представить как результат сложения в противофазе двух волн: отраженной от границы между первой и второй средами и отраженной от границы между второй и третьей средами и прошедшей через эту границу. Поскольку последняя волна проходит путь длиной $2d = \frac{\lambda_2}{2}$, то ее фаза отличается на 180° от первой отраженной волны. Поле в первой среде при наличии четвертьволнового трансформатора остается неизменным,

т. е. $\dot{E}_{m(1)} = E_m$. Амплитуда напряженности поля в третьей среде согласно выражениям (3-3-8а)

$$\dot{E}_{m(3)} = \dot{E}_{m(1)} \sqrt{\frac{Z_{03}}{Z_{01}}}; \quad (3-3-8б)$$

это следует также из условия полного прохождения энергии ($\Pi_{0(1)} = \Pi_{0(3)}$)

$$\frac{E_{m(1)}^2}{Z_{01}} = \frac{E_{m(3)}^2}{Z_{03}}.$$

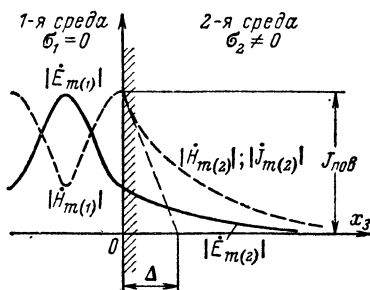


Рис. 3-33 Распределение амплитуд при нормальном падении однородной плоской волны на плоскую поверхность проводящей среды.

Нормальное падение волны на поверхность проводящей среды. В этом случае распределение амплитуд будет иметь вид, показанный на рис. 3-33. В первой среде без потерь распространяется однородная волна, состоящая из суммы бегущей и стоячей волн. Во второй среде, обладающей потерями, распространяется тоже однородная волна, однако амплитуда ее убывает по экспоненте с увеличением x_3 .

Из-за наличия потерь во второй среде волновое сопротивление Z_{02} является комплексной величиной; следовательно, коэффициенты отражения и прохождения также являются комплексными величинами

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Gamma}_E &= \frac{\frac{Z_{02}}{Z_{01}} - 1}{\frac{Z_{02}}{Z_{01}} + 1}; \end{aligned} \right\} \quad (3-3-9)$$

$$\dot{P}_E = \frac{2 \frac{Z_{02}}{Z_{01}}}{\frac{Z_{01}}{Z_{02}} + 1} \quad \left. \vphantom{\frac{2 \frac{Z_{02}}{Z_{01}}}{\frac{Z_{01}}{Z_{02}} + 1}} \right\} \quad (3-3-9)$$

Если вторая среда является идеально проводящей ($\sigma_2 \rightarrow \infty$), то $Z_{02} \rightarrow 0$ и согласно выражениям (3-3-9) $\Gamma_E = -1$, $\dot{P}_E = 0$, т. е. поле во вторую среду не проходит. В первой же среде согласно (3-3-2) поле описывается выражениями

$$\left. \begin{aligned} E_{(1)} &= e_1 2E_m \sin(\beta_{(1)} x_3) \sin \omega t; \\ H_{(1)} &= e_2 2H_m \cos(\beta_{(1)} x_3) \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (3-3-10)$$

Следовательно, магнитное и электрическое поля в этом случае сдвинуты во времени и пространстве на четверть периода и представляют собой стоячие волны (рис. 3-29, б). Среднее значение вектора Пойнтинга в любой точке поля равно нулю, т. е. передача энергии отсутствует. Внутри идеального проводника электромагнитное поле равно нулю, а на его поверхности в соответствии с выражениями (1-5-6) и (1-5-8) имеют место граничные условия

$$\left. \begin{aligned} E_{\tau(1)} &= 0, \\ H_{\tau(1)} &= -J_{\text{пов}} \end{aligned} \right\} \quad (3-3-11)$$

или

$$J_{\text{пов}} = -[n_0 H]. \quad (3-3-11a)$$

Здесь $J_{\text{пов}}$ — поверхностная плотность тока, протекающего через единицу длины линии, перпендикулярной направлению тока;

$H_{\tau(1)}$ — напряженность магнитного поля в точках, бесконечно близких к поверхности идеального проводника, но лежащих все же вне его;

n_0 — орт нормали, направленной внутрь проводника.

Если вторая среда является хорошо проводящей ($\text{tg} \delta_{32} \gg 10$), то, согласно выражениям (2-7-26) и (2-7-24a)

$$\left. \begin{aligned} Z_{02} &\approx \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2}}{\sigma_2}} e^{i\varphi_2}; \\ \varphi_2 &= \frac{\pi}{4}; \\ \beta_{(2)} &\approx \alpha_{(2)} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2} \sigma_2}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-3-12)$$

Если первая среда — воздух, то

$$|Z_{02}| \ll Z_{01} = 120\pi \text{ [ом]}. \quad (3-3-12a)$$

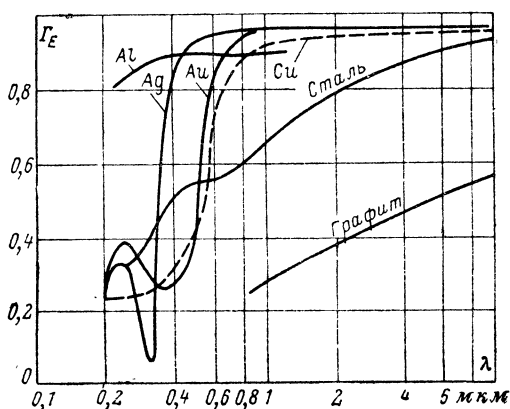


Рис. 3-34. Зависимость коэффициента отражения от длины волны в диапазоне 0,2—10 мкм.

С учетом этого из первого выражения (3-3-9) следует, что

$$|\Gamma_E| = 1 - 2 \frac{|Z_{02}|}{|Z_{01}|} \approx 1, \quad (3-3-13)$$

т. е., как уже отмечалось в § 3-2, модуль коэффициента отражения от хорошо проводящей поверхности практически равен единице. Только при $\lambda < 10$ мкм он заметно уменьшается (рис. 3-34).

В табл. 3-1 даны экспериментальные и вычисленные по формуле (3-3-13) значения $|\Gamma_E|$; при этом предполагается, что удельная проводимость от частоты не зависит.

Таблица 3-1

Значения коэффициента отражения для различных металлов

Металл	$ \dot{\Gamma}_E $ при $\lambda = 12 \text{ мкм}$		$ \Gamma_E $ при $\lambda = 25, 5 \text{ мкм}$		при $\lambda \approx 0,6 \text{ мкм}$ (эксперимент)		
	Эксперимент	Теоретически	Эксперимент	Теоретически	$ \dot{\Gamma}_E $	$\alpha \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$	$\beta \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-1}$
Na					0,998	5	2,61
Ag	0,988	0,987	0,989	0,988	0,95	18	3,64
Cu	0,984	0,986	0,988	0,987	0,70	64	2,62
Fe					0,33	151	1,63
Al			0,980	0,984			

Второе выражение (3-2-49) при подстановке в него \dot{P}_E из (3-3-9) с учетом формул (3-3-12) и (3-3-12а) принимает вид:

$$E_{m(2)} \approx e_1 2H_m \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2}}{\sigma_2}} \times \\ \times e^{-\alpha_{(2)} x_3} \cos\left(\omega t - \beta_{(2)} x_3 + \frac{\pi}{4}\right). \quad (3-3-14)$$

При $x_3=0$ плотность потока мощности, поступающей из первой (непроводящей) среды во вторую (проводящую), равна:

$$P_{03} = \frac{(2H_m)^2}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2}}{\sigma_2}}. \quad (3-3-14a)$$

Эта величина весьма мала по сравнению с плотностью потока мощности падающей волны даже при сверхвысоких частотах.

Из табл. 2-2 видно, что скорость распространения и глубина проникновения электромагнитного поля в проводниковую среду малы. Толщина слоя, в котором протекают токи проводимости, тем меньше, чем больше частота поля и проводимость среды σ_2 . Действительно, согласно выражению (3-3-14) плотность тока во второй (проводящей) среде

$$J_{(2)} = \sigma_2 E_{(2)} \approx e_1 2H_m \sqrt{\omega \mu_{a2} \sigma_2} \times \\ \times e^{-\alpha_{(2)} x_3} \cos\left(\omega t - \beta_{(2)} x_3 + \frac{\pi}{4}\right). \quad (3-3-15)$$

Амплитуды плотности тока распределяются по глубине (вдоль оси x_3) согласно выражению

$$J_{m(2)} = J_{m \text{ пов}} e^{-\alpha_{(2)} x_3}, \quad (3-3-15a)$$

где

$$J_{m \text{ пов}} = 2H_m \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2} \sigma_2}{2}}. \quad (3-3-15b)$$

Амплитуда полного тока, протекающего во второй среде вдоль оси x_1 в полоске шириной по оси x_2 в l м, согласно формуле (3-3-15a) определяется выражением

$$\begin{aligned} I_{m(2)} &= \int_0^{\infty} J_{m \text{ пов}} e^{-\alpha_{(2)} x_3} dx_3 = \\ &= J_{m \text{ пов}} \frac{1}{\alpha_{(2)}} = J_{m \text{ пов}} \Delta [a/m], \end{aligned} \quad (3-3-16)$$

в котором

$$\Delta = \frac{1}{\alpha_{(2)}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_{a2} \sigma_2}}$$

— эквивалентная глубина проникновения тока [см. выражение (2-7-25)]. Эта величина позволяет определить протекающий по проводнику полный ток, если известна плотность тока на его поверхности [см. выражение (3-3-15b)].

Явление проникновения тока в проводник на малую глубину называется поверхностным эффектом (скин-эффектом).

Так как при сверхвысоких частотах $\Delta \leq 1$ мм, то граничное условие (3-3-11), установленное для идеально проводящей среды, приближенно имеет место и на поверхности реального проводника. Поэтому при решении большинства технических задач, связанных с полями высокой частоты, реальный проводник можно заменять идеальным, не рассматривая поле внутри проводника.

Проникновение электромагнитного поля через металлическую пластину при нормальном падении на ее поверхность плоской однородной волны (рис. 3-35, а).

Положим, что пластина толщиной d с параметрами ϵ_{a2} , μ_{a2} и σ_2 разделяет два полупространства с парамет-

рами $\mu_a = \mu_0$, $\epsilon_a = \epsilon_0$ и $\sigma = 0$. Решая систему уравнений (3-3-5a), в которых принимаем $\beta_{(1)} = \beta_{(3)} = \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$,

$$k_{(2)} \approx \beta_{(2)} (1 - j), \quad \beta_{(2)} \approx \alpha_{(2)} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2} \sigma_2}{2}},$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\omega \mu_{a2}}{\sigma_2}} e^{j\pi/4} \text{ и } Z_{01} = Z_{03} = 120\pi,$$

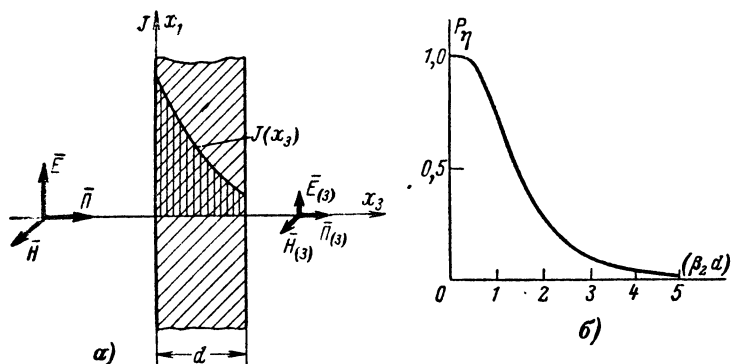


Рис. 3-35. Проникновение электромагнитного поля через металлическую пластину.

a — распределение плотности тока в пластине; *б* — зависимость коэффициента проникновения от толщины пластины и частоты поля.

можно найти модуль коэффициента проникновения, т. е. относительную величину поля, прошедшего через пластину

$$P_{\eta} = \left| \frac{\dot{E}_{m(3)}}{\dot{E}_{m(1)}} \right| \approx \sqrt{\frac{2}{\operatorname{ch}(2\beta_{(2)} d) + \cos(2\beta_{(2)} d)}}. \quad (3-3-17)$$

Это выражение справедливо при $\frac{|Z_{02}|}{\sqrt{2} Z_{01}} < 1$. На рис.

3-35, б оно представлено графически. При $\beta_{(2)} d = \frac{d}{\Delta} \gg \geq 5$ имеем:

$$P_{\eta} \approx 2e^{-\beta_{(2)} d} \leq 0,013.$$

Из последнего выражения следует, что практически полное экранирование переменного поля сверхвысокой частоты легко осуществимо.

Абсолютно черная среда. Если первой средой является вакуум, а вторая среда обладает потерями и имеет параметры $\tilde{\mu}_{a2}$, $\tilde{\epsilon}_{a2}$, удовлетворяющие условию

$$\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}} = 120\pi \text{ [OM]}, \quad (3-3-18)$$

то вся энергия падающей волны полностью, без отражения, поглощается второй средой; такая среда может быть названа «абсолютно черной средой». На основе выражения (2-1-6) условие (3-3-18) может быть представлено в следующем виде:

$$\sqrt{\frac{\mu_2(1 - j \operatorname{tg} \delta_{m2})}{\epsilon_2(1 - j \operatorname{tg} \delta_{e2})}} = 1$$

или

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_{e2} &= \operatorname{tg} \delta_{m2} = \operatorname{tg} \delta, \\ \mu_2 &= \epsilon_2. \end{aligned} \right\} \quad (3-3-18a)$$

Согласно выражению (2-7-12) эквивалентная глубина проникновения электромагнитной энергии в абсолютно черную среду

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{\lambda_2}{2\pi \operatorname{tg} \delta}.$$

Из этой формулы следует, что если $\operatorname{tg} \delta \approx \frac{1}{2\pi}$, то поле в абсолютно черной среде убывает в e раз на расстоянии, равном длине одной волны.

Из условия (3-3-18) следует, что абсолютно черная среда должна обладать как «электрическими», так и «магнитными» потерями. Помещение, внутренние поверхности которого покрыты слоем такого материала, превращается в «неограниченное пространство». Материалы с такими свойствами, очевидно, могут быть использованы для радиолокационной маскировки.

Диффузное отражение. Если поверхность, на которую падает электромагнитная волна, имеет неровности, размеры которых сравнимы с длиной волны («шероховатая» поверхность), то возникают отраженные волны во всевозможных направлениях (рис. 3-36). Интенсивность отраженного поля приближенно определяется законом Ламберта

$$P(\alpha) = P_{\text{макс}} \cos \alpha. \quad (3-3-18б)$$

Согласно этому закону максимальная интенсивность отраженного поля наблюдается в направлении нормали.

Движущаяся поверхность раздела. Рассмотрим отражение плоской электромагнитной волны, падающей на поверхность раздела «медленно» движущейся среды ($u \ll c$). Напряженности электрического поля падающей, отраженной и прошедшей волн определяются соответственно выражениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{E}_m e^{j(\omega t - k_{(1)} x_3)}; \\ \dot{\mathbf{E}}_o &= \mathbf{E}_{mo} e^{j(\omega_o t - k_o x_3)}; \\ \dot{\mathbf{E}}_{(2)} &= \mathbf{E}_{m(2)} e^{j(\omega_2 t - k_{(2)} x_3)}. \end{aligned} \right\} \quad (3-3-19)$$

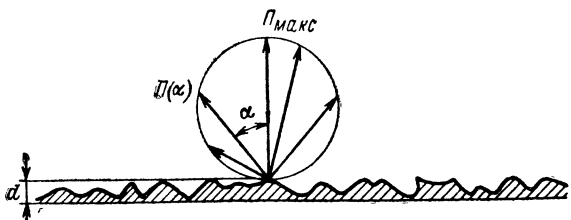


Рис. 3-36. Диффузное отражение от «шероховатой» поверхности ($d \approx \lambda$).

Если первая среда вакуум, то постоянные распространения падающей и отраженной волны соответственно равны:

$$k_{(1)} = \beta_{(1)} = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o} = \frac{\omega}{c};$$

$$k_o = \beta_o = \frac{\omega_o}{c}.$$

Если во второй (движущейся) среде потерь нет, то постоянная распространения прошедшей волны

$$k_{(2)} = \beta_{(2)} = \frac{\omega_2}{v_{(2)}}.$$

Здесь

$$v_{(2)} = \frac{c}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \pm \left(1 - \frac{1}{\mu_2 \epsilon_2}\right) u \approx \frac{c}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}$$

— скорость распространения электромагнитного поля [см. выражение (2-7-31)]. Так как поверхность раздела движется со скоростью $\mathbf{u} = \pm \mathbf{e}_3 u$, то положение ее определяется координатой $x_3 = \pm ut$. При этом знак плюс берется в случае, если поверхность раздела движется в направлении движения падающей волны, знак минус — если в противоположном.

Удовлетворяя граничному условию (1-5-6) при $x_3 = \pm ut$ с учетом выражений (3-3-19), получаем:

$$E_m e^{i(\omega \mp \beta_{(1)} u) t} + E_{m0} e^{i(\omega_0 \pm \beta_0 u) t} = E_{m(2)} e^{i(\omega_2 \mp \beta_{(2)} u) t}.$$

Так как это условие выполняется в любой момент времени, то

$$\omega \mp \beta_{(1)} u = \omega_0 \pm \beta_0 u = \omega_2 \mp \beta_{(2)} u.$$

Откуда с учетом значений $\beta_{(1)}$, β_0 и $\beta_{(2)}$ находим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \omega \left(1 \mp \frac{2u}{c} \right); \\ \omega_2 &= \omega \left[1 \pm \frac{u}{c} \left(\sqrt{\mu_2 \epsilon_2} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3-3-20)$$

Эти формулы описывают эффект Доплера, который заключается в том, что частота отраженной и прошедшей волны при движении границы раздела отличается от частоты первичного поля. В результате этого напряженность поля в первой среде $\mathbf{E}_{(1)} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0$ изменяется во времени по амплитуде, т. е. возникают биения с частотой

$$f_{\text{биен}} = \frac{|\omega - \omega_0|}{2\pi} = 2 \frac{u}{c} f. \quad (3-3-21)$$

Это явление широко используется в технике, в частности, для измерения скорости движущихся радиолокационных целей.

Давление электромагнитного поля на поверхность раздела сред без потерь. В § 1-6 было показано, что поток энергии электромагнитного поля оказывает давление [см. формулу (1-6-19)]. При нормальном падении плоской электромагнитной волны давление на поверхность раздела двух сред согласно этой формуле определяется выражением

$$\mathbf{p}_{\text{эм}} = \frac{1}{2} (\mu_a H^2 + \epsilon_a E^2) \mathbf{n}_0,$$

где \mathbf{n}_0 — орт нормали к поверхности, совпадающий с направлением распространения энергии. Согласно выражению (3-3-2) на границе раздела ($x_3=0$)

$$E = E_m (1 + \Gamma_E) \cos \omega t;$$

$$H = \frac{E_m}{Z_0} (1 - \Gamma_E) \cos \omega t,$$

а среднее значение давления на поверхность раздела двух сред

$$\begin{aligned} p_{эм} &= n_0 \varepsilon_a E_d^2 (1 + \Gamma_E^2) = \\ &= \frac{P_0}{v_{(1)}} (1 + \Gamma_E^2) = n_0 \omega_0 (1 + \Gamma_E^2). \end{aligned} \quad (3-3-22)$$

Здесь P_0 — среднее значение вектора Пойнтинга;

ω_0 — средняя плотность энергии [см. формулы (2-7-10) и (2-7-11a)];

$v_{(1)}$ — фазовая скорость в первой среде, равная скорости распространения электромагнитной энергии (поскольку предполагается, что первая среда не обладает потерями).

Формула (3-3-22) действительна при любых параметрах второй среды за исключением случая, когда они одинаковы с параметрами первой среды (среды не различаются в электромагнитном смысле). Очевидно также, что поверхность полностью прозрачной среды и поверхность абсолютно черной среды испытывают в 2 раза меньшее давление, чем поверхность идеально проводящей среды. Действительно, при полном отражении, т. е. когда $|\Gamma_E| = 1$,

$$p_{эм0} = n_0 2 \frac{P_0}{v_{(1)}} = n_0 2\omega_0. \quad (3-3-22a)$$

На основе измерения этого давления может определяться поток мощности электромагнитного поля.

3-4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ МЕЖДУ ПРОВОДЯЩИМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Однородная электромагнитная волна горизонтальной поляризации, падающая под любым углом θ на границу идеально проводящей среды ($\sigma_2 = \infty$, $Z_{02} = 0$), полностью отражается, так как согласно выражению (3-2-15) при

этом $|\Gamma_E|=1$ и $\psi_E=\pi$; во второй среде электромагнитное поле полностью отсутствует.

На основании первой формулы (3-2-49) и уравнения II системы (2-1-5), напряженности электрического и магнитного полей в первой среде равны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m(1)} &= -j e_1 2H_m Z_{01} \sin \beta_0 x_3 e^{-jk_0 x_2}; \\ \dot{H}_{m(1)} &= 2H_m (e_2 \cos \theta \cos \beta_0 x_3 + \\ &\quad + j e_3 \sin \theta \sin \beta_0 x_3) e^{-jk_0 x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3-4-1)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= k_{(1)} \cos \theta; \\ k_0 &= k_{(1)} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3-4-1a)$$

Эти выражения описывают направленную волну, распространяющуюся в направлении оси x_2 , распределение амплитуд которой по оси x_3 имеет вид стоячей волны (рис. 3-37).

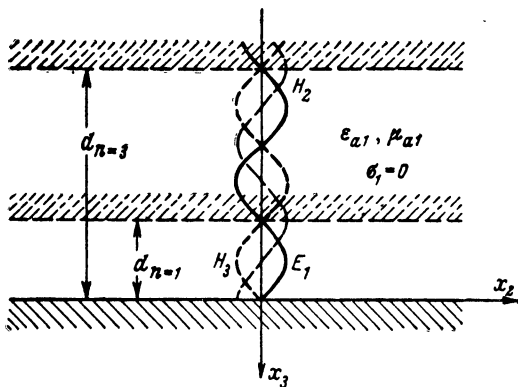


Рис. 3-37. Распределение амплитуд направленной волны.

Из выражений (3-4-1) следует, что на расстояниях

$$d_n = \frac{n\pi}{\beta_0} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (3-4-2)$$

от идеально проводящей плоскости составляющая вектора напряженности электрического поля $E_1=0$, что соответствует граничному условию (3-3-11) на поверхности идеального проводника. Поэтому определяемое уравне-

ниями (3-4-1) поле не изменится, если параллельно плоскости $0x_1x_2$ на расстоянии d_n поместить бесконечную идеально проводящую плоскость (рис. 3-38).

Между параллельными идеально проводящими плоскостями могут распространяться неоднородные электромагнитные волны с продольными компонентами вектора \mathbf{H} (ТЕ- или Н-волны), имеющие структуру стоячей вол-

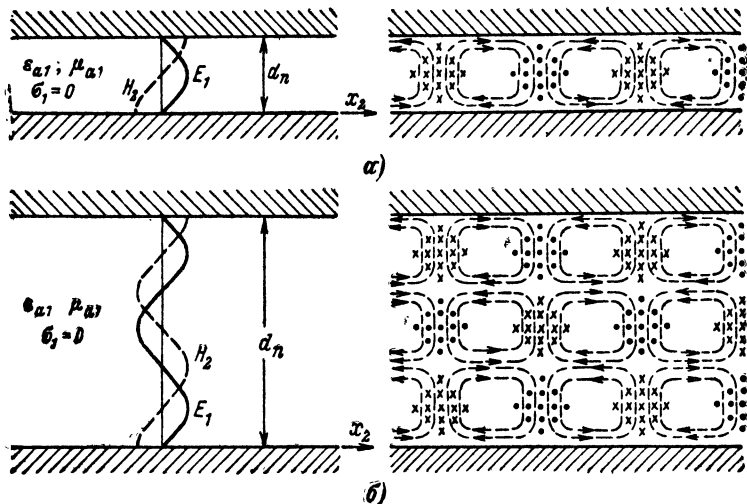


Рис. 3-38. Структура электромагнитного поля между параллельными идеально проводящими плоскостями (горизонтальная поляризация)

при $d_n = \frac{\lambda_{\perp}}{2}$ и $n=1$ (а) и при $d_n = 3\lambda_{\perp}/2$ и $n=3$ (б).

ны в поперечном направлении (в направлении оси x_3). Согласно выражению (3-4-2) «длина поперечной волны»

$$\lambda_{\perp} = \frac{2\pi}{\beta_0} = \frac{2d_n}{n}, \quad (3-4-2a)$$

а «поперечное волновое число»

$$\beta_0 = \frac{n\pi}{d_n}. \quad (3-4-2б)$$

Согласно формулам (3-4-1а) постоянная распространения

$$k_0 = \sqrt{k_{(1)}^2 - \beta_0^2},$$

где $k_{(1)}$ — постоянная распространения для неограниченной среды с теми же параметрами μ_{a1} и ϵ_{a1} , что и среда между плоскостями. Так как предполагается, что эта среда не обладает потерями, то, согласно формуле (2-1-13) $k_{(1)} = \beta_{(1)} = \frac{2\pi}{\lambda_1}$. Отсюда, учитывая равенства (3-4-2б),

$$\cos \theta = \frac{\beta_0}{k_{(1)}} = \frac{n\lambda_1}{2d_n},$$

т. е.

$$k_0 = k_{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_1}{2d_n}\right)^2} \quad (3-4-3)$$

и

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_1}{2d_n}\right)^2}. \quad (3-4-4)$$

Найдем фазовую скорость v_ϕ и длину направляемой волны Λ в направлении распространения x_2 . Согласно (2-1-12) и (2-1-13) в данном случае $v_\phi = \frac{\omega}{k_0}$ и $\Lambda = \frac{2\pi}{k_0}$. Если подставить в эти выражения значение k_0 из формулы (3-4-3), то получим:

$$v_\phi = \frac{v_{(1)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_1}{2d_n}\right)^2}}; \quad (3-4-5)$$

$$\Lambda = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_1}{2d_n}\right)^2}}. \quad (3-4-6)$$

Волновое сопротивление среды, ограниченной параллельными проводящими плоскостями, определяется как отношение составляющей вектора \mathbf{E} , находящейся в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, к составляющей \mathbf{H} в той же плоскости. Обозначим это сопротивление Z_{0H} (так как при горизонтальной поляризации имеется продольная составляющая вектора \mathbf{H})

$$Z_{0H} = \frac{E_1}{H_3}.$$

Подставляя в эту формулу E_1 , H_3 из выражений (3-4-1) и учитывая выражение (3-4-4), получим:

$$Z_{0H} = Z_{01} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n \lambda_1}{2d_n}\right)^2}}, \quad (3-4-7)$$

где Z_{01} — волновое сопротивление неограниченной среды с параметрами μ_{a1} и ϵ_{a1} .

Из выражений (3-4-5) — (3-4-7) следует, что фазовая скорость, длина направляемой волны и волновое сопротивление зависят от частоты поля, поскольку частота эта определяет длину волны λ_1 в неограниченной среде; следовательно, распространение направленных ТЕ- или Н-волн сопровождается дисперсией.

В данном случае дисперсия возникает вследствие ограничения среды в геометрическом смысле, причем предполагается, что среда, в которой распространяется поле, потерями и дисперсией параметров μ_{a1} и ϵ_{a1} не обладает. На основании выражения (2-7-22) с учетом (3-4-5) групповая скорость распространения электромагнитного поля между параллельными проводящими поверхностями

$$v_{гр} = \frac{v_\phi}{1 - \frac{\omega}{v_\phi} \frac{dv_\phi}{d\omega}} = v_{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{n \lambda_1}{2d_n}\right)^2}. \quad (3-4-8)$$

Значения величин v_ϕ , Λ и Z_{0H} в среде между проводящими поверхностями больше, чем в неограниченной среде. При увеличении частоты f (уменьшении λ_1) величины v_ϕ , Λ и Z_{0H} стремятся к соответствующим значениям в неограниченной среде:

$$\begin{aligned} v_\phi &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}}}; \\ \Lambda &\rightarrow \frac{1}{f \sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}}}; \\ Z_{0H} &\rightarrow \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}} = Z_{01}. \end{aligned}$$

При уменьшении частоты (увеличении λ_1) v_ϕ , Λ и Z_{0H} увеличиваются; на частоте $f_{кр}$, называемой критической, при которой $\frac{n \lambda_1}{2d_n} = 1$, они обращаются в бесконечность.

Критическая частота

$$f_{\text{кр}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{\text{д1}} \epsilon_{\text{д1}}}} \frac{1}{\lambda_{\text{кр}}},$$

где

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2d_n}{n}$$

— критическая длина волны системы параллельных проводящих поверхностей.

Заметим, что $\lambda_{\text{кр}}$ не зависит от параметров среды, заполняющей пространство между параллельными проводящими поверхностями; параметры эти определяют лишь критическую частоту поля.

Если в выражения (3-4-5) — (3-4-8) ввести величины $\lambda_{\text{кр}}$ и $f_{\text{кр}}$, то они примут следующий вид:

$$\begin{aligned} k_0 &= k_{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = \\ &= k_{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2} = k_{(1)} \sin \theta; \end{aligned} \quad (3-4-9)$$

$$v_{\phi} = \frac{v_{(1)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = \frac{v_{(1)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}} = \frac{v_{(1)}}{\sin \theta}; \quad (3-4-10)$$

$$\begin{aligned} v_{\text{гр}} &= v_{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = v_{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2} = \\ &= v_{(1)} \sin \theta; \end{aligned} \quad (3-4-11)$$

$$Z_{0\text{H}} = \frac{Z_{01}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = \frac{Z_{01}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}} = \frac{Z_{01}}{\sin \theta}; \quad (3-4-12)$$

$$\Lambda = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda_1}{\sin \theta}. \quad (3-4-13)$$

Зависимость v_{ϕ} и $v_{\text{гр}}$ от частоты показана графически на рис. 3-39.

При критической частоте, как видно из выражения (3-4-9), $k_0 = 0$ и $\theta = 0$, т. е. вдоль оси x_2 поле не распространяется. Если $f < f_{\text{кр}}$, то постоянная распространения,

согласно выражению (3-4-9), оказывается мнимой величиной

$$k_0 = \pm i k_{(1)} \sqrt{\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2 - 1}.$$

Следовательно, при этих частотах напряженность поля будет убывать по экспоненциальному закону $e^{-|k_0|x_2}$, сохраняя постоянной фазу в направлении x_2 .

При данной частоте f могут распространяться волны нескольких типов, причем каждая из них соответствует определенному значению n и имеет свою фазовую скорость. Число типов волн ограничивается условием $n = \frac{2d_n}{\lambda_1}$. Если $n < \frac{2d_n}{\lambda_1}$, то будут существовать волны всех типов, удовлетворяющие этому условию. Если же $n > \frac{2d_n}{\lambda_1}$, то волны соответствующих типов будут затухать, так как в этом случае постоянная распространения будет мнимой. Так, например, если $4 > \frac{2d_n}{\lambda_1} > 3$, то будут распространяться волны трех типов, соответствующие числам $n=1, 2$ и 3 .

В случае вертикальной поляризации падающей волны между параллельными пластинами будут распространяться неоднородные волны с продольной составляющей вектора E (ТМ- или Е-волны). Зависимость k_0 , v_ϕ , v_{gr} и Λ от частоты в этом случае определяется формулами (3-4-9) — (3-4-11) и (3-4-13), а волновое сопротивление

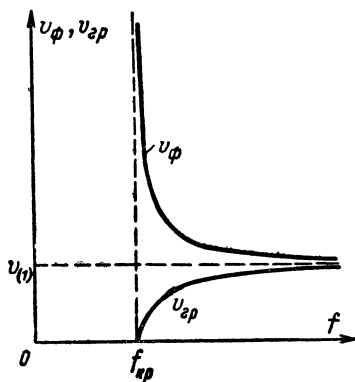


Рис. 3-39. Зависимость скорости v_ϕ и v_{gr} от частоты.

$$\begin{aligned} Z_{0E} &= -\frac{E_3}{H_1} = \\ &= Z_{01} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2} = \\ &= Z_{01} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}. \end{aligned}$$

(3-4-14)

Учитывая значение Z_{0H} , определяемое по формуле (3-4-12), имеем:

$$Z_{0H} Z_{0E} = Z_{01}^2. \quad (3-4-15)$$

Распространение электромагнитного поля между параллельными проводящими плоскостями можно рассматривать как суперпозицию двух однородных плоских волн, многократно отражающихся от параллельных плоскостей под углом θ (рис. 3-40). С уменьшением частоты

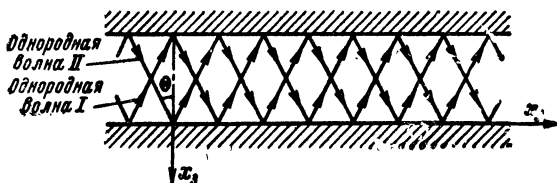


Рис. 3-40. Многократное отражение плоских волн от параллельных проводящих поверхностей.

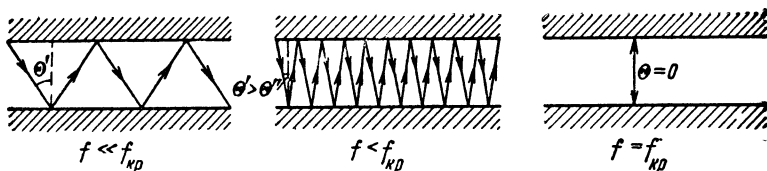


Рис. 3-41. Многократное отражение плоских волн при различном отношении $f/f_{кр}$.

этот угол уменьшается и картина распространения приобретает вид, приведенный на рис. 3-41. Интерпретация неоднородной волны, движущейся между параллельными проводящими поверхностями в виде суммы двух плоских однородных волн, позволяет наглядно объяснить отличие скоростей v_ϕ и $v_{гр}$ от $v_{(1)}$ и длины волны Λ от λ_1 . Рассматривая рис. 3-42, можно убедиться, что $\Lambda = \frac{\lambda_1}{\sin \theta}$

и $v_\phi = \frac{v_{(1)}}{\sin \theta}$. На этом рисунке сплошными линиями показано положение гребней составляющих волн в момент времени t , а пунктирной линией — в момент $t + \Delta t$. Гребень каждой волны перемещается со скоростью $v_{(1)}$. В точке пересечения гребней составляющих волн распо-

ложен гребень результирующей волны. Точка пересечения гребней перемещается быстрее, чем составляющие волны, т. е.

$$v_{\phi} = \frac{\Delta l}{\sin \theta \Delta t} = \frac{v_{(1)}}{\sin \theta} > v_{(1)}.$$

Неравенство $v_{\text{гр}} < v_{(1)}$ можно объяснить тем, что каждая составляющая плоская волна распространяется со скоростью $v_{(1)}$ по зигзагообразному пути; сигнал же за это

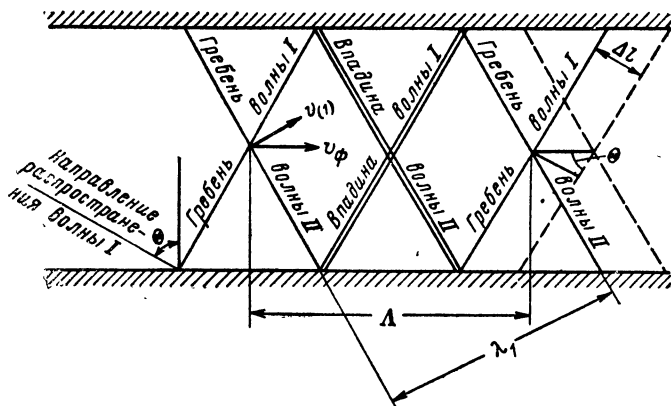


Рис. 3-42. Сложение двух однородных плоских волн, распространяющихся между параллельными проводящими поверхностями; двумерная иллюстрация к формулам:

$$v_{\phi} = \frac{v_{(1)}}{\sin \theta}, \quad v_{\text{гр}} = v_{(1)} \sin \theta, \quad \Delta = \frac{\lambda_1}{\sin \theta}.$$

время проходит по оси x_2 более короткий путь, в результате чего его скорость $v_{\text{гр}}$ и оказывается меньше скорости $v_{(1)}$.

Между параллельными плоскостями может распространяться и плоская однородная волна. Действительно, пусть плоская однородная волна распространяется в направлении x_2 в неограниченной среде с постоянной распространения $k_{(1)} = \omega \sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}}$. При этом векторы напряженностей магнитного и электрического полей

$$\begin{aligned} \dot{H}_m &= \mathbf{e}_1 H_m e^{-jk_{(1)} x_2}, \\ \mathbf{E}_m &= \mathbf{e}_3 H_m Z_{01} e^{-jk_{(1)} x_2}. \end{aligned}$$

Если внести в поле две идеально проводящие плоскости, перпендикулярные оси x_3 и отстоящие друг от друга на любом расстоянии d , то поле не изменится, так как граничные условия ($E_\tau = 0$) будут удовлетворены. Такая волна распространяется между параллельными плоскостями так же, как и в неограниченной среде, имея только поперечные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Она называется поперечной электромагнитной, или волной ТЕМ. Постоянная распространения, фазовая скорость и волновое сопротивление определяются теми же выражениями, что и для неограниченной среды. Величины эти не зависят от частоты, если среда, заполняющая пространство между параллельными плоскостями, не обладает потерями.

Итак, между параллельными и идеально проводящими плоскостями могут распространяться волны Н, Е и ТЕМ. Волны Н и Е существуют при достаточно больших частотах и образуют множество типов, отличающихся структурой поля.

3-5. НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ. ВОЛНОВОДЫ

В предыдущих параграфах было показано, что граница раздела двух сред обладает способностью направлять поток электромагнитной энергии. Это явление используется в технике для канализации электромагнитной энергии. Направляющую систему, осуществляющую канализацию, в электроэнергетике обычно называют линией передачи, а в электросигнализации — линией связи.

Поскольку в электроэнергетике практически используется монохроматическое поле, то линия передачи может обладать сильной дисперсией. В линии связи это недопустимо, поскольку всякий сигнал состоит из сравнительно широкого спектра частот. Иначе говоря, линия передачи может быть узкополосной в смысле спектра пропускаемых частот, а линия связи — широкополосной. В этом заключается одно из принципиальных их различий.

Во всех направляющих системах (рис. 3-43) структура электромагнитного поля содержит в общем случае составляющие векторов поля в направлении передачи энергии. Такие системы могут быть разделены на «ускоряющие» и «замедляющие». В первом случае фазовая

скорость больше, а во втором меньше фазовой скорости в неограниченной среде.

Ускоряющей направляющей системой является металлический волновод (рис. 3-43, а); к ускоряющим системам может быть отнесен и диэлектрический волновод ж, если его поперечные размеры больше длины волны

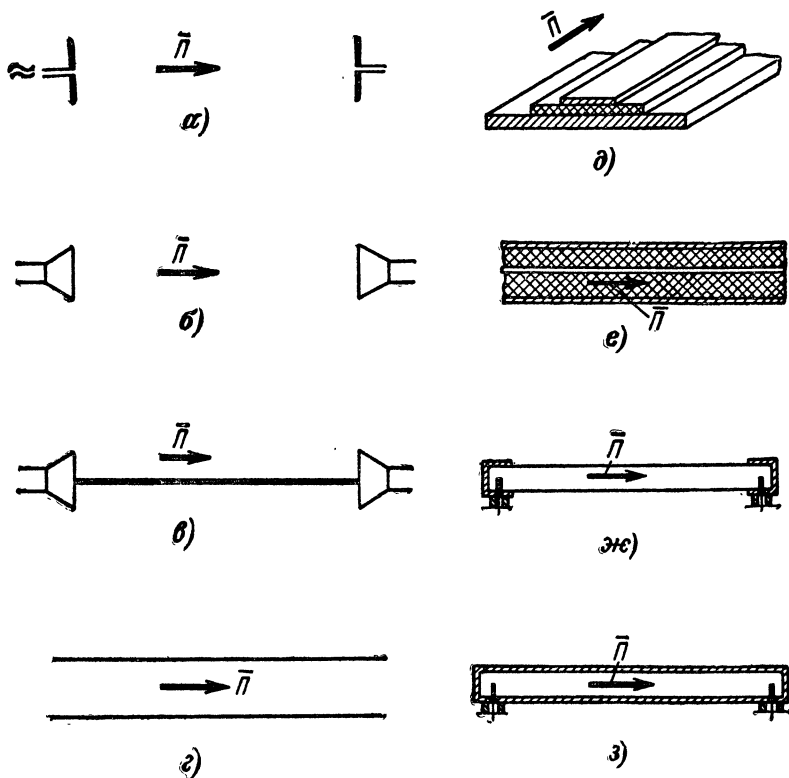


Рис. 3-43. Различные системы канализации электромагнитной энергии.

в нем. Электромагнитное поле в ускоряющих направляющих системах практически полностью изолировано от окружающей среды. В таких системах могут распространяться Е- или Н-волны.

Диэлектрические волноводы с малыми поперечными размерами и проводниковые линии являются замедляю-

щими направляющими системами (рис. 3-43, в—е). Электромагнитное поле сосредоточено около замедляющей направляющей системы, убывая при удалении от нее, т. е. образуя поверхностную волну (см. § 3-2). Фазовая скорость поверхностной волны меньше фазовой скорости волны в неограниченной среде. Поверхностная волна в диэлектрическом волноводе может иметь структуру E или H , либо обе продольные составляющие (EH - или HE -волны). В случае проводниковой линии поле имеет структуру E волны.

Продольная составляющая вектора E в проводниковых линиях (рис. 3-43, з, д, е) мала по сравнению с его поперечной составляющей. Вследствие этого электромагнитное поле в таких линиях практически имеет структуру ТЕМ-волны.

Направляющая система (волновод), проводниковая линия) называется регулярной, если форма ее поперечного сечения, граничные условия на ее поверхности и параметры среды, заполняющей или окружающей систему, постоянны на всей ее длине.

Для передачи энергии стационарного (постоянного) поля необходима направляющая система, состоящая не менее чем из двух проводов; такой системой является, в частности, открытая двухпроводная линия (рис. 3-43, з).

Передача энергии переменного поля при частотах меньше 100 $кГц$ проще осуществляется с помощью открытой двухпроводной линии. При более высоких частотах применение такой линии встречает технические затруднения и приходится использовать коаксиальную или полосковую двухпроводную линию (рис. 3-43, д, е), а при частотах выше 100 $МГц$ — волноводную линию в виде металлической трубы (рис. 3-43, з).

При еще более высоких частотах, в том числе при частотах оптического диапазона, находят применение ди-

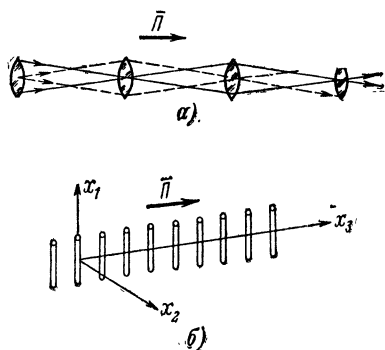


Рис. 3-44. Лучевые волноводы с линзами (а) и проводящими цилиндрами — ретрансляторами (б).

электрические волноводы в виде стержней или волокон (нитей).

Затруднения, возникающие при канализации полей высоких и сверхвысоких частот, обуславливаются следующими причинами:

1. Потери в проводах, вызванные токами проводимости, возрастают пропорционально $\sqrt{\omega}$, как это следует из выражения (3-3-14a).

2. Потери в изоляторах, поддерживающих провода, возрастают пропорционально ω .

3. Возникают потери на излучение энергии, если расстояние между проводами открытой линии сравнимо с длиной волны (см. § 2-5).

При низких частотах потери в открытых линиях даже сверхдальних передач составляют небольшую долю от передаваемой мощности. При сверхвысоких частотах, даже в самых совершенных волноводных линиях длиной всего только в несколько метров, потери превышают полезную мощность [см. выражение (3-2-34a)].

В силу этого в диапазоне сантиметровых и еще более коротких волн, когда это возможно по конструктивным соображениям, передачу энергии осуществляют без проводов, используя направленное излучение. Примером может служить линия направленной передачи, состоящая из «пассивных» ретрансляторов (рис. 3-44).

Вместе с тем значительные потери при переменном токе заставляют в сверхдальних энергетических линиях использовать постоянный ток.

Металлический волновод прямоугольного сечения представляет собой трубу из хорошо проводящего металла (обычно медь, латунь, алюминий), внутри которой возбуждается электромагнитное поле. Толщина стенок волновода значительно больше глубины проникновения поля [см. формулу (2-7-25) и (3-3-17)], вследствие чего во внешнее окружающее пространство поле практически не проникает.

Структуру электромагнитного поля внутри металлической трубы прямоугольного сечения можно выяснить на основе предыдущего параграфа. Если систему из двух параллельных идеально проводящих плоскостей, в которой распространяется Н-волна, описываемая уравнениями (3-4-1), дополнить двумя другими параллельными идеально проводящими плоскостями, перпендикулярными первым двум и параллельными плоскости Ox_2x_3 , то

составляющие вектора \mathbf{E} окажутся перпендикулярными этим дополнительным плоскостям; следовательно, граничные условия (3-3-11) будут удовлетворяться при любом расстоянии между плоскостями и структура поля, описываемого уравнениями (3-4-1), не нарушится. Таким образом, мы перешли к направляющей системе — прямоугольному волноводу с волной Н.

В нем может распространяться и волна Е, однако граничные условия на дополнительных плоскостях удовлетворяются не при любом расстоянии между ними.

Волна ТЕМ вследствие невыполнимости при ее структуре граничных условий (3-3-11) не может распространяться в волноводе ни при каких расстояниях между дополнительными плоскостями.

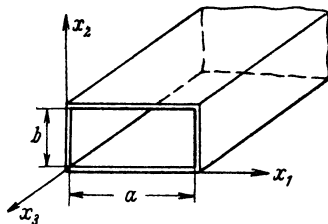


Рис. 3-45. Прямоугольный волновод.

Рассмотрим металлический прямоугольный волновод, широкая стенка которого имеет размер a и направлена по оси x_1 , а узкая размером b направлена по оси x_2 ; в этом случае направление распространения поля совпадает с осью x_3 (рис. 3-45). Если бы заполняющая волновод среда без потерь с параметрами μ_{a1} , ϵ_{a1} не была ограничена его стенками, то волновое сопротивление среды, фазовая скорость, постоянная распространения и длина волны в такой среде были бы равны:

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}}; \quad v_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}}}; \quad k_{(1)} = \beta_{(1)} = \omega \sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}};$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}},$$

где λ — длина волны в вакууме.

Так как стенки волновода выполняются из хорошо проводящего металла (медь, алюминий), для которого глубина проникновения поля весьма мала [см. формулу (2-7-25)], то стенки волновода можно считать идеально проводящими и условие (3-3-11) удовлетворяется.

Для определения структуры поля Н-волны в прямоугольном волноводе волновое уравнение (2-1-10) для

комплексных амплитуд $\dot{\mathbf{H}}_m$ напишем в декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}_m}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}_m}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}_m}{\partial x_3^2} + k_{(1)}^2 \dot{\mathbf{H}}_m = 0. \quad (3-5-1)$$

Учитывая необходимость выполнения граничных условий (3-3-11) на металлических стенках волновода и распространение волны в направлении оси x_3 , решение этого уравнения можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{H}_m(x_1, x_2) e^{-jk_0 x_3}. \quad (3-5-1a)$$

Здесь

$$k_0 = k_{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = k_{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}$$

— постоянная распространения в волноводе, определяемая выражением (3-4-9).

Векторное волновое уравнение (3-5-1) эквивалентно трем скалярным (см. § Д-6). Для составляющей комплексной амплитуды по оси x_3 с учетом решения (3-5-1a) имеем скалярное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 H_{m3}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 H_{m3}}{\partial x_2^2} + \chi^2 H_{m3} = 0. \quad (3-5-2)$$

Здесь

$$\chi^2 = (k_{(1)}^2 - k_0^2). \quad (3-5-3)$$

Решая уравнение (3-5-2) методом Фурье [см. выражение (Д-6-17)], найдем значение H_{m3} в общем виде:

$$H_{m3} = (A \cos \chi_1 x_1 + B \sin \chi_1 x_1) (C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2), \quad (3-5-4)$$

причем

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \chi^2. \quad (3-5-4a)$$

Остальные составляющие поля: H_{m1} , H_{m2} , E_{m1} и E_{m2} можно найти, выразив их через H_{m3} с помощью уравнений (2-1-5):

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = j\omega \varepsilon_{a1} \dot{\mathbf{E}}_m;$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega \mu_{a1} \dot{\mathbf{H}}_m.$$

Учитывая, что в случае Н-волны $E_3 = 0$, из этих уравнений можно найти:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_1 &= -j \frac{k_0}{\chi^2} \frac{\partial \dot{H}_3}{\partial x_1}, \quad \dot{E}_1 = -j \frac{\omega \mu_{a1}}{\chi^2} \frac{\partial \dot{H}_3}{\partial x_2}; \\ \dot{H}_2 &= -j \frac{k_0}{\chi^2} \frac{\partial \dot{H}_3}{\partial x_2}, \quad \dot{E}_2 = j \frac{\omega \mu_{a1}}{\chi^2} \frac{\partial \dot{H}_3}{\partial x_1}. \end{aligned} \right\} \quad (3-5-5)$$

Постоянные интегрирования в выражении (3-5-4) найдем из удовлетворения граничному условию $E_\tau = 0$, которое сводится к следующим условиям:

$$E_1 = 0 \text{ при } x_2 = 0 \text{ и при } x_2 = b;$$

$$E_2 = 0 \text{ при } x_1 = 0 \text{ и при } x_1 = a.$$

Подставляя в эти условия значения E_1 и E_2 из уравнений (3-5-5), получим:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} &= 0; \quad \left. \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0; \\ \left. \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right|_{x_1=a} &= 0; \quad \left. \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right|_{x_2=b} = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует:

$$B=0; \quad D=0; \quad \chi_1 = \frac{m\pi}{a}; \quad \chi_2 = \frac{n\pi}{b}, \quad (3-5-6)$$

где m и n — целые числа.

Отсюда

$$\chi = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (3-5-6a)$$

Обозначив $AC=H$ и подставляя выражение (3-5-4) в (3-5-5), с учетом (3-5-6) получим нижеследующие формулы, описывающие поле волны H_{mn} (TE_{mn}) в прямоугольном волноводе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{m3} &= H \cos\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{H}_{m1} &= jk_0 \frac{\chi_1}{\chi^2} H \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{H}_{m2} &= jk_0 \frac{\chi_2}{\chi^2} H \cos\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{E}_{m1} &= j\omega \mu_{a1} \frac{\chi_2}{\chi^2} H \cos\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{E}_{m2} &= -j\omega \mu_{a1} \frac{\chi_1}{\chi^2} H \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) e^{-jk_0 x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (3-5-7)$$

Условием распространения поля является вещественное значение постоянной распространения, которая согласно выражению (3-4-9) равна

$$k_0 = k_{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2} = k_{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}. \quad (3-5-8)$$

Вместе с тем на основании равенства (3-5-3) имеем:

$$k_0 = k_{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{\chi}{k_{(1)}}\right)^2};$$

вследствие этого можно написать:

$$\frac{\chi}{k_{(1)}} = \frac{f_{\text{кр}}}{f} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{\text{кр}}}.$$

На основании этого соотношения, учитывая равенство (3-5-6а), находим выражения, определяющие критическую частоту и длину критической волны прямоугольного волновода:

$$\left. \begin{aligned} f_{\text{кр}} &= \frac{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}}}; \\ \lambda_{\text{кр}} &= \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-5-9)$$

Из этих выражений следует, что $\lambda_{\text{кр}}$ определяется лишь геометрическими размерами волновода, тогда как $f_{\text{кр}}$ зависит не только от этих размеров, но и от параметров заполняющей волновод среды.

Длина волны, фазовая и групповая скорость в металлическом волноводе, а также его волновое сопротивление определяются выражениями (3-4-10)—(3-4-13), из которых следует, что фазовая скорость в волноводе больше, а групповая — меньше скорости распространения в неограниченной среде.

Числа m и n в уравнениях (3-5-7) и (3-5-9), обозначающие тип волны, определяют число полуволновых изменений (вариаций) поля соответственно по осям x_1 и x_2 ; этими числами однозначно определяется критическая длина волны, соответствующая данным размерам волновода, причем согласно второму выражению

(3-5-9) с увеличением m и n критическая длина волны уменьшается.

Основным или низшим типом волны называется такой тип, которому соответствует наибольшая длина критической волны при данных поперечных размерах волновода. Поперечные размеры волновода, рассчитанного на основной тип волны, для заданной частоты оказываются наименьшими.

Волна низшего типа обладает меньшей дисперсией, т. е. для такой волны волновод оказывается более широкополосной линией связи. Действительно, из выражения

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\Phi}}{d\lambda_1} &= -\frac{dv_{\Gamma P}}{d\lambda_1} = v_{(1)} \left[\frac{4}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} - \lambda_1^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{v_{(1)}}{\sqrt{\lambda_{\text{кр}}^2 - \lambda_1^2}}, \end{aligned} \quad (3-5-10)$$

полученного на основе формул (3-4-10), (3-4-11) и (3-5-9), видно, что производные $\left| \frac{dv_{\Phi}}{d\lambda_1} \right|$ и $\left| \frac{dv_{\Gamma P}}{d\lambda_1} \right|$ убывают с уменьшением чисел m и n т. е. с увеличением $\lambda_{\text{кр}}$.

Если одно из чисел m или n равно нулю, то, как это следует из выражений (3-5-7), поле будет существовать. Поэтому низшим типом волны Н в прямоугольном волноводе при $a > b$ является волна Н₁₀, для которой $\lambda_{\text{кр}} = 2a$.

Прямоугольный волновод с волной Н₁₀ имеет большое практическое значение в технике сверхвысоких частот. Структура поля волны Н₁₀ описывается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{m3} &= H \cos\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) e^{-jk_0 x_3}, \\ \dot{H}_{m1} &= j \frac{2a}{\lambda_1} \sqrt{1 - (\lambda_1/2a)^2} H \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) e^{-jk_0 x_3} = \\ &= j \frac{\lambda_{\text{кр}}}{\Lambda} H \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) e^{-jk_0 x_3}, \\ \dot{E}_{m2} &= -j \frac{2a}{\lambda_1} Z_{01} H \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) e^{-jk_0 x_3}, \end{aligned} \right\} \quad (3-5-11)$$

которые получаются из выражений (3-5-7) при подстановке в них $m=1$ и $n=0$ с учетом формул (3-5-8) и (3-5-9).

Структура поля волны H_{10} представлена графически на рис. 3-46. В направлении x_2 электрическое поле однородно, т. е. электрические линии параллельны оси x_2 ; распределение электрического поля по оси x_1 имеет вид стоячей волны, причем вдоль стороны a укладывается одна полуволна, вдоль оси x_3 поле имеет вид бегущей волны.

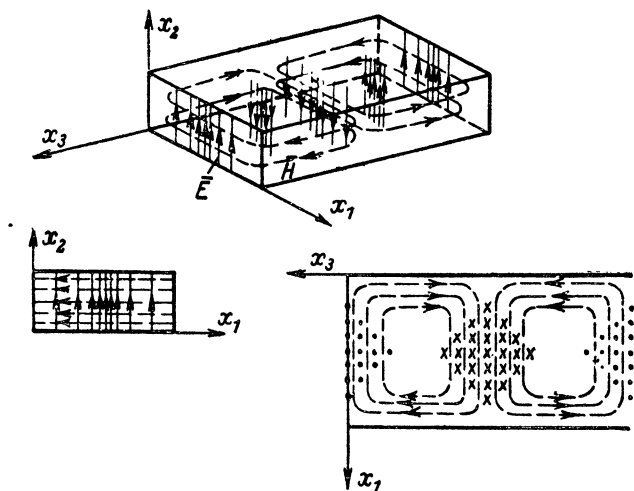


Рис. 3-46. Структура поля волны H_{10} в прямоугольном волноводе.

Важно отметить, что согласно формулам (3-5-11) магнитное поле имеет две составляющие, амплитуды которых зависят от координат рассматриваемой точки. Составляющие эти сдвинуты в пространстве на 90° и во времени на $T/4$. Таким образом, магнитное поле имеет эллиптическую поляризацию, которая вырождается в линейную в точках плоскостей, соответствующих $x_1=0$, $x_1=a/2$ и $x_1=a$. В плоскостях $x_1=0$ и $x_1=a$

$$\left. \begin{aligned} H_3 &= H \cos(\omega t - k_0 x_3); \\ H_1 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3-5-12)$$

в плоскости $x_1 = \frac{a}{2}$

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{2a}{\lambda_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{2a}\right)^2} H \sin(\omega t - k_0 x_3); \\ H_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-5-12a)$$

Магнитное поле имеет круговую поляризацию в точках, где амплитуды составляющих H_1 и H_3 равны. Точки эти лежат в плоскостях, называемых плоскостями круговой поляризации. Таких плоскостей две; они параллельны боковым стенкам волновода и находятся на одинаковых расстояниях от них. Вращение вектора \mathbf{H} в точках, лежащих на различных плоскостях круговой поляризации, имеет противоположное направление. Положение плоскостей находится из условия равенства амплитуд составляющих магнитного поля в точках этих плоскостей

$$\left| \cos\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \right| = \frac{2a}{\lambda_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{2a}\right)^2} \left| \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \right|.$$

Отсюда

$$\left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \right| = \frac{\lambda_1}{2a \sqrt{1 - (\lambda_1/2a)^2}}, \quad (3-5-13)$$

где x_1 — расстояние плоскости круговой поляризации от соответствующей боковой стенки. Из этой формулы видно, что положение плоскости круговой поляризации с изменением частоты изменяется.

На основании третьей формулы (3-5-11) плотность тока смещения в прямоугольном волноводе

$$\mathbf{J}_{\text{см}} = \epsilon_{a1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{e}_2 \frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{2a}{\lambda_1} H \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \cos(\omega t - k_0 x_3). \quad (3-5-14)$$

По внутренней поверхности стенок волновода текут токи проводимости; их плотность может быть определена на основе формулы (3-3-11a) при соответствующей подстановке значений H_3 и H_1 из формулы (3-5-11). На вертикальных стенках (рис. 3-45)

$$\mathbf{J}_{\text{пр } (b)} = \pm \mathbf{e}_2 H \cos(\omega t - k_0 x_3) \quad (3-5-15)$$

и на горизонтальных стенках

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{пр } (a)3} &= \pm \frac{2a}{\lambda_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{2a}\right)^2} H \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \times \\ &\quad \times \sin(\omega t - k_0 x_3); \\ J_{\text{пр } (a)1} &= \pm H \cos\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \cos(\omega t - k_0 x_3). \end{aligned} \right\} \quad (3-5-15a)$$

Картина поверхностных токов и токов смещения дана на рис. 3-47. Из этого рисунка видно, что токи проводимости и токи смещения образуют замкнутые линии полного тока.

Поле волны E в прямоугольном волноводе находится аналогично случаю H -волны: решается скалярное волновое уравнение для \dot{E}_z , аналогичное (3-5-2), а остальные составляющие находятся из уравнений Максвелла (2-1-5). В результате получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m3} &= E \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{E}_{m1} &= -jk_0 \frac{\chi_1}{\chi^2} E \cos\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) e^{-jk_0 x_3}; \\ \dot{E}_{m2} &= -jk_0 \frac{\chi_2}{\chi^2} E \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) e^{-jk_0 x_3}; \\ H_{m1} &= j\omega\epsilon_{a1} \frac{\chi_2}{\chi^2} E \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) e^{-jk_0 x_3}; \\ H_{m2} &= -j\omega\epsilon_{a1} \frac{\chi_1}{\chi^2} E \cos\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) e^{-jk_0 x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (3-5-16)$$

Здесь χ , χ_1 и χ_2 определяются выражениями (3-5-6) и (3-5-6а).

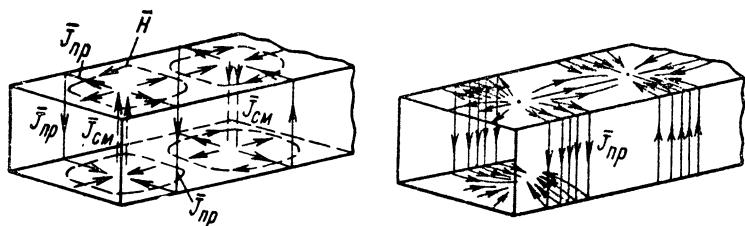


Рис. 3-47. Токи проводимости и токи смещения волны H_{10} .

В уравнениях (3-5-16) ни m , ни n не могут равняться нулю, так как при этом все составляющие поля обращаются в нуль. Поэтому нижшим типом волны E в прямоугольном волноводе является волна E_{11} , которая существует при $m=n=1$; структура ее поля показана на рис. 3-48. На основании второго выражения (3-5-9) критическая длина волн этого типа

$$\lambda_{кр} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3-5-17)$$

Металлический волновод круглого сечения. Скалярное волновое уравнение, аналогичное (3-5-2) в цилиндрических координатах [см. формулу (Д-6-22)] имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \alpha^2} + \chi^2 A_z = 0. \quad (3-5-18)$$

Здесь под A_z подразумевается H_z или E_z , а χ — определяется тем же выражением (3-5-3), как и в случае пря-

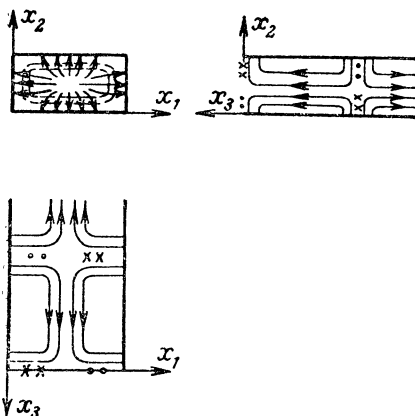


Рис. 3-48. Структура поля волны E_{11} в прямоугольном волноводе.

моугольного волновода. Решение уравнения (3-5-18) представляется в виде произведения тригонометрических функций (Д-6-266) и функций Бесселя (Д-6-28)

$$A_z = A J_n(\chi r)_{\sin}^{\cos} \} (n\alpha) e^{-jk_0 z}. \quad (3-5-18a)$$

В круглом волноводе, как и в прямоугольном, могут распространяться волны H_{nm} и E_{nm} . С помощью уравнений (2-1-5) подобно тому, как это делалось при выводе формул (3-5-7) и (3-5-16), получим, что структура поля волн H_{nm} в круглом волноводе описывается выражениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= H J_n(\chi r)_{\sin}^{\cos} \} (n\alpha) e^{-jk_0 z}; \\ \dot{H}_{mr} &= -j \frac{k_0}{\chi} H J'_n(\chi r)_{\sin}^{\cos} \} (n\alpha) e^{-jk_0 z}; \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -j \frac{nk_0}{\chi^2 r} H J_n(\chi r)_{\sin}^{\cos} \} (n\alpha) e^{-jk_0 z}; \end{aligned} \right\} \quad (3-5-19)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{mr} &= -j \frac{\omega \mu_{a1}}{\chi^2 r} H J_n(\chi r) \begin{Bmatrix} -\sin \\ \cos \end{Bmatrix} (n\alpha) e^{-ik_0 z}; \\ \dot{E}_{m\alpha} &= j \frac{\omega \mu_{a1}}{\chi} H J'_n(\chi r) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\alpha) e^{-jk_0 z}. \end{aligned} \right\} \quad (3-5-19)$$

Здесь $\chi = B_{nm}/a$; a — радиус волновода; B_{nm} (табл. Д-4) — корень уравнения $J'_n(\chi a) = 0$, которое соответствует граничному условию $E_\tau = 0$ при $r = a$, т. е. $E_{\alpha(r=a)} = 0$.

Критическая длина волны определяется выражением

$$\lambda_{kp} = 2\pi a / B_{nm}. \quad (3-5-19a)$$

Аналогично можно найти, что структура поля волны E_{nm} в круглом волноводе описывается выражениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= E J_n(\chi r) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\alpha) e^{-jk_0 z}; \\ \dot{E}_{mr} &= -j \frac{k_0}{\chi} E J'_n(\chi r) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\alpha) e^{-jk_0 z}; \\ \dot{E}_{m\alpha} &= -j \frac{nk_0}{\chi^2 r} E J_n(\chi r) \begin{Bmatrix} -\sin \\ \cos \end{Bmatrix} (n\alpha) e^{-jk_0 z}; \\ \dot{H}_{mr} &= j \frac{n\omega \epsilon_{a1}}{\chi^2 r} E J_n(\chi r) \begin{Bmatrix} -\sin \\ \cos \end{Bmatrix} (n\alpha) e^{-jk_0 z}; \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -j \frac{\omega \epsilon_{a1}}{\chi} E J'_n(\chi r) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\alpha) e^{-jk_0 z}. \end{aligned} \right\} \quad (3-5-20)$$

Здесь $\chi = \frac{A_{nm}}{a}$; A_{nm} — (см. табл. Д-3) корень уравнения $J_n(\chi a) = 0$, которое соответствует граничному условию $E_\tau = 0$ при $r = a$, т. е. $E_\alpha(r=a) = 0$.

Критическая длина волны

$$\lambda_{kp} = 2\pi a / A_{nm}. \quad (3-5-20a)$$

Числа n и m в выражениях (3-5-19) — (3-5-20a) определяют количество вариаций поля соответственно по углу α и радиусу r .

Основными (низшими) типами волн в круглом волноводе являются волны H_{11} и E_{01} , обладающие наибольшей критической длиной волны. Структура поля этих волн показана на рис. 3-49: она подобна соответственно структуре волн H_{10} и E_{11} в прямоугольном волноводе. Благодаря этому при плавном переходе прямоугольного

волновода в круглый распространяющаяся в прямоугольном волноводе волна E_{11} превращается в круглом волноводе в волну E_{01} . Вследствие осевой симметрии волну E_{01} широко применяют в волноводах с вращающимися соединениями.

На практике в круглом волноводе используется и волна H_{01} , структура поля которой аналогична структуре волны E_{01} , если электрические и магнитные силовые линии поменять местами (рис. 3-49). При использовании волны H_{01} потери в стенках волновода с возрастанием частоты уменьшаются (см. рис. 3-52). Это явление обусловлено тем, что тангенциальная составляющая вектора H , определяющая поглощение энергии стенками волновода, у волны этого типа с увеличением частоты уменьшается по сравнению с поперечной составляющей, определяющей передаваемую волноводом мощность.

Следует, однако, отметить, что в круглом волноводе волна H_{01} весьма неустойчива: даже при небольшой эллиптичности сечения она превращается в волну E_{01} , обладающую той же критической частотой, но большими

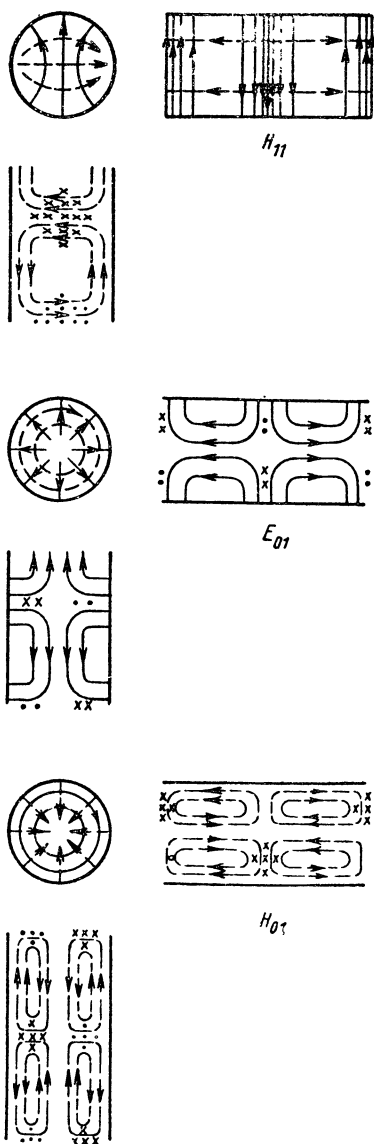


Рис. 3-49. Структура поля волны H_{11} , E_{01} и H_{01} в круглом волноводе.

потерями. Для устойчивого существования волны H_{01} круглый волновод делают из изолированных колец или в виде спирали из изолированного провода (рис. 3-50). В такой конструкции волна E_{01} существовать не может; вместе с тем изолирующие промежутки между витками не мешают существованию волны H_{01} , так как ее электрические силовые линии представляют собой окружности.

Постоянная распространения в металлическом волноводе определяется выражением (3-5-8) при волне любого типа. Поэтому и формулы (3-4-10)—(3-4-14),

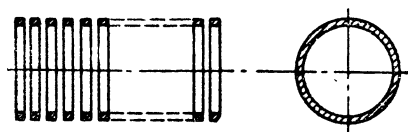


Рис. 3-50. Схема конструкции составленного из колец круглого волновода для волны H_{01} .

определяющие скорости распространения, длину волны в волноводе и волновые сопротивления, действительны при волнах любого вида и типа.

Передаваемая металлическим волноводом мощность

$$P_0 = \int_S H_{ds}^2 Z_{0(H,E)} dS. \quad (3-5-21)$$

Здесь H_{ds} — действующее значение поперечной составляющей магнитного поля волны;

$Z_{0(H,E)}$ — волновое сопротивление для волны данного вида и типа.

Применительно к волне H_{10} в прямоугольном волноводе согласно выражению (3-5-21) с учетом формул (3-5-11) и (3-4-12) получим:

$$P_0 = \frac{E_{д.макс}^2}{Z_{01}} ab \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{2a}\right)^2}}{2}, \quad (3-5-22)$$

где $E_{д.макс}$ — максимальное действующее значение напряженности электрического поля в точке $x_1 = a/2$. Из

этой формулы следует, что средняя плотность потока мощности в волноводе меньше, чем в неограниченной среде, так как $\frac{\sqrt{1 - (\lambda_1/2a)^2}}{2} < 1$.

Наибольшая мощность, которую можно передать по прямоугольному волноводу без электрического пробоя, ограничивается допустимой напряженностью электрического поля $E_{\text{доп}}$ в точках $x_1 = a/2$. На основании выражения (2-6-6) для волновода прямоугольного сечения, заполненного воздухом при нормальном атмосферном давлении, можно написать формулу, определяющую допустимую величину передаваемой мощности при волне H_{10} :

$$P_{0 \text{ доп}} \leq 130 a^2 \frac{\sqrt{1 - (\lambda_1/2a)^2}}{2} [\text{квт}]. \quad (3-5-23)$$

Для увеличения передаваемой мощности волноводы заполняют кондиционированным воздухом при повышенном давлении или другим газом с большей пробивной напряженностью. На рис. 3-51 дан график зависимости допустимых значений мощности от отношения $\lambda_1/\lambda_{\text{кр}}$. Рабочий диапазон волн прямоугольного волновода для волны H_{10} определяется выражением $0,5 \leq \frac{\lambda_1}{2a} \leq 0,9$. Со стороны коротких волн этот диапазон ограничен появлением волн высших типов, со стороны длинных — резким уменьшением мощности. Заметим, что в незаштрихованной на рис. 3-51 области высшие типы волн не возникают, если $b < a/2$.

Потери в металлических волноводах обусловлены только поглощением энергии стенками волновода, так как потерями в заполняющей волновод среде практически можно пренебречь. Потери мощности в стенках волновода на единицу его длины определяются на основании формулы (2-7-27) следующим выражением:

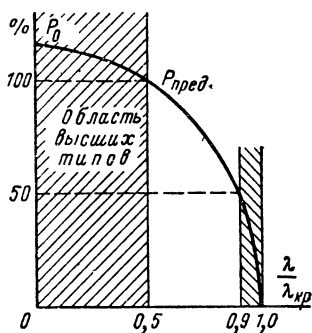


Рис. 3-51. Зависимость максимально допустимой мощности от отношения $\lambda/\lambda_{\text{кр}}$.

$$P_{0 \text{ пог}} = \sqrt{\frac{\mu_{a2} \omega}{2\sigma_2}} \int_L H_{д\tau}^2 dl \text{ [вт/м]}, \quad (3-5-24)$$

где $H_{д\tau}$ — действующее значение тангенциальной составляющей вектора \mathbf{H} на внутренней поверхности стенок волновода;

dl — элемент длины по периметру поперечного сечения волновода;

μ_{a2} и σ_2 — соответственно магнитная проницаемость и удельная проводимость материала стенок.

Считая, что в системе с потерями поле убывает по закону $e^{-\alpha x_3}$, можно написать уравнение

$$P_{0 \text{ пог}} \Delta x_3 = P_0 (1 - e^{-2\alpha \Delta x_3}) \text{ [вт]}, \quad (3-5-25)$$

в котором P_0 — мощность, передаваемая волноводом и определяемая в любой точке x_3 выражением (3-5-21).

Если α мало, то из уравнения (3-5-25) имеем:

$$P_{0 \text{ пог}} \approx 2\alpha P_0 \text{ [вт/м]} \quad (3-5-26)$$

или

$$\alpha \approx \frac{P_{0 \text{ пог}}}{2P_0} = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu_{a2}}{2\sigma_2}} \int_L H_{д\tau}^2 dl}{2 \int_C H_{дs}^2 Z_{0(H,E)} dS} \text{ [м}^{-1}\text{]}. \quad (3-5-27)$$

Из последнего выражения видно, что определяемые постоянной затухания системы α потери тем больше, чем больше напряженность магнитного поля у стенок волновода по сравнению с его напряженностью в пространстве внутри волновода. На рис. 3-52 приведены кривые $\alpha = F(\omega)$ для различных типов волн в металлических волноводах. С увеличением частоты затухание волны H_{01} в круглом волновомоде монотонно убывает, в то время как затухание других типов волн как в круглом, так и прямоугольном волновомоду, переходя через минимум, увеличивается.

На основании выражения (2-7-23) затухание в волновомоду определяется соотношением

$$L = 8,69 \alpha l \text{ [дБ]}. \quad (3-5-28)$$

На основании выражения (3-5-26) к. п. д. волновода длиной l как линии передачи аналогично (3-2-34) можно выразить формулой

$$\eta = \frac{P_0 - P_{0 \text{ пог}} l}{P_0} = 1 - 2\alpha l. \quad (3-5-29)$$

Из рис. 3-52 можно видеть, что к. п. д. волноводных линий уже на сантиметровых волнах значительно меньше единицы на длине всего лишь несколько метров.

Для уменьшения потерь внутреннего поглощения поверхность металлических волноводов делается гладкой и хорошо проводящей.

Волноводы П- и Н-образного сечения (рис. 3-53) при волнах типа Н имеют меньшее значение критической частоты по сравнению с прямоугольными волноводами тех же поперечных размеров, а следовательно, согласно выражению (3-5-10) обладают меньшей дисперсией. Структура электромагнитного поля в волноводах П- и Н-образного сечения

отличается относительно малой продольной составляющей вектора \mathbf{H} и поэтому приближается к структуре поля волны ТЕМ.

Диэлектрический волновод представляет собой стержень или волокно, обычно круглого сечения, из диэлектрика, в котором при соблюдении определенных условий происходит распространение электромагнитных волн. Возможность такого распространения следует из условия полного внутреннего отражения [см. соотношение (3-2-39)], когда волны, распространяющиеся в диэлектрике, падают на границу раздела с другой, менее плотной в электромагнитном смысле, средой под углом

$$\theta > \theta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{1}{n_{1,2}}.$$

Если $\theta > \theta_{\text{кр}}$, то энергия распространяется преимущественно внутри волновода и лишь часть энергии переходит во

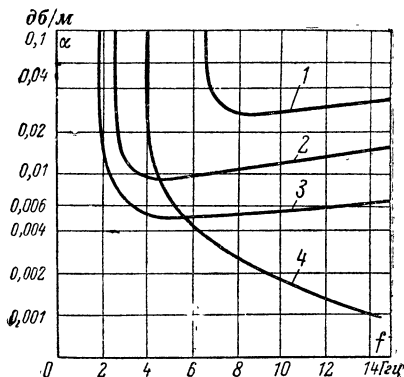


Рис. 3-52. Зависимость погонного затухания от частоты в медных волноводах различного профиля.

1 — прямоугольный волновод размером $a = 5$ см, волна H_{10} ; 2 — круглый волновод радиусом $a = 5$ см, волна E_{01} ; 3 — то же, волна H_{11} ; 4 — то же, волна H_{01} .

внешнюю среду, образуя в ней поле поверхностной волны. Амплитуда поля поверхностной волны убывает по экспоненте в направлении нормали к поверхности волновода, а вектор Пойнтинга Π_0 поверхностной волны направлен параллельно оси волновода. Для диэлектрического волновода существует критическая частота $f_{кр}$, выше которой условие $\theta > \theta_{кр}$ удовлетворяется. При

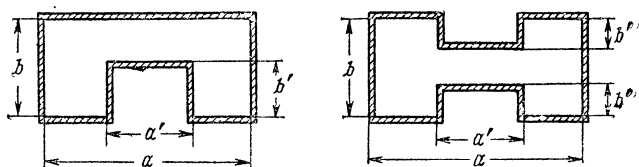


Рис. 3-53. Волноводы П- и Н-образного сечения.

частоте менее критической условие полного внутреннего отражения $\theta > \theta_{кр}$ не выполняется и большая часть энергии переходит во внешнюю среду и излучается.

Следует отметить различие условий распространения в металлическом и диэлектрическом волноводах. При критическом угле, равном нулю, распространение поля в металлическом волноводе прекращается. В диэлектрическом же волноводе при критическом угле, не равном нулю (рис. 3-54), поле распространяется вдоль оси волновода; при этом поток энергии движется не

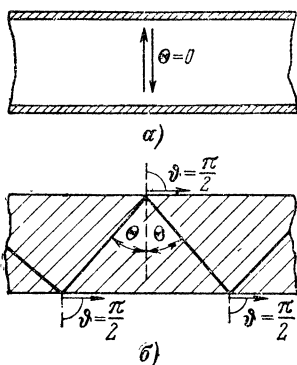


Рис. 3-54. Отражение в металлическом (а) и диэлектрическом волноводе (б) при критическом значении угла падения.

только внутри волновода, но и во внешней среде. Это приводит к тому, что в диэлектрическом волноводе могут распространяться типы волн, у которых $f_{кр} \rightarrow 0$.

Продольные составляющие магнитного и электрического полей внутри и вне диэлектрического волновода определяются с помощью скалярного волнового уравнения (3-5-18), в котором под A_z подразумевается величина $H_{z(1)}$ или $E_{z(1)}$, $H_{z(2)}$ или $E_{z(2)}$, а под χ соответ-

$$\left. \begin{aligned} \chi_{(1)} &= \sqrt{k_{(1)}^2 - k_0^2}; \\ \chi_{(2)} &= \sqrt{k_{(2)}^2 - k_0^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3-5-30)$$

где $k_{(1)} = \omega \sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}}$ и $k_{(2)} = \omega \sqrt{\mu_{a2} \epsilon_{a2}}$. Индексы (1), (2) у величин H_z , E_z , χ и k относятся соответственно к внутреннему и внешнему полям.

Решением уравнения (3-5-18) для продольных составляющих поля внутри диэлектрического волновода являются выражения, аналогичные (3-5-18а),

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz(1)} &= E_{(1)} J_n(\chi_{(1)} r) \frac{\cos}{\sin} \left\{ n \alpha e^{-jk_0 z} \right\}; \\ \dot{H}_{mz(1)} &= H_{(1)} J_n(\chi_{(1)} r) \frac{\cos}{\sin} \left\{ n \alpha e^{-jk_0 z} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3-5-31)$$

которые при $r=0$ дают конечное значение напряженности поля. Другие составляющие находятся из уравнений Максвелла (2-1-5).

Аналогично решением уравнения (3-5-18) для поля вне диэлектрического волновода являются выражения

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz(2)} &= E_{(2)} H_n^{(2)}(\chi_{(2)} r) \frac{\cos}{\sin} \left\{ n \alpha e^{-jk_0 z} \right\}; \\ \dot{H}_{mz(2)} &= H_{(2)} H_n^{(2)}(\chi_{(2)} r) \frac{\cos}{\sin} \left\{ n \alpha e^{-jk_0 z} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3-5-32)$$

которые стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$. Здесь $H_n^{(2)}(\chi_{(2)} r)$ — функции Ханкеля второго рода n -го порядка.

Простейшими типами волн, которые могут распространяться в диэлектрическом круглом волноводе, являются волны типов E_{0m} и H_{0m} , отличающиеся осевой симметрией, т. е. изменений поля по углу α нет.

Структура поля E_{01} внутри волновода определяется следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz(1)} &= E_{(1)} J_0(\chi_{(1)} r) e^{-jk_0 z}; \\ \dot{E}_{mr(1)} &= j \frac{k_0}{\chi_{(1)}} E_{(1)} J_1(\chi_{(1)} r) e^{-jk_0 z}; \\ \dot{H}_{m\varphi(1)} &= j \frac{\omega \epsilon_{a1}}{\chi_{(1)}} E_{(1)} J_1(\chi_{(1)} r) e^{-jk_0 z} \end{aligned} \right\} \quad (3-5-33)$$

и вне волновода

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz(2)} &= E_{(2)} H_0^{(2)}(\chi_{(2)} r) e^{-jk_0 z}; \\ \dot{E}_{mr(2)} &= j \frac{k_0}{\chi_{(2)}} E_{(2)} H_1^{(2)}(\chi_{(2)} r) e^{-jk_0 z}; \\ \dot{H}_{m\alpha(2)} &= j \frac{\omega \varepsilon_a z}{\chi_{(2)}} E_{(2)} H_1^{(2)}(\chi_{(2)} r) e^{-jk_0 z}. \end{aligned} \right\} \quad (3-5-34)$$

Составляющие по α и r получены подстановкой E_z из выражений (3-5-31) и (3-5-32) в уравнения (2-1-5), переписанные для цилиндрической системы координат (Д-3-52). При этом учитываются соотношения (Д-6-35) и (Д-6-36).

Выражения, определяющие структуру поля волны H_{01} в круглом диэлектрическом волноводе, могут быть получены из выражений (3-5-33) и (3-5-34) при взаимной замене \dot{E}_m на \dot{H}_m и ε_a на $-\mu_a$.

Структура поля волн E_{01} и H_{01} внутри диэлектрического круглого волновода сходна со структурой этих волн в металлическом волноводе, в чем можно убедиться сравнением выражений (3-5-33) и (3-5-20).

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих магнитного и электрического полей ($\dot{E}_{z(2)} = \dot{E}_{z(1)}$ и $\dot{H}_{\alpha(2)} = \dot{H}_{\alpha(1)}$) на поверхности волновода, т. е. при $r=a$ из выражений (3-5-33) и (3-5-34) имеем:

$$\frac{J_0(\chi_{(1)} a)}{J_1(\chi_{(1)} a)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\chi_{(2)}}{\chi_{(1)}} \cdot \frac{H_0^{(2)}(\chi_{(2)} a)}{H_1^{(2)}(\chi_{(2)} a)}. \quad (3-5-35)$$

Чтобы энергия концентрировалась главным образом внутри волновода, поле во внешней среде [см. выражения (3-5-34)] должно определяться экспоненциальным множителем, т. е. согласно (Д-6-33а) аргумент функции $H_1^{(2)}(\chi_{(2)} r)$ должен быть мнимой величиной. Это возможно, если $\chi_{(2)}^2 < 0$ или согласно выражениям (3-5-30) $|k_0| > |k_{(2)}|$. При этом условии во внешней среде около поверхности диэлектрического волновода будет распространяться поверхностная волна. Критическое условие распространения такого поля

$$\chi_{(2)} = 0. \quad (3-5-36)$$

Учитывая выражения (3-5-30), находим, что при критическом условии

$$k_0 = k_{(2)} = \omega_{\text{кр}} \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}}. \quad (3-5-37)$$

Из выражения (3-5-35) при условии (3-5-36) имеем уравнение:

$$J_0(\chi_{(1)} a) = 0,$$

корни которого (см. табл. Д-3): $\chi_{(1)} a = A_{0m}$. Вместе с тем, согласно выражениям (3-5-30) и (3-5-37)

$$\chi_{(1)} = \sqrt{k_{(1)}^2 - k_0^2} = \omega_{\text{кр}} \sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1} - \mu_{a2} \varepsilon_{a2}}. \quad (3-5-38)$$

Отсюда следует, что

$$f_{\text{кр}} = \frac{\chi_{(1)}}{2\pi \sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1} - \mu_{a2} \varepsilon_{a2}}} = \frac{A_{0m}}{2\pi a \sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1} - \mu_{a2} \varepsilon_{a2}}}, \quad (3-5-39)$$

а если внешняя среда — вакуум, то

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi a}{A_{0m}} \sqrt{1 - \frac{1}{\mu_1 \varepsilon_1}}. \quad (3-5-39a)$$

Сравнивая выражения (3-5-39a) и (3-5-20a), видим, что критическая волна E_{0m} , а также и H_{0m} в круглом диэлектрическом волноводе меньше, чем в металлическом.

Из характера зависимости функций $J_n(\chi_{(1)} r)$ и $H_n^{(2)}(\chi_{(2)} r)$, входящих в уравнения (3-5-31) — (3-5-35), от частоты следует, что при увеличении частоты внутреннее поле концентрируется в области оси волновода, а внешнее поле быстрее убывает. При уменьшении частоты напряженность внешнего поля возрастает, а внутреннего уменьшается.

В диэлектрическом волноводе могут распространяться волны E и H , неоднородные по углу α . Такие волны существуют совместно; основная волна представляет комбинацию этих волн и обозначается EH_{11} или HE_{11} в зависимости от преобладания поперечной составляющей E или H . Этот тип волны распространяется при любых частотах, т. е. для него $f_{\text{кр}} = 0$.

На использовании волны EH_{11} основано устройство диэлектрической антенны (рис. 2-23, в).

При $f = f_{\text{кр}}$ фазовая скорость в диэлектрическом волноводе $v_{\text{ф}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}}}$, т. е. равна скорости в неограничен-

ной среде с такими же параметрами, как у внешней среды. В случае $f \gg f_{кр}$ фазовая скорость

$$v_{\phi} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}}},$$

т. е. равна скорости в неограниченной среде с параметрами материала, из которого выполнен диэлектрический волновод. На рис. 3-55 приведены кривые зависимости v_{ϕ}/c от a/λ для волн H_{01} , H_{02} и HE_{11} при ряде значений ϵ_1 .

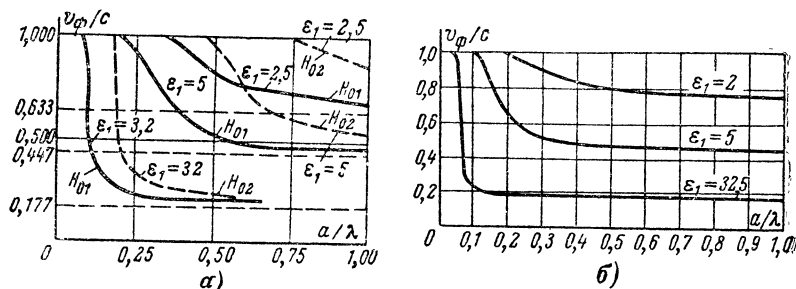


Рис. 3-55. Фазовая скорость в диэлектрическом волноводе при волнах H_{01} и H_{02} (а) и при волне HE_{11} (б) при различных ϵ_1 .

В связи с тем что существует поле вне диэлектрического волновода, передаваемая им мощность в отличие от металлического волновода [см. выражение (3-5-21)] состоит из потока мощности $P_{0(1)}$ в пределах поперечного сечения волновода и потока мощности $P_{0(2)}$ во внешней среде. На основе выражений (2-2-3) и (2-2-11) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} P_{0(1)} &= \pi \int_0^a \operatorname{Re} (\dot{E}_{r(1)} \dot{H}_{\alpha(1)}^* - \dot{E}_{\alpha(1)} \dot{H}_{r(1)}^*) r dr; \\ P_{0(2)} &= \pi \int_0^{\infty} \operatorname{Re} (\dot{E}_{r(2)} \dot{H}_{\alpha(2)}^* - \dot{E}_{\alpha(2)} \dot{H}_{r(2)}^*) r dr. \end{aligned} \right\} \quad (3-5-40)$$

Соответствующие составляющие напряженностей поля внутри и вне волновода подставляются в эти формулы из выражений (3-5-33) и (3-5-34). Заметим, что при $f \gg f_{кр}$ поле концентрируется внутри волновода, т. е. $P_{0(1)} \gg P_{0(2)}$. В случае волны типа HE_{11} отношение $P_{0(1)}/P_{0(2)}$ также резко увеличивается с ростом частоты.

Затухание в диэлектрическом волноводе определяется в основном потерями в диэлектрике. Кроме того, в таком волноводе имеют место дополнительные потери, обусловленные неоднородностями его структуры (крутые изгибы, непостоянство поперечного сечения и т. п., подробнее см. § 3-7) и наличием поглощающих электромагнитную энергию предметов, находящихся вблизи волновода (в его внешнем поле). Затухание, вызываемое проводимостью диэлектрика, по аналогии с выражением (3-5-27) может быть вычислено по формуле

$$\alpha = \frac{\sigma_i \int_0^{2\pi} \int_0^a (E_{r(1)}^2 + E_{a(1)}^2) r dr d\alpha}{2 [P_{0(1)} + P_{0(2)}]}.$$

На рис. 3-56 приведен график затухания для диэлектрического волновода из полиэтилена. Сравнивая его с рис. 3-52, можно увидеть, что потери в диэлектрическом волноводе даже из весьма совершенного диэлектрика значительно больше, чем в металлических волноводах при тех же частотах.

Несмотря на большие потери в диэлектрических волноводах, в настоящее время их применяют в диапазоне световых волн. Такие волноводы часто называют световодами.

Пучок светопроводящих нитей используют для увеличения светособирающей способности, которая у оптической линзы определяется углом $\psi_{\pi} \leq 2 \operatorname{ctg}^{-1}(2F)$ (рис. 3-57, а) и ограничивается при максимально возможной светосиле $F \leq 2 \div 1$ величиной $\psi_{\pi} \leq 20^\circ$.

Светособирающая способность диэлектрического световода (рис. 3-57, б), состоящего из диэлектрической нити с проницаемостью ϵ_1 , покрытой слоем диэлектрика с ϵ_3 , определяется выражением

$$\psi_{\text{в}} \leq 2 \arcsin \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_3}, \quad (3-5-41)$$

которое получается из соотношений $\sin \theta_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}}$, $\sin \theta =$

$$= \frac{\sin \frac{\psi_{\text{в}}}{2}}{\sqrt{\epsilon_1}}. \quad \text{Так как разность } \epsilon_1 - \epsilon_3 \text{ можно прибли-$$

зить к единице, то с помощью подобной «нитяной оптики» можно получить $\psi_{\text{в}} \rightarrow 180^\circ$. На практике световоды состоят из пучка нитей диаметром 10—50 мкм. Плот-

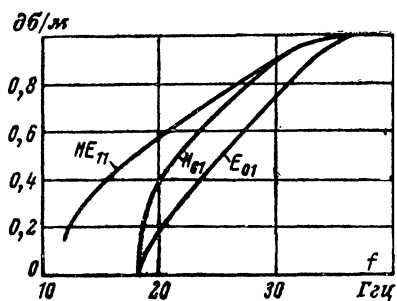


Рис. 3-56. Затухание в диэлектрическом волноводе радиусом 0,5 см при волнах HE_{11} , H_{01} , E_{01} ($\epsilon_1=2,5$, $\operatorname{tg} \delta_0=2 \cdot 10^{-4}$).

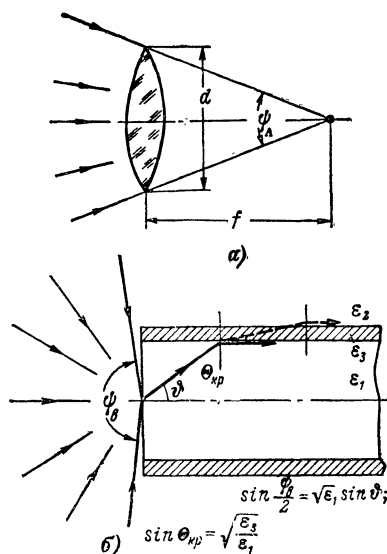


Рис. 3-57. К расчету угла одновременного обзора линзы (а) и световода (б).
 $\epsilon_1 > \epsilon_3 > \epsilon_2 = 1$

ность нитей в пучке может достигать величины 10^6 нитей/см². Каждая нить покрывается диэлектрическим слоем с проницаемостью $\epsilon_3 < \epsilon_1$ толщиной около 0,5 мкм, от которого происходит полное внутреннее отражение электромагнитной энергии, распространяющейся в диэлектрической сердцевине с проницаемостью ϵ_1 . Этот слой служит также защитой от загрязнения и механических повреждений поверхности основной нити.

Вследствие большого затухания оптических волн в современных материалах максимальная длина световодов не превышает 1—2 м.

Световод из «конических» нитей можно использовать для увеличения или уменьшения изображения. При этом изменяются разрешающая способность и яркость изображения.

Однопроводная линия состоит из тонкого медного провода, поле около которого может возбуждаться по схеме, приведенной на рис. 3-43, в. В такой системе возникает волна Е, имеющая составляющие E_z , E_r и H_α .

Структуру поля этой волны можно определить, решая скалярное волновое уравнение (3-5-18) для продольной составляющей электрического поля E_z . Составляющие E_r и H_α находят из уравнений (2-1-5). В результате получаются выражения, аналогичные (3-5-33) и (3-5-34), в которых вещественная проницаемость ϵ_{a1} заменена на мнимую, т. е. $\tilde{\epsilon}_{a1} = -j \frac{\sigma_1}{\omega}$, поскольку вместо диэлектрического стержня или волокна в данном случае имеется проводник. Не будем заниматься детальным изучением этих уравнений, а ограничимся графиками на рис. 3-58, иллюстрирующими зависимость от частоты затухания и размеров области распространения поля, т. е. радиуса коаксиального цилиндра, внутри которого сосредоточено более 90% энергии, движущейся около одиночного провода.

Для уменьшения затухания и области распространения поля медный провод покрывают тонким диэлектрическим слоем. Из рис. 3-58 видно, что такой слой резко уменьшает область распространения поля, причем величина затухания может быть даже меньше, чем у металлических волноводов.

Недостатком однопроводной линии являются большие потери на ее изгибах и в поддерживающих изоляторах.

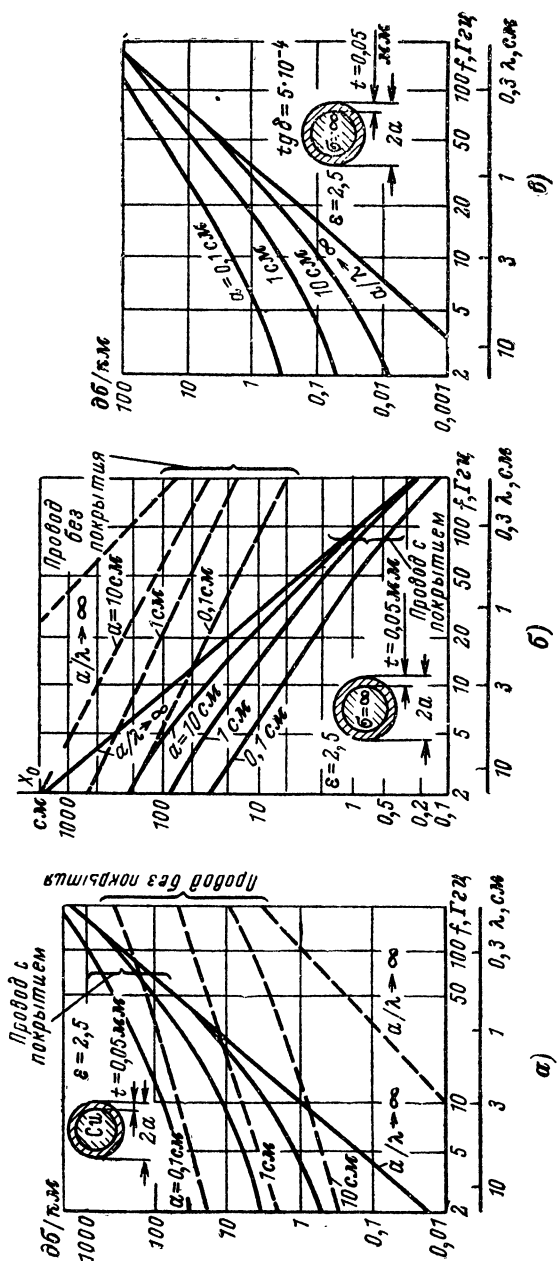


Рис. 3-58. Характеристики однопроводных линий.
 α — затухание от потерь в меди; б — область распространения поля около провода; в — затухание из-за потерь в диэлектрическом покрытии.

Выражения (3-5-7), (3-5-16), (3-5-19), (3-5-20) и другие, подобные им, описывающие структуру электромагнитного поля в волноводе, называются собственными функциями волноводов. Они удовлетворяют условию ортогональности [см. выражения (Д-6-74)], т. е. при $i \neq k$

$$\left. \begin{aligned} \int_S \mathbf{E}_i \mathbf{E}_k dS &= 0; \\ \int_S \mathbf{H}_i \mathbf{H}_k dS &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-5-42)$$

Здесь S — поперечное сечение волновода;

\mathbf{E}_i , \mathbf{H}_i и \mathbf{E}_k , \mathbf{H}_k — ортогональные составляющие соответственно i -го и k -го типов волн.

3.6. ОБЪЕМНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ

Электромагнитной системой называется совокупность диэлектрических и проводниковых тел, в которой может существовать электромагнитное поле.

Электрическим резонатором называется электромагнитная система, в которой при прерывном (скачкообразном) изменении какого-либо ее параметра или значения стороннего поля возникают колебания с собственной частотой. При этом происходит периодический обмен энергией магнитного и электрического полей внутри системы, в процессе которого энергия постепенно расходуется системой, если она обладает потерями.

Собственная частота системы определяется ее параметрами, а амплитуда собственных колебаний убывает по экспоненциальному закону (затухающие колебания).

Электрические резонаторы используются для выделения желаемой частоты в электрических генераторах, усилителях и фильтрах, а также при измерении электромагнитных параметров, длин волн и других измерениях.

Электрическим резонансом называется возникающее при вынужденных колебаниях в электромагнитной системе явление, при котором обмен энергией между системой и источником вынужденных колебаний отсутствует, а поле в системе достигает максимальных значений. При этом расходуемая системой энергия восстанавливается источником, вследствие чего

амплитуда вынужденных колебаний остается неизменной (незатухающие колебания).

Частота вынужденных колебаний, при которой возникает резонанс, называется резонансной. Ее значение определяется параметрами системы; в системе без потерь резонансная частота равна собственной.

Колебательной электромагнитной системой может быть область, ограниченная металлической поверхностью либо поверхностью, соприкасающейся со средой, менее плотной в электромагнитном смысле (§ 3-2). В связи с этим возможны два вида объемных резонаторов: полый металлический и диэлектрический. Последний используется, в частности, в квантовых генераторах оптического диапазона.

Резонансная частота и соответствующая ей резонансная длина волны объемного резонатора

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \frac{R_i}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = v R_i; \\ \lambda_r &= \frac{2\pi}{R_i}. \end{aligned} \right\} \quad (3-6-1)$$

Здесь $R_i (м^{-1})$ — множитель, определяемый геометрической формой объемного резонатора и типом колебаний в нем;

μ_a и ϵ_a — параметры заполняющей объемный резонатор среды.

Объемный резонатор обладает весьма малыми потерями; поэтому его резонансная частота (резонансная длина волны) практически равна собственной частоте (собственной длине волны).

В седьмой и восьмой главах, посвященных теории линейных цепей, мы рассмотрим электрические резонаторы другого, «необъемного» типа, состоящие из отрезков линий с распределенными постоянными либо из сосредоточенных индуктивностей и емкостей.

Полый металлический прямоугольный резонатор состоит из отрезка прямоугольного волновода с металлическими стенками на концах. Выражения, описывающие поле в таком резонаторе, могут быть найдены из решения уравнений (2-1-10) и (2-1-5), записанных в декартовых координатах, при условии, что на внутренней поверхности всех стенок $E_\tau = 0$ и $H_\tau = -J_{\text{пов.}}$.

Пользуясь обозначениями, аналогичными (3-5-6) и (3-5-4а), имеем

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \frac{m\pi}{a}, \quad \chi_2 = \frac{n\pi}{b}, \quad \chi_3 = \frac{p\pi}{l}, \\ \chi^2 &= \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a, \end{aligned} \right\} \quad (3-6-1a)$$

где m, n, p — целые числа, соответствующие полуволновым вариациям поля вдоль соответствующих ребер a, b и l . Аналогично (3-5-7) получим следующие выражения, описывающие поле H_{mnp} в прямоугольном резонаторе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{m3} &= H \cos(\chi_1 x_1) \cos(\chi_2 x_2) \sin(\chi_3 x_3); \\ \dot{H}_{m1} &= -\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi^2} H \sin(\chi_1 x_1) \cos(\chi_2 x_2) \cos(\chi_3 x_3); \\ \dot{H}_{m2} &= -\frac{\chi_2 \chi_3}{\chi^2} H \cos(\chi_1 x_1) \sin(\chi_2 x_2) \cos(\chi_3 x_3); \\ \dot{E}_{m1} &= j \frac{\chi_2 \omega_r \mu_a}{\chi^2} H \cos(\chi_1 x_1) \sin(\chi_2 x_2) \sin(\chi_3 x_3); \\ \dot{E}_{m2} &= -j \frac{\chi_1 \omega_r \mu_a}{\chi^2} H \sin(\chi_1 x_1) \cos(\chi_2 x_2) \sin(\chi_3 x_3). \end{aligned} \right\} \quad (3-6-2)$$

Здесь $m=0, 1, 2, 3 \dots$; $n=0, 1, 2, 3 \dots$; $p=1, 2, 3 \dots$; причем m и n одновременно не могут равняться нулю. Для поля E_{mnp} аналогично выражениям (3-5-16) получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m3} &= E \sin(\chi_1 x_1) \sin(\chi_2 x_2) \cos(\chi_3 x_3); \\ \dot{E}_{m1} &= -\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi^2} E \cos(\chi_1 x_1) \sin(\chi_2 x_2) \sin(\chi_3 x_3); \\ \dot{E}_{m2} &= -\frac{\chi_2 \chi_3}{\chi^2} E \sin(\chi_1 x_1) \cos(\chi_2 x_2) \sin(\chi_3 x_3); \\ \dot{H}_{m1} &= j \frac{\chi_2 \omega_r \varepsilon_a}{\chi^2} E \sin(\chi_1 x_1) \cos(\chi_2 x_2) \cos(\chi_3 x_3); \\ \dot{H}_{m2} &= -j \frac{\chi_1 \omega_r \varepsilon_a}{\chi^2} E \cos(\chi_1 x_1) \sin(\chi_2 x_2) \cos(\chi_3 x_3). \end{aligned} \right\} \quad (3-6-2a)$$

Здесь $m=1, 2, 3 \dots$; $n=1, 2, 3 \dots$; $p=0, 1, 2, 3 \dots$

Из выражений (3-6-2) и (3-6-2а) следует, что фазы полей в пространстве не изменяются. Поле такого вида представляет стоячую волну. На стенках резонатора касательные составляющие электрического и нормальные составляющие магнитного полей равны нулю, а нормальные составляющие электрического и касательные состав-

ляющие магнитного поля достигают максимума. Этим и объясняется, что величины χ_1 , χ_2 и χ_3 могут принимать лишь значения, определяемые выражениями (3-6-1a); следовательно, и величина χ может иметь только определенные образующие бесконечный ряд значения, называемые собственными волновыми числами резонатора. Соответствующие им напряженности полей \mathbf{E} и \mathbf{H} называются собственными функциями резонаторов; они обладают свойством ортогональности [см. формулы (Д-6-74)], т. е.

$$\left. \begin{aligned} \int_V \mathbf{E}_i \mathbf{E}_k dV &= 0 \\ \int_V \mathbf{H}_i \mathbf{H}_k dV &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } i \neq k. \quad (3-6-3)$$

Здесь интегрирование производится по внутреннему объему резонатора, поля \mathbf{E}_i , \mathbf{H}_i и \mathbf{E}_k , \mathbf{H}_k соответствуют i -му и k -му типам колебаний. Выражения (3-6-3) используются при определении амплитуды возбужденного поля в резонаторе.

Выражения (3-6-2) и (3-6-2a) можно получить, если поле в резонаторе рассматривать как сумму двух волн, бегущих в противоположных направлениях. Складывая соответствующие компоненты этих двух волн, описываемых формулами (3-5-7) или (3-5-16), и удовлетворяя граничным условиям при $x_3=0$ и $x_3=l$, получим выражения (3-6-2) или (3-6-2a).

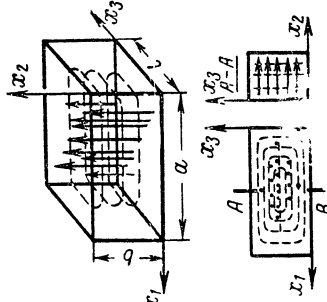
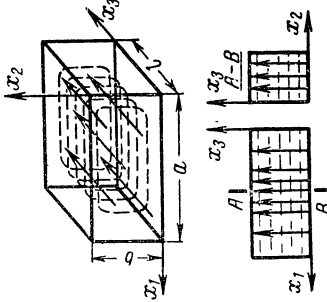
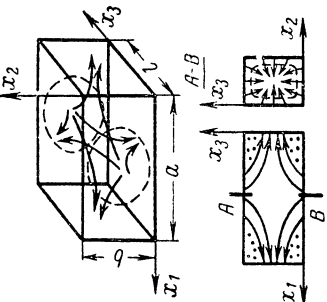
Учитывая, что m , n , p — целые числа, из выражений (3-6-1a) находим, что резонансные частоты и соответствующие им резонансные длины волн образуют бесконечный дискретный спектр

$$\omega_r = \frac{2\pi}{\lambda_r \sqrt{\mu_a \epsilon_a}}; \quad (3-6-4)$$

$$\lambda_r = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (3-6-5)$$

Таким образом, резонансные длины волн зависят от геометрических размеров резонатора и типа колебания, характеризуемого целыми числами m , n , p . Наименьшая длина волны имеет место при комбинациях $mnp=011$, 101 или 110 ; значение, равное нулю, соответствует наименьшему ребру прямоугольного резонатора.

Структура полей в полом прямоугольном резонаторе

Тип поля	H_{101}	E_{110}	E_{111}
Структура поля — линии E --- линии H			
Резонансная длина волны	$\lambda_r = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}}}$	$\lambda_r = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$	$\lambda_r = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2}}}$

Структуру полей в прямоугольном полом резонаторе для колебаний нескольких типов иллюстрирует табл. 3-2.

Полый металлический круглый цилиндрический резонатор. Поле в таком резонаторе образуется волнами, бегущими в противоположном направлении и описываемых выражениями (3-5-19) или (3-5-20). Составляющие поля H_{nmp}

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= H J_n(\chi r)_{\sin}^{\cos} \} (n \alpha) \sin(\chi_z z); \\ \dot{H}_{mr} &= \frac{\chi_z}{\chi} H J'_n(\chi r)_{\sin}^{\cos} \} (n \alpha) \cos(\chi_z z); \\ \dot{H}_{m\alpha} &= \frac{n \chi_z}{\chi^2 r} H J_n(\chi r)_{\cos}^{-\sin} \} (n \alpha) \cos(\chi_z z); \\ \dot{E}_{mr} &= -j \frac{n \omega_r \mu_a}{\chi^2 r} H J_n(\chi r)_{\cos}^{-\sin} \} (n \alpha) \sin(\chi_z z); \\ \dot{E}_{m\alpha} &= j \frac{\omega_r \mu_a}{\chi} H J'_n(\chi r)_{\sin}^{\cos} \} (n \alpha) \sin(\chi_z z). \end{aligned} \right\} \quad (3-6-6)$$

Здесь $p = 1, 2, 3, \dots$;

$$\chi = \frac{B_{nm}}{a}, \quad \chi_z = p \frac{\pi}{l}.$$

Составляющие поля E_{nmp}

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= E J_n(\chi r)_{\sin}^{\cos} \} (n \alpha) \cos(\chi_z z); \\ \dot{E}_{mr} &= -\frac{\chi_z}{\chi} E J'_n(\chi r)_{\sin}^{\cos} \} (n \alpha) \sin(\chi_z z); \\ \dot{E}_{m\alpha} &= -\frac{n \chi_z}{\chi^2 r} E J_n(\chi r)_{\cos}^{-\sin} \} (n \alpha) \sin(\chi_z z); \\ \dot{H}_{mr} &= j \frac{n \omega_r \epsilon_a}{\chi^2 r} E J_n(\chi r)_{\cos}^{-\sin} \} (n \alpha) \cos(\chi_z z); \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -j \frac{\omega_r \epsilon_a}{\chi} E J'_n(\chi r)_{\sin}^{\cos} \} (n \alpha) \cos \chi_z z, \end{aligned} \right\} \quad (3-6-7)$$

Здесь $p = 0, 1, 2, \dots$;

$$\chi = \frac{A_{nm}}{a}, \quad \chi_z = p \frac{\pi}{l}.$$

Выражения (3-6-6) и (3-6-7), являющиеся собственными функциями круглых цилиндрических резонаторов, обладают также свойством ортогональности [см. формулы (3-6-3)].

Из выражений (3-6-6) и (3-6-7) видно, что электромагнитное поле как для Н-, так и для Е-колебаний представляет собой систему стоячих волн с узлами E_r , E_α и H_z на основаниях цилиндра и узлами E_z , E_α и H_r на боковой поверхности.

Резонансные частоты и длины волн цилиндрического резонатора для поля H_{nmp}

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \frac{2\pi}{\lambda_r} \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}; \\ \lambda_r &= \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3-6-8)$$

и для поля E_{nmp}

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \frac{2\pi}{\lambda_r} \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}; \\ \lambda_r &= \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3-6-9)$$

В этих выражениях B_{nm} — корень уравнения $J'_n(\chi a) = 0$ (см. табл. Д-4), соответствующего граничному условию $E_r = 0$, а A_{nm} , (см. табл. Д-3), корень уравнения $J_n(\chi a) = 0$, также соответствующего граничному условию $E_r = 0$.

Из выражений (3-6-8) и (3-6-9) видно, что в случае цилиндрического резонатора, как и для прямоугольного, резонансные длины волн зависят от геометрических размеров и типа колебания, характеризуемого целыми числами: $n=0, 1, 2, \dots$; $m=1, 2, 3, \dots$; $p=0, 1, 2, \dots$, причем n — число волновых вариаций поля по углу α ; m и p определяют число полуволновых вариаций поля соответственно по радиусу r и оси z ; наибольшая длина волны для колебаний Н соответствует типу H_{111} , для колебаний Е — типу E_{010} . На рис. 3-59 показана структура полей в цилиндрическом полом резонаторе для этих типов колебаний.

Полый металлический сферический резонатор. Структура поля в таком резонаторе определяется выражения-

ми (1-7-24) или (1-7-25) при условии, если выполняются граничные условия (3-3-11) на поверхности сферы ($r=a$). В этом случае функция φ является решением неволнового уравнения (Д-6-39а) и с учетом конечного

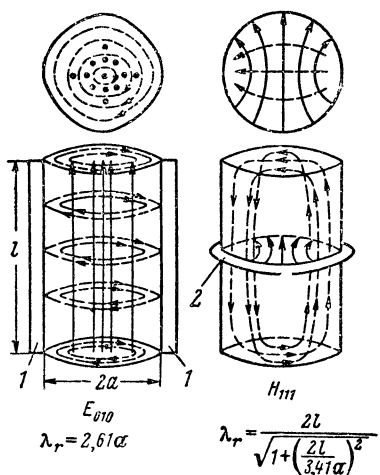


Рис. 3-59. Полый цилиндрический круглый резонатор.

Пунктиром показаны магнитные силовые линии, сплошными линиями — электрические; 1 — продольный фланец; 2 — поперечный фланец.

значения поля в центре сферы согласно (Д-6-55) имеет вид:

$$\varphi = \sqrt{kr} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n^m(\cos \vartheta)_{\sin}^{\cos} m \alpha,$$

или с учетом (Д-6-62а)

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} kr j_n(kr) P_n^m(\cos \vartheta)_{\sin}^{\cos} m \alpha. \quad (3-6-10)$$

Подставляя последнее выражение в формулы (1-7-25), получим определяющие поле H_{npm} собственные функции сферического резонатора

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{H}_{mr} &= \frac{n(n+1)}{r^2} C k r j_n(kr) P_n^m(\cos \vartheta)_{\sin}^{\cos} m\alpha; \\
 \dot{H}_{m\vartheta} &= \frac{1}{r} C \frac{\partial}{\partial r} [k r j_n(kr)] \frac{\partial}{\partial \vartheta} [P_n^m(\cos \vartheta)]_{\sin}^{\cos} m\alpha; \\
 \dot{H}_{m\alpha} &= \frac{m}{r \sin \vartheta} C \frac{\partial}{\partial r} [k r j_n(kr)] P_n^m(\cos \vartheta)_{\cos}^{-\sin} m\alpha; \\
 \dot{E}_{m\vartheta} &= -j \frac{\omega_r \mu_a m}{r \sin \vartheta} C k r j_n(kr) P_n^m(\cos \vartheta)_{\cos}^{-\sin} m\alpha; \\
 \dot{E}_{m\alpha} &= j \frac{\omega_r \mu_a}{r} C k r j_n(kr) \frac{\partial}{\partial \vartheta} [P_n^m(\cos \vartheta)]_{\sin}^{\cos} m\alpha.
 \end{aligned} \right\} (3-6-11)$$

Здесь постоянная C имеет размерность $[a \cdot m]$, а k — определяется соотношением

$$k = \frac{a_{np}}{a},$$

в котором a_{np} — корень уравнения

$$j_n(kr) \big|_{r=a} = 0,$$

получаемого из условия $E_r = 0$ при $r=a$.

Собственные функции полого сферического резонатора, определяющие поле $E_{n p m}$, могут быть получены из выражений (3-6-11) при замене $\dot{H}_m \rightarrow \dot{E}_m$ и $-\mu_a \rightarrow \varepsilon_a$. В этом случае $k = b_{np}/a$, где b_{np} — корень уравнения

$$j'_n(kr) \big|_{r=a} = 0,$$

получаемого также из условия $E_\tau = 0$ при $r=a$.

Для сферического резонатора числа n , m и p , от которых зависит структура поля, могут принимать следующие значения: $n=1, 2, 3, \dots$, $m=0, 1, 2, \dots$, $p=1, 2, 3, \dots$, причем всегда $m < n$. Резонансная длина волны для колебаний Н

$$\lambda_r = \frac{2\pi a}{a_{np}} \quad (3-6-12)$$

и для колебаний Е

$$\lambda_r = \frac{2\pi a}{b_{np}}. \quad (3-6-13)$$

Основными колебаниями в сферическом резонаторе являются колебания E_{110} и H_{110} . Резонансная длина волны типа H_{110} определяется из формулы (3-6-12). При этом $a_{11} = 4,51$ и $\lambda_r = 1,4 a$. Для колебаний E_{110} $b_{11} = 2,75$

и согласно формуле (3-6-13) $\lambda_r = 2,29 a$. Структура электромагнитных полей этих типов показана на рис. 3-60. Фланцы, соединяющие половины сферы, в обоих случаях располагаются так, чтобы линия разъема не прерывала линий тока, текущего по внутренней поверхности сферы.

Потери в резонаторе обусловлены потерями в его

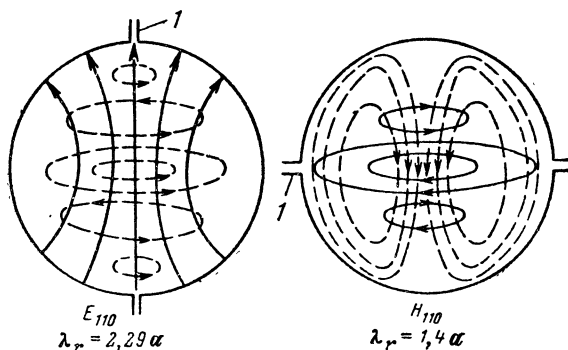


Рис. 3-60. Структура поля в полем сферическом резонаторе.

1 — фланец.

стенках, потерями в заполняющей его объем среде, а также излучением через отверстия в стенках. Потери в стенках резонатора аналогично потерям в стенках волноводов [см. формулу (3-5-24)] определяются выражением

$$P_{0c} = \sqrt{\frac{\omega \mu_{ac}}{2\sigma_c}} \int_S H_{д\tau}^2 dS; \quad (3-6-14)$$

интегрирование здесь ведется по всей внутренней поверхности резонатора. В этой формуле $H_{д\tau}$ — действующее значение тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности резонатора, вычисленной в предположении отсутствия потерь, μ_{ac} и σ_c — магнитная проницаемость и удельная проводимость материала стенок.

Потери, обусловленные проводимостью заполняющей резонатор диэлектрической среды, на основании (2-2-5) и (2-2-8б) определяются выражением

$$P_{0д} = \int_V \sigma E_d^2 dV, \quad (3-6-15)$$

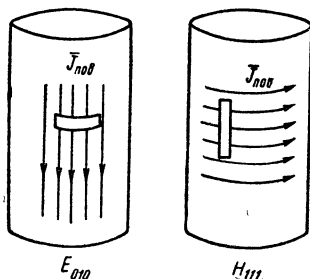
где E_d — действующее значение напряженности электрического поля в резонаторе;

σ — удельная проводимость среды.

Если в стенках резонатора имеются отверстия, то через них происходят потери электромагнитной энергии.

Рис. 3-61. Излучающее отверстие на поверхности полого резонатора.

Стрелки изображают линии тока на внутренней поверхности.



Она может излучаться в свободное пространство либо в связанный с резонатором волновод или другой резонатор. Согласно выражению (2-2-11) излучаемая мощность

$$P_{0из} = \frac{1}{2} \int_{S_0} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^*] dS; \quad (3-6-16)$$

здесь интегрирование производится по поверхности отверстия (рис. 3-61).

Общая мощность потерь в резонаторе

$$P_0 = P_{0с} + P_{0д} + P_{0из}. \quad (3-6-17)$$

Потери энергии в резонаторе обычно характеризуют безразмерной величиной Q , называемой добротностью:

$$Q = 2\pi \frac{W_r}{P_0 T} = \frac{\omega_r W_r}{P_0}, \quad (3-6-18)$$

где

$$W_r = \int_V \frac{\epsilon_a E_m^2}{2} dV = \int_V \frac{\mu_a H_m^2}{2} dV$$

— энергия, запасаемая системой при резонансе;

$P_0 T$ — энергия, расходуемая системой за время одного периода;

V — объем системы, в котором сосредоточено электромагнитное поле.

На основании формулы (2-7-11a) запасенная резонатором энергия, т. е. энергия его электромагнитного поля

$$W_r = \epsilon_a \int_V E_d^2 dV = \mu_a \int_V H_d^2 dV, \quad (3-6-19)$$

где μ_a и ϵ_a — магнитная и электрическая проницаемости заполняющей резонатор среды;

E_d и H_d — действующие значения напряженностей поля.

На основании выражений (3-6-17) и (3-6-18) можно написать:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_{из}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{из}}. \quad (3-6-18a)$$

Здесь

$$Q_c = \frac{\omega_r W_r}{P_{0c}}$$

— добротность резонатора при наличии потерь только в стенках;

$$Q_d = \frac{\omega_r W_r}{P_{0d}} \quad (3-6-18б)$$

— добротность резонатора, обусловленная потерями только в заполняющей резонатор среде;

$$Q_{из} = \frac{\omega_r W_r}{P_{0из}} \quad (3-6-18в)$$

— добротность резонатора при наличии потерь только за счет излучения.

Добротности Q_c , Q_d и $Q_{из}$ называются частичными. Добротность, определяемая потерями в стенках и в среде, называется собственной добротностью Q_0

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d}.$$

Добротность $Q_{из}$, определяемая излучением, называется внешней. Общая добротность Q называется нагруженной.

Добротность, определяемая потерями в стенках резонатора, на основании формул (3-6-14), (3-6-18a)

и (3-6-19) при $\omega = \omega_r$ и $\mu_{ac} = \mu_0$ определяется выражением

$$Q_c = \frac{\omega_r \mu_0 \int_V H_d^2 dV}{\sqrt{\frac{\omega_r \mu_0}{2\sigma} \int_S H_{d\tau}^2 dS}} = \frac{2 \int_V H_d^2 dV}{\Delta \int_S H_{d\tau}^2 dS}. \quad (3-6-20)$$

Здесь Δ — эквивалентная глубина проникновения поля в стенки резонатора, определяемая формулой (2-7-25).

Выражение для Q_c можно также написать в виде

$$Q_c = q \frac{V}{\Delta S}. \quad (3-6-20a)$$

Здесь V — объем резонатора;

S — площадь внутренней поверхности резонатора;

q — коэффициент, зависящий от геометрической формы резонатора и типа колебаний.

Так, например, у круглого цилиндрического резонатора длиной $l = 2a$ при поле типа H_{011} $q \approx 3,3$, а у сферического — в случае поля типа E_{110} $q \approx 2,2$. При сверхвысоких частотах величина Δ имеет порядок тысячных долей миллиметра, вследствие чего порядок величины добротности Q_c полых резонаторов определяется несколькими десятками тысяч.

Для приближенной оценки добротности Q_c можно пользоваться формулой

$$Q_c \approx \frac{\lambda_r}{\Delta} \sim \sqrt{\lambda_r}. \quad (3-6-20б)$$

Эта формула выведена в предположении, что запасенная энергия пропорциональна объему резонатора ($V \sim \lambda_r^3$), а мощность потерь в его стенках пропорциональна поверхности, умноженной на эквивалентную глубину проникновения поля ($S\Delta \sim \lambda_r^2 \Delta$).

Наиболее распространены круглые цилиндрические резонаторы с колебаниями типа H_{01p} , обладающие наибольшей добротностью. Отсутствие продольных составляющих тока на боковых поверхностях таких резонаторов и радиальных составляющих тока на торцах позволяет изготавливать резонаторы разъемными в плоскости $z = \text{const}$ и с перемещаемыми для настройки торцевыми стенками. На рис. 3-62 приведены кривые, показывающие зависимость Q_c цилиндрических круглых резонаторов от отношения $2a/l$. Для типов H_{0mp} при

$2a/l=1$ добротность максимальна, причем при $\lambda_r=10$ см и колебаниях типа H_{011} может быть получена $Q_c \approx \approx 5 \cdot 10^4$. Для этого внутренняя поверхность резонатора, разумеется, должна быть изготовлена из хорошо проводящего материала (медь, серебро) и хорошо отполирована. Используя сверхпроводниковые материалы, при

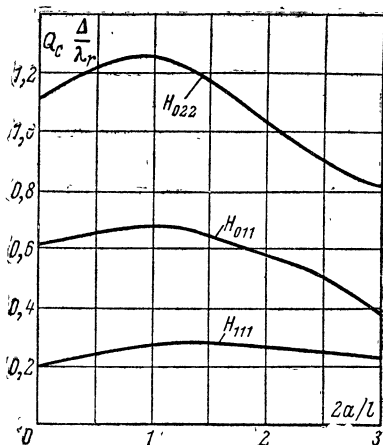


Рис. 3-62. Зависимость собственной добротности цилиндрических круглых полых резонаторов от их размеров при волнах H_{mnp} (среда внутри резонатора без потерь $\epsilon=1$, $\mu=1$).

низких температурах возможно достичь еще более высоких значений Q_c — порядка 10^6 — 10^8 .

Добротность, обусловленная потерями в заполняющей резонатор среде при $\omega=\omega_r$, на основании формул (2-1-7), (3-6-15), (3-6-186) и (3-6-19) равна:

$$Q_d = \frac{\omega_r \epsilon_a \int_V E_d^2 dV}{\sigma \int_V E_d^2 dV} = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta_a}. \quad (3-6-21)$$

Резонатор может быть заполнен плазмой при условии, что плотность ее ионизации не превосходит величины, определяемой из неравенства (2-7-36), т. е. если

$$\omega > \omega_p = e \sqrt{\frac{n}{m\epsilon_0}}. \quad (3-6-22)$$

Так как при этом согласно выражению (2-7-37) $\epsilon < 1$, то резонансная частота заполненного плазмой полого резонатора больше, чем у такого же незаполненного. Резонансная частота заполненного плазмой полого резонатора при условии (3-6-22) определяется из выражения

$$\omega_{ri}^2 = \frac{\omega_r^2}{\epsilon}$$

или с использованием формулы (2-7-37) при $\nu < \omega_p < \omega_r$

$$\omega_{ri} \approx \omega_r \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_r}\right)^2} > \omega_r. \quad (3-6-23)$$

На основании выражений (3-6-21) и (2-7-37) добротность заполненного плазмой резонатора, если $\nu < \omega_p < \omega$,

$$Q_{di} \approx \frac{\omega}{\nu} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 - 1 \right]. \quad (3-6-24)$$

Добротность резонатора, обусловленная излучением через отверстие в стенке, при $\omega = \omega_r$, на основании формул (3-6-18в), (3-6-19) и (3-6-16) определяется выражением

$$Q_{из} = \frac{2\omega_r \mu_0 \int_V H_d^2 dV}{\int_{S_0} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_m \mathbf{H}_m^*] dS} = \frac{2\omega_r \epsilon_0 \int_V E_d^2 dV}{\int_{S_0} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_m \mathbf{H}_m^*] dS}.$$

Здесь предполагается, что параметры сред внутри и вне резонатора одинаковы ($\mu_a = \mu_0$, $\epsilon_a = \epsilon_0$ и $\sigma = 0$). Если размеры излучающего отверстия малы по сравнению с длиной волны, то знаменатель этого выражения на основании формулы (2-5-12) может быть представлен в следующем виде:

$$\frac{\dot{E}_{до}}{120\pi} S_0 = H_{до}^2 \cdot 120\pi S_0,$$

где S_0 — площадь отверстия;
 $E_{до}$ и $H_{до}$ — действующие значения напряженностей поля на отверстии.

Если излучающее отверстие имеет форму щели длиной $\lambda/2$, прорезанной в месте пучности поля H_z (рис. 3-63), то излучаемая мощность и добротность резонатора при этом могут быть определены на основании формул (2-4-8).

Согласно теореме взаимности (2-1-19) возбуждение поля в полном резонаторе может быть осуществлено также через отверстие, пересекающее линии тока на поверхности стенок резонатора, либо с помощью проводника с током (рис. 3-63), введенного через очень маленькое отверстие в пучности электрического поля (см. также § 3-7).

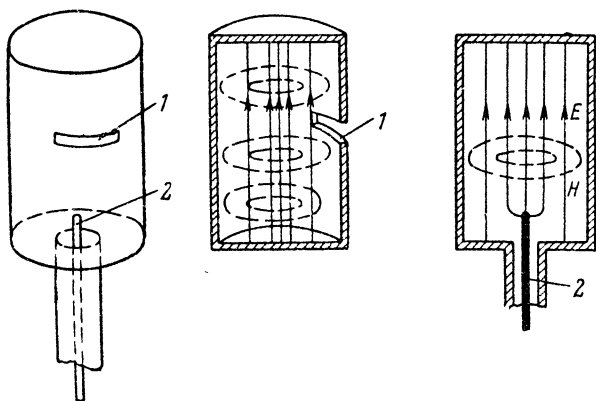


Рис. 3-63. Схемы нагрузки (возбуждения) цилиндрического полного резонатора при волне E_{010} через отверстие (1) и проводник с током (2).

Открытый резонатор состоит из двух параллельных отражающих пластин (зеркал), между которыми возбуждается электромагнитное поле (рис. 3-64). Такое поле представляет стоячую волну ТЕМ и возможно, если расстояние между зеркалами $d = p \frac{\lambda}{2}$, где p — целое число.

Чтобы не было потерь на излучение, должно выполняться неравенство $\pi a^2 \gg p \lambda^2$. Нагрузка открытого резонатора осуществляется с помощью отражающей пластины с малым коэффициентом пропускания.

Резонаторы подобного типа используются, в частности, в газовых квантовых генераторах и в интерферометрах оптического диапазона (интерферометр Фабри-Перо).

Обусловленная нагрузкой добротность открытого резонатора

$$Q_{\text{из}} \approx \frac{2p\pi}{1 - |\dot{\Gamma}_E|^2}. \quad (3-6-25)$$

Здесь $\dot{\Gamma}_E$ — коэффициент отражения; значение его не меньше 0,9.

Если торцы отрезка цилиндрического диэлектрического волновода с волной типа E_{0m} закрыть отражаю-

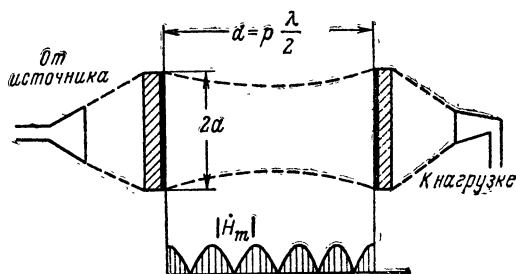


Рис. 3-64. Открытый резонатор и распределение поля вдоль его оси.

щими металлическими пленками (рис. 3-65), то образуется диэлектрический резонатор с полным внутренним отражением. Такой резонатор используют, в частности, в квантовых кристаллических генераторах. Если поле E_{01p} в диэлектрическом круглом резонаторе длиной l и радиусом a рассматривать как сумму двух волн, то с помощью формулы (3-5-33) получим следующие выражения, описывающие это поле:

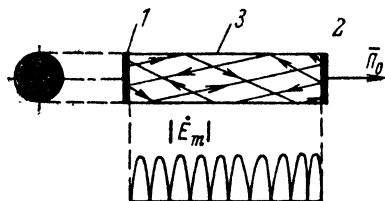


Рис. 3-65. Диэлектрический цилиндрический круглый резонатор с полным внутренним отражением.

1 — полностью отражающая пленка; 2 — отражающая пленка с малым коэффициентом пропускания; 3 — диэлектрический стержень ($\epsilon > 1$).

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= EJ_0(\chi r) \cos(\chi_z z); \\ \dot{E}_{mr} &= \frac{\chi_z}{\chi} EJ_1(\chi r) \sin(\chi_z z); \\ \dot{H}_{m\alpha} &= j \frac{\omega_r \epsilon_{a1}}{\chi} EJ_1(\chi r) \cos(\chi_z z). \end{aligned} \right\} \quad (3-6-26)$$

Поле вне резонатора при этом также представляет стоячую волну; при условии $\mu_1 \epsilon_1 \gg 1$ напряженность этого по-

ля мала по сравнению с напряженностью поля в резонаторе и практически внешним полем можно пренебречь. Нагрузка диэлектрического резонатора осуществляется излучением через торец, отражающая пленка на котором делается при этом с большим коэффициентом отражения (не менее 0,9). Нагруженную добротность такого резонатора можно определить по формуле (3-6-25).

Собственные колебания в резонаторах. Потери в резонаторе приводят к убыванию запасенной энергии поля, если она не восполняется извне, т. е. $dW/dt = -P_0$. С учетом этого соотношения выражение (3-6-18) принимает следующий вид:

$$Q = \frac{\omega_r W_r}{\left| \frac{dW_r}{dt} \right|}.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dW_r}{dt} + \frac{\omega_r W_r}{Q} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$W_r(t) = W_0 e^{-\frac{\omega_r t}{Q}},$$

т. е. запасенная энергия убывает по экспоненциальному закону.

Так как энергия резонатора пропорциональна квадрату амплитуды напряженности электрического поля, то последняя изменяется по закону $e^{-\frac{\omega_r t}{2Q}}$, вследствие чего мгновенные значения напряженности электрического поля

$$\dot{E} = \dot{E}_m e^{-\alpha_r t} e^{j\omega_r t} = \dot{E}_m e^{j\omega_c t}. \quad (3-6-27)$$

Здесь

$$\alpha_r = \frac{\omega_r}{2Q} \quad (3-6-28)$$

— множитель затухания;

$$\dot{\omega}_c = \omega_r + j \frac{\omega_r}{2Q} \quad (3-6-29)$$

— комплексная частота собственных колебаний резонатора.

Собственная частота колебаний резонатора

$$\omega_c = \omega_r \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}. \quad (3-6-29a)$$

При $Q \gg 1$

$$\omega_c \approx \omega_r.$$

Вынужденные колебания в резонаторах происходят под действием заданных внешних источников, действу-

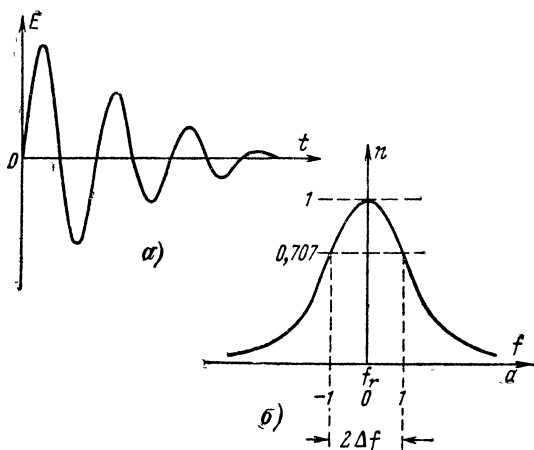


Рис. 3-66. Характеристики поля в полном резонаторе.

a — график собственных (свободных) колебаний; *b* — приведенная резонансная кривая.

ющих независимо от колебаний системы. Если предположить, что единичный длительностью dt импульс тока источника возбуждает в резонаторе собственные колебания (рис. 3-66, *a*)

$$E = E'_m e^{-\alpha_r t} \cos \omega_r t, \quad (3-6-30)$$

то изменяющийся во времени ток $i = I_m \cos \omega t$ ($I_m = 1$), можно представить как бесконечную сумму импульсов, действующих в бесконечно малом промежутке времени $\tau < t < (\tau + d\tau)$ с амплитудой $\cos \omega t$. Каждый импульс соз-

дает поле, которое определяется формулой (3-6-30) с запаздыванием на время τ по отношению к полю, создаваемому единичным импульсом, действующим в момент $t=0$, и отличается по амплитуде в $\cos \omega t$ раз. Напряженность результирующего электрического поля, установившегося к моменту времени t , определится следующим выражением:

$$E = E'_m \int_{-\infty}^t \cos \omega t \cos [\omega_r(t - \tau)] e^{-\alpha_r(t-\tau)} d\tau.$$

Расстройка относительно резонансной частоты практически обычно мала, т. е. $\Delta\omega = (\omega - \omega_r) \ll \omega_r$; при этом

$$E \approx \frac{E'_m}{2} \frac{(\omega - \omega_r) \sin \omega t + \alpha_r \cos \omega t}{(\omega - \omega_r)^2 + \alpha_r^2}$$

или

$$E \approx \frac{E_{m \text{ рез}} \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1 + a^2}}. \quad (3-6-31)$$

Здесь

$$E_{m \text{ рез}} = QE'_m, \quad \varphi = \arctg a \text{ и } a = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_r}.$$

Величина $\Delta\omega = \omega - \omega_r$ называется абсолютной расстройкой, отношение $\Delta\omega/\omega_r$ — относительной расстройкой; величина a называется обобщенной расстройкой, поскольку она включает основные параметры резонатора: резонансную частоту и добротность.

Зависимость амплитуды напряженности поля от расстройки определяется уравнением резонансной кривой, которое на основании выражения (3-6-31) имеет вид:

$$E_m = \frac{E_{m \text{ рез}}}{\sqrt{1 + a^2}}. \quad (3-6-32)$$

Удобнее пользоваться приведенной резонансной кривой (рис. 3-66, б), выражающей зависимость от расстройки отношения:

$$n = \frac{E_m}{E_{m \text{ рез}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}. \quad (3-6-33)$$

Полоса частот $2\Delta f$, на границах которой $n=0,707$ ($a=\pm 1$), называется полосой пропускания. Согласно этому определению $a=2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_r}=1$ и полоса пропускания резонатора

$$2\Delta f = f_r \frac{1}{Q}. \quad (3-6-34)$$

3-7. НЕОДНОРОДНОСТИ В ВОЛНОВОДАХ И РЕЗОНАТОРАХ

Неоднородностью в волноводе в общем случае является скачкообразное изменение его формы и размеров поперечного сечения или скачкообразное изменение параметров заполняющей волновод среды. Наличие неоднородности приводит к скачкообразному изменению постоянной распространения и, следовательно, к изменению критической частоты, к отражению электромагнитной энергии и к возникновению в волноводе стоячих волн.

Примерами неоднородностей в волноводах являются:

1. Сочленения между различными волноводами или волновода с коаксиальным кабелем (рис. 3-67—3-72), используемые для присоединения источника энергии (возбуждение поля в волноводе) или нагрузки (поглощение энергии поля в волноводе).

2. Волноводные разветвители (рис. 3-73 и 3-74), служащие для распределения поля по нескольким волноводам.

3. Штыри и диафрагмы (рис. 3-75), используемые для согласования волнового сопротивления нагрузки с волновым сопротивлением волновода, а также в качестве элементов фильтров.

4. Отрезки волноводов с частичным заполнением анизотропной средой, в частности, намагниченным ферритом или намагниченной плазмой (рис. 3-76—3-78); такие отрезки могут выполнять роль вентилях (невзаимных элементов), фазовращателей, модуляторов и других элементов.

Неоднородностями в резонаторах являются помещаемые в них для изменения резонансной (собственной) частоты металлические, диэлектрические, магнитные и гироскопические тела.

Исследование структуры поля при наличии неоднородностей представляет довольно сложную математиче-

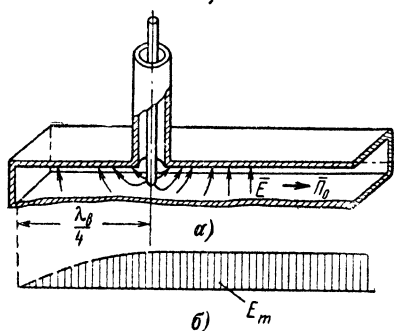


Рис. 3-67. Сочленение прямоугольного волновода и коаксиального кабеля (а) и эпюра поля вдоль оси волновода (б) при согласованной нагрузке.

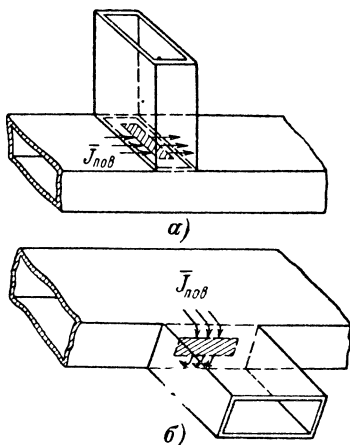


Рис. 3-68. «Последовательное» (а) и «параллельное» (б) соединения двух волноводов с волной типа H_{10} .

Заштрихованы отверстия, прерывающие линии поверхностных токов.

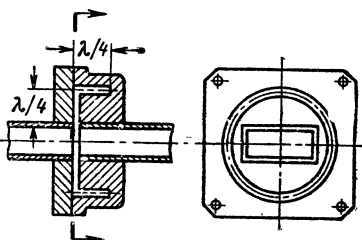


Рис. 3-69. Соединительные фланцы с «четвертьволновой ловушкой», исключающей проникновение поля через зазор, образуемый неплотным соединением.

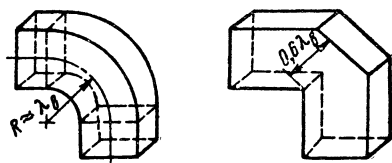


Рис. 3-70. Изгиб, излом и скрутка волноводов.

скую задачу. Однако большей частью практический интерес представляет не структура поля, а влияние неоднородностей на режим работы волновода или резонатора. В этих случаях задача упрощается и сводится к решению методами теории линейных цепей, которые рассматриваются в § 8-7. Неоднородности при этом можно рассматривать как сосредоточенные реактивности, рас-

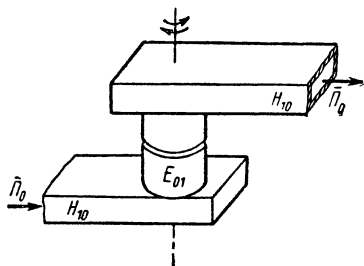


Рис. 3-71. Вращающееся сочленение волноводов.

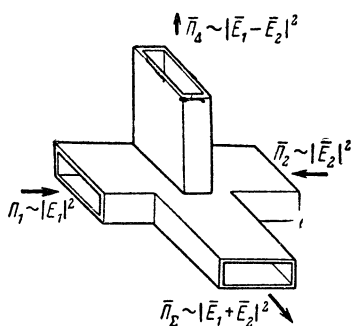


Рис. 3-73. Двойной волновод-троечник.

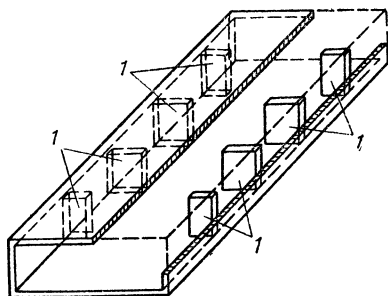
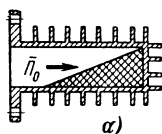
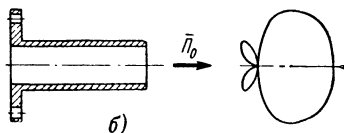


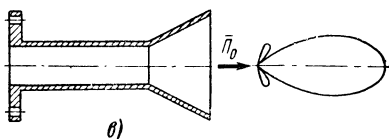
Рис. 3-75. Электрический фильтр с распределенными постоянными, образованный индуктивными диафрагмами 1 в волноводе.



а)



б)



в)

Рис. 3-72. Типы оконечных нагрузок волноводов.

а — поглощающая насадка с улучшающими отвод тепла наружными ребрами; б — открытый конец волновода (ширина диаграммы излучения около 180° , коэффициент отражения значительный); в — излучающий рупор (ширина диаграммы излучения менее 90° , коэффициент отражения незначителен).

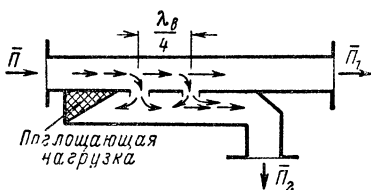


Рис. 3-74. Направленный ответвитель.

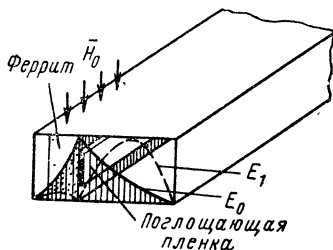


Рис. 3-76. Ферритовый вентиль со смещением поля (E_1 — эюра поля прямой волны, E_0 — эюра поля затухающей обратной волны).

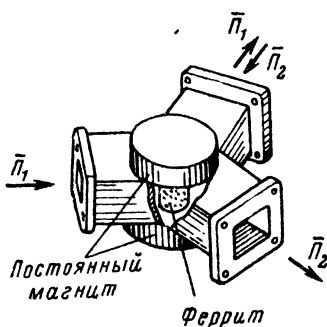


Рис. 3-77. Y-циркулятор.

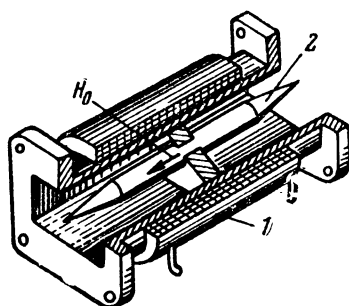


Рис. 3-78. Ферритовый вентиль.
1 — катушка; 2 — ферритовый стержень.

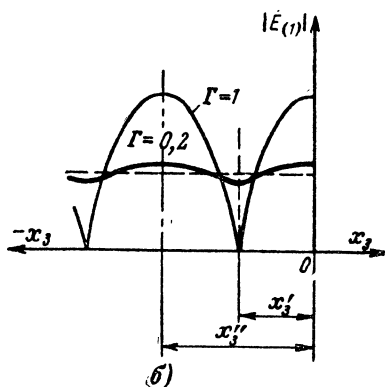
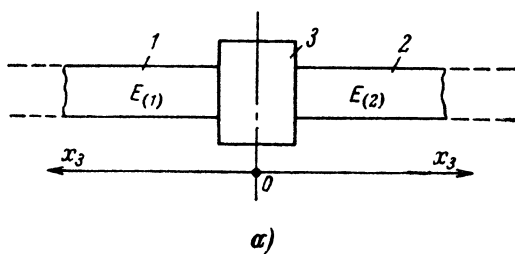


Рис. 3-79. Схема волновода с неоднородностью (а) и распределение в нем амплитуд напряженности электрического поля (б).

1, 2 — части регулярного волновода; 3 — неоднородность.

считываемые методами теории электромагнитного поля.

Пусть в регулярном волноводе имеется неоднородность (рис. 3-79, а). Создающий поле источник находится в левой части волновода 1, а нагрузка — в его правой части 2. Вблизи неоднородности 3 имеет место бесконечное число типов волн (поле зоны индукции), амплитуды которых по мере удаления от неоднородности убывают и на расстоянии, сравнимом с длиной волны, ими можно пренебречь. Однако на неоднородности амплитуды этих полей сравнимы с амплитудой падающей волны, и поэтому эти поля необходимо учитывать при удовлетворении граничным условиям. Таким образом, на участке 1 на достаточном расстоянии от неоднородности имеет место падающая волна заданного типа и амплитуды и отраженная волна того же типа (так как обычно в волноводе распространяется волна только одного типа). На участке 2 имеет место только прошедшая волна. Тип прошедшей волны может отличаться от типа падающей волны, если сечения участков 1 и 2 не одинаковы.

Рассматривая только поперечные составляющие поля, т. е. составляющие, лежащие в поперечной плоскости волновода, и полагая, что неоднородность расположена в точке $x_3=0$, запишем выражение для комплексной амплитуды поперечного электрического поля на участке 1 следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m(1)} = & E_m e^{-jk_0^{(1)} x_3} + \dot{E}_{m0} e^{-jk_0^{(1)} x_3} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{E}_{m_n^{(n)}} e^{-|k_n^{(1)}| x_3}. \end{aligned} \quad (3-7-1)$$

Здесь первое слагаемое характеризует падающую волну, второе — отраженную, а третье — бесконечную сумму всех возможных на участке 1 полей индукции, для которых постоянные распространения являются мнимыми величинами и амплитуды которых убывают при удалении от точки $x_3=0$ по экспоненте; $k_0^{(1)}$ — постоянная распространения падающей и отраженной волны на участке 1; $k_n^{(1)}$ ($n=1 \dots \infty$) — постоянные распространения полей индукции на том же участке.

На участке 2 имеем:

$$\dot{E}_{m(2)} = \dot{E}_{m \text{ пр}} e^{-jk_0^{(2)} x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{E}_{m \text{ пр}} e^{-|k_n^{(2)}| x_3}. \quad (3-7-2)$$

Здесь первое слагаемое характеризует прошедшую волну, второе — бесконечную сумму всех возможных полей индукции, амплитуды которых убывают по экспоненте; $k_0^{(2)}$ — постоянная распространения прошедшей волны на участке 2; $k_n^{(2)}$ ($n=1 \dots \infty$) — постоянные распространения полей индукции на том же участке.

Аналогично для поперечных составляющих магнитного поля получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{m(1)} &= \dot{H}_m e^{-jk_0^{(1)} x_3} + \dot{H}_{m0} e^{jk_0^{(1)} x_3} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{H}_{m0}^{(n)} e^{|k_n^{(1)}| x_3}; \\ \dot{H}_{m(2)} &= \dot{H}_{m \text{ пр}} e^{-jk_0^{(2)} x_3} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{H}_{m \text{ пр}}^{(n)} e^{-|k_n^{(2)}| x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (3-7-3)$$

Волновые сопротивления и проводимости волноводов на участках 1 и 2 для распространяющихся типов волн и соответствующих типов волн полей индукции определяются через поперечные составляющие электрического и магнитного полей следующими выражениями: на участке 1 для волн распространяющегося типа

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = -\frac{\dot{E}_{m0}}{\dot{H}_{m0}}, \\ Y_1 &= \frac{1}{Z_1}; \end{aligned} \right\} \quad (3-7-4a)$$

на участке 1 для соответствующих типов поля индукции

$$\left. \begin{aligned} Z_{1n} &= -\frac{\dot{E}_{m0}^{(n)}}{\dot{H}_{m0}^{(n)}}, \\ Y_{1n} &= \frac{1}{Z_{1n}}; \end{aligned} \right\} \quad (3-7-4б)$$

на участке 2 для волн распространяющегося типа

$$\left. \begin{aligned} Z_2 &= \frac{\dot{E}_{m \text{ пр}}}{\dot{H}_{m \text{ пр}}}, \\ Y_2 &= \frac{1}{Z_2}; \end{aligned} \right\} \quad (3-7-4в)$$

на участке 2 для соответствующих типов поля индукции

$$\left. \begin{aligned} Z_{2n} &= \frac{\dot{E}_{m \text{ пр}}^{(n)}}{\dot{H}_{m \text{ пр}}^{(n)}}, \\ Y_{2n} &= \frac{1}{Z_{2n}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-7-4\Gamma)$$

Процесс распространения электромагнитной волны в волноводах характеризуется коэффициентом отражения, определяемым как отношения поперечных составляющих электрического поля отраженной и падающей волн одного типа в любой точке регулярного участка волновода 1:

$$\dot{\Gamma}_B(x_3) = \frac{\dot{E}_{m0} e^{jk_0^{(1)}x_3}}{E_m e^{-jk_0^{(1)}x_3}} = \frac{\dot{E}_{m0}}{E_m} e^{j2k_0^{(1)}x_3}. \quad (3-7-5)$$

Величина

$$\dot{\Gamma}_B(0) = \frac{\dot{E}_{m0}}{E_m} = |\dot{\Gamma}| e^{j\psi_E} \quad (3-7-6)$$

называется коэффициентом отражения от неоднородности. При этом

$$\dot{\Gamma}_B(x_3) = |\dot{\Gamma}| e^{j(2k_0^{(1)}x_3 + \psi_E)}, \quad (3-7-7)$$

т. е. модуль коэффициента отражения при отсутствии потерь остается неизменным в любой точке регулярного волновода, а фаза пропорциональна x_3 .

Распределение амплитуды поля на участке 1 (рис. 3-79, б) зависит от модуля коэффициента отражения и определяется выражением, аналогичным (3-3-2а).

На практике вместо модуля коэффициента отражения обычно измеряют коэффициент стоячей волны напряжения (КСВН) или коэффициент бегущей волны напряжения (КБВН)

$$\left. \begin{aligned} \text{КСВН} &= \frac{1 + |\dot{\Gamma}|}{1 - |\dot{\Gamma}|}, \\ \text{КБВН} &= \frac{1 - |\dot{\Gamma}|}{1 + |\dot{\Gamma}|}. \end{aligned} \right\} \quad (3-7-8)$$

Неоднородность характеризуется коэффициентом отражения, определяемым по формуле (3-7-6), и, кроме того, следующими величинами:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Gamma}_n(0) &= \frac{\dot{E}_{m0}^{(n)}}{E_m}; \\ \dot{P}(0) &= \frac{\dot{E}_{m\text{пр}}}{E_m}; \\ \dot{P}_n(0) &= \frac{\dot{E}_{m\text{пр}}^{(n)}}{E_m}, \end{aligned} \right\} \quad (3-7-9)$$

называемыми коэффициентами отражения и прохождения неоднородности.

Согласование волновода с нагрузкой заключается в создании в нем бегущей волны при наличии отражений от нагрузки. При практических использованиях волноводов (как и других линий связи) обычно существуют такие условия, при которых отраженная волна в волноводе практически отсутствует, т. е. КБВН $\rightarrow 1$, $|\dot{\Gamma}| \rightarrow 0$. При этом имеют место наименьшие потери в волноводе, а на его нагрузке выделяется наибольшая мощность. При бегущей волне режим генератора (источника поля) более устойчив, так как при этом нагрузкой генератора является волновое сопротивление волновода $Z_{0\text{в}}$ или $\dot{Z}_{0\text{н}}$, которое в большинстве практических случаев мало изменяется в пределах спектра частот передаваемого сигнала. Для согласования волновода с нагрузкой на возможно наименьшем расстоянии от последней в волновод вводят «согласующий» элемент — неоднородность в виде диафрагмы или штыря (рис. 3-80). Размеры согласующего элемента и расстояние его от нагрузки подбирают такими, при которых влево от точки x_3 будет чисто бегущая волна, а на участке $0-x'_3$ — бегущая и стоячая (см. § 8-5).

Возбуждение волновода и полого резонатора можно осуществить через отверстие в металлической стенке; структура поля при этом определяется структурой возбуждающего поля на отверстии.

Поле можно возбудить и с помощью введенного через отверстие в стенке проводника в виде штыря или петли, по которому протекает заданный сторонний ток (рис. 3-81). Разумеется, и в этом случае поле проникает

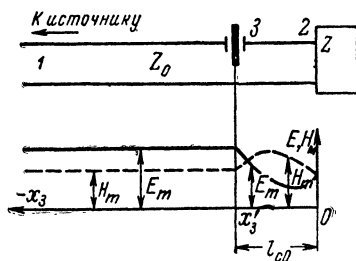


Рис. 3-80. Согласование волноводов.

1 — регулярный волновод; 2 — нагрузка; 3 — согласующий элемент.

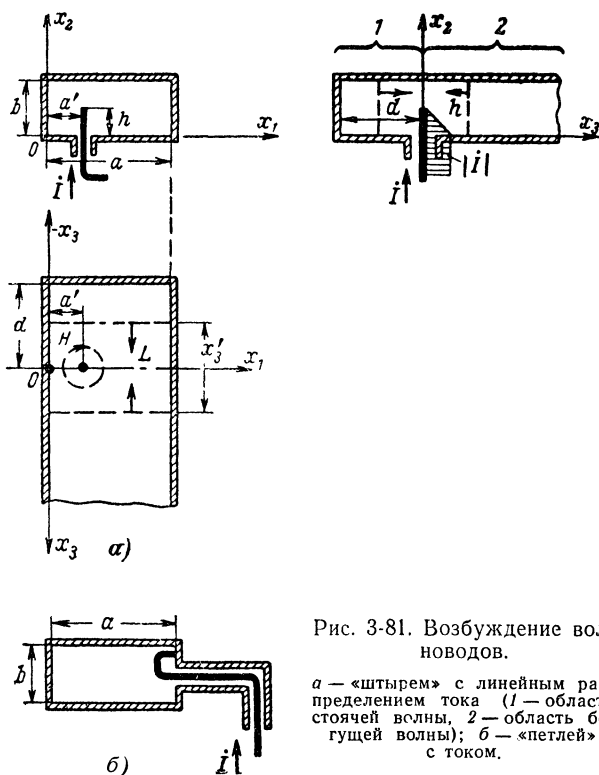


Рис. 3-81. Возбуждение волноводов.

a — «штырь» с линейным распределением тока (1 — область стоячей волны, 2 — область бегущей волны); b — «петлей» с током.

через отверстие в стенке, однако размеры этого отверстия могут быть очень малыми. Так как и длина проводника мала по сравнению с длиной волны, то по причинам, приведенным в § 2-4, распределение тока в незамкнутом проводнике может считаться линейным, и, следовательно, его действующая высота $h_d \approx h/2$. Если длина провода петли мала по сравнению с поперечными размерами волновода, то распределение тока в петле можно считать постоянным.

Рассмотрим возбуждение прямоугольного волновода, внутрь которого параллельно узкой стенке в точке $x_1 = a'$ введен проводник (штырь) с током I (рис. 3-81, а). В общем случае возбуждаемое поле состоит из бесконечно большого числа типов волн, определяемых выражениями (3-5-7) и (3-5-16). Амплитуды этих волн различны и зависят от тока, протекающего в проводнике. Если волновод бесконечен или на обоих его концах включены согласованные нагрузки, то образуются волны, бегущие в обе стороны по оси волновода. Если один конец волновода закрыт металлической перегородкой, а другой нагружен на согласованную нагрузку или имеет неограниченную длину, между перегородкой и возбуждающим проводником образуется стоячая волна, а в остальной части волновода — бегущая волна.

В качестве примера определим величину напряженности магнитного поля типа H_{10} , т. е. значение H в формулах (3-5-11). Охватив штырь с током контуром L , стягиваем этот контур так, что в пределе его стороны совместятся на оси ox_1 . При этом из уравнения (1-3-1)

$$i = \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l}$$

получаем:

$$\int_0^a \dot{H}_{m1} dx_1 = \frac{i_m}{2}. \quad (3-7-10)$$

Вычислим интеграл

$$A = \int_0^a \int_0^b \dot{H}_{m1} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) dx_1 dx_2. \quad (3-7-11)$$

Учитывая, что составляющая H_1 отлична от нуля только в точке $x_1 = a'$, согласно выражению (3-7-10) получаем:

$$A = \frac{j_m h}{2} \sin\left(\frac{\pi a'}{a}\right). \quad (3-7-12)$$

Подставляя в выражение (3-7-11) значение \dot{H}_{m1} из выражений (3-5-11), получаем:

$$A = j \frac{\lambda_{кр}}{\Lambda} H \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) dx_1 dx_2 = j \frac{\lambda_{кр}}{\Lambda} H \frac{ab}{2}. \quad (3-7-13)$$

Приравнявая выражения (3-7-12) и (3-7-13), имеем:

$$H = -j \frac{\Lambda}{\lambda_{кр}} \frac{2}{ab} \dot{I}_m h_d \sin\left(\frac{\pi a'}{a}\right), \quad (3-7-14)$$

т. е. искомое выражение, определяющее значение напряженности поля в волноводе при заданной величине тока. Наибольшая напряженность поля получается при $a' = a/2$, т. е. когда проводник (штырь) расположен в середине широкой стенки.

При этом

$$H = -j \frac{\lambda_1}{2a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{2a}\right)^2}} \cdot \frac{2}{ab} \dot{I}_m h_d. \quad (3-7-15)$$

Если металлическая перегородка расположена от проводника на расстоянии $d = \Lambda/4$, то распространяющаяся в направлении оси $-x_3$ волна отражается полностью и, складываясь в точке $x_3 = 0$ в фазе с волной, движущейся в направлении оси $+x_3$, увеличивает поле бегущей волны. Вследствие этого формула (3-7-15) для «полубесконечного» волновода принимает вид:

$$H = -j \frac{\lambda_1}{a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{2a}\right)^2}} \cdot \frac{2}{ab} \dot{I}_m h_d. \quad (3-7-16)$$

Метод возмущений является наиболее простым и универсальным методом исследования резонаторов и волноводов с неоднородностями, которые изменяют резонансную или критическую частоту в небольших пределах. При использовании этого метода исследуемая система рассматривается как результат возмущения дру-

гой, более простой системы, решения для которой известны. Поле в резонаторе или в волноводе без неоднородностей называют начальным или невозмущенным. Величины, характеризующие электромагнитный процесс при возмущенном состоянии системы, будем обозначать с индексом «в», а при начальном состоянии — с индексом «н»; параметры среды, заполняющей невоз-

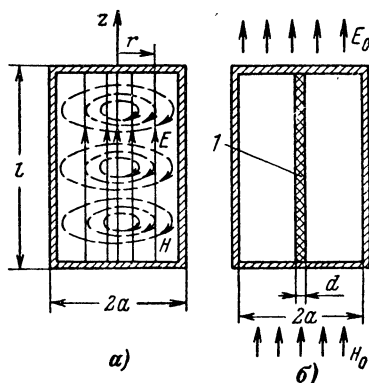


Рис. 3-82. Цилиндрический круглый резонатор.

а — структура электромагнитного поля при волне E_{010} ; б — резонатор, возмущенный ферритовым стержнем 1.

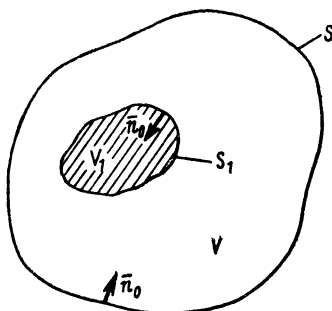


Рис. 3-83. К методу возмущений.

мущенную систему, будем считать скалярными и вещественными.

Рассмотрим наиболее общий случай возмущения резонатора анизотропным (гиротропным) телом (см. § 2-9). Если внести такое тело в резонатор, то собственная частота последнего изменится; это изменение определяется выражением

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = - \frac{\Delta W}{W_r}, \quad (3-7-17)$$

в котором ΔW — изменение электромагнитной энергии в резонаторе при внесении в него гиротропного тела, W_r — энергия невозмущенного резонатора.

На рис. 3-82 для примера изображен цилиндрический резонатор, возмущенный тонким ферритовым стержнем 1 или плазмой, сжатой постоянным магнитным полем в тонкий столб (см. § 5-7).

Пусть заполняющая резонатор среда в начальном состоянии характеризуется скалярными параметрами:

$\varepsilon_0 = \varepsilon_0 \| \delta_{ik} \|$ и $\mu_0 = \mu_0 \| \delta_{ik} \|$, где $\| \delta_{ik} \|$ — единичный тензор [см. формулу (Д-2-21)].

Под действием постоянных электрического \mathbf{E}_0 и магнитного полей \mathbf{H}_0 введенное в резонатор тело становится гиротропным с тензорами проницаемостей (2-9-9) и (2-9-31)

$$\mu_{ik} = \begin{vmatrix} \mu & -j\mu_\alpha & 0 \\ j\mu_\alpha & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{vmatrix};$$

$$\varepsilon_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & -j\varepsilon_\alpha & 0 \\ j\varepsilon_\alpha & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}.$$

Если векторы \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 направлены по оси x_3 , то $\Delta \| \varepsilon_{ik} \|$ и $\Delta \| \mu_{ik} \|$ являются функциями координат и внутри объема гиротропного тела V_1 (рис. 3-83) удовлетворяют условиям

$$\Delta \| \mu_{ik} \| = \| \mu_{ik} \| - \| \delta_{ik} \| = \begin{vmatrix} \Delta\mu & j\mu_\alpha & 0 \\ -j\mu_\alpha & \Delta\mu & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\mu_3 \end{vmatrix}; \quad (3-7-18)$$

$$\Delta \| \varepsilon_{ik} \| = \| \varepsilon_{ik} \| - \| \delta_{ik} \| = \begin{vmatrix} \Delta\varepsilon & j\varepsilon_\alpha & 0 \\ -j\varepsilon_\alpha & \Delta\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\varepsilon_3 \end{vmatrix}, \quad (3-7-19)$$

а внутри остального объема резонатора $V - V_1$, т. е. объема, не занятого телом, удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \Delta \| \mu_{ik} \| &= 0; \\ \Delta \| \varepsilon_{ik} \| &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-7-20)$$

При отсутствии сторонних токов уравнения (2-1-5) для начальных собственных колебаний резонатора i -го типа имеют вид:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_{ni} = j\omega_{ni} \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_{ni}; \quad (3-7-21)$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_{ni} = -j\omega_{ni} \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_{ni}, \quad (3-7-22)$$

а для возмущенного поля n -го типа вид:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_{nn} = j\omega_{nn} \| \varepsilon_{ik} \| \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_{nn}; \quad (3-7-23)$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_{nn} = -j\omega_{nn} \| \mu_{ik} \| \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_{nn}. \quad (3-7-24)$$

Перепишем уравнение (3-7-21) относительно комплексно сопряженных амплитуд $\dot{\mathbf{H}}_{ni}^*$ и $\dot{\mathbf{E}}_{ni}^*$, умножив правую и левую его части на \mathbf{E}_{bn} ,

$$\dot{\mathbf{E}}_{bn} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* = -j\omega_{ni} \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* \dot{\mathbf{E}}_{bn}. \quad (3-7-25)$$

Умножив обе части (3-7-24) на $\dot{\mathbf{H}}_{ni}^*$ и вычитая из полученного уравнения (3-7-25), получим:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_{bn} - \dot{\mathbf{E}}_{bn} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* = \\ = -j\omega_{bn} \|\mu_{ik}\| \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_{bn} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* + j\omega_{ni} \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* \dot{\mathbf{E}}_{bn}. \end{aligned} \quad (3-7-26)$$

Интегрируя это выражение по объему V и учитывая выражения (Д-3-23), (Д-3-30) и граничное условие на поверхности резонатора $E_\tau = 0$, с учетом выражения (3-7-18), получим:

$$\begin{aligned} \omega_{bn} \mu_0 \int_V \dot{\mathbf{H}}_{bn} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* dV + \omega_{bn} \mu_0 \int_V \Delta \|\mu_{ik}\| \dot{\mathbf{H}}_{bn} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* dV - \\ - \omega_{ni} \varepsilon_0 \int_V \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* \dot{\mathbf{E}}_{bn} dV = 0. \end{aligned} \quad (3-7-27)$$

Аналогично на основе уравнений (3-7-23) и (3-7-22) получим:

$$\begin{aligned} \omega_{bn} \varepsilon_0 \int_V \dot{\mathbf{E}}_{bn} \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* dV + \omega_{bn} \varepsilon_0 \int_V \Delta \|\varepsilon_{ik}\| \dot{\mathbf{E}}_{bn} \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* dV - \\ - \omega_{ni} \mu_0 \int_V \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* \dot{\mathbf{H}}_{bn} dV = 0. \end{aligned} \quad (3-7-28)$$

Складывая уравнения (3-7-27) и (3-7-28), находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{\omega_{bn}} = \frac{\omega_{bn} - \omega_{ni}}{\omega_{bn}} = \\ = - \frac{\mu_0 \int_{V_1} \Delta \|\mu_{ik}\| \dot{\mathbf{H}}_{bn} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* dV + \varepsilon_0 \int_V \Delta \|\varepsilon_{ik}\| \dot{\mathbf{E}}_{bn} \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* dV}{\int_V (\mu_0 \dot{\mathbf{H}}_{bn} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_{bn} \dot{\mathbf{E}}_{ni}^*) dV}. \end{aligned} \quad (3-7-29)$$

Если $\omega_{bn} \approx \omega_{ni}$ (возмущение мало), то последняя формула принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\omega_{ni}}{\omega_{ni}} = \\ = - \frac{\mu_0 \int_{V_1} \Delta \|\mu_{ik}\| \dot{\mathbf{H}}_{bi} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* dV + \varepsilon_0 \int_{V_1} \Delta \|\varepsilon_{ik}\| \dot{\mathbf{E}}_{bi} \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* dV}{2\mu_0 \int_V \dot{\mathbf{H}}_{bi} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* dV}; \end{aligned} \quad (3-7-30)$$

или

$$\frac{\Delta\omega_{ni}}{\omega_{ni}} = - \frac{\mu_0 \int_{V_1} \Delta \parallel \mu_{ik} \parallel \dot{\mathbf{H}}_{bi} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* dV + \varepsilon_0 \int_{V_1} \Delta \parallel \varepsilon_{ik} \parallel \dot{\mathbf{E}}_{bi} \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* dV}{2\varepsilon_0 \int_V \dot{\mathbf{E}}_{bi} \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* dV}. \quad (3-7-31)$$

При малом возмущении

$$\left. \begin{aligned} \int_V \dot{\mathbf{H}}_{bi} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* dV &= \int_V \dot{\mathbf{H}}_{ni} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* dV; \\ \int_V \dot{\mathbf{E}}_{bi} \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* dV &= \int_V \dot{\mathbf{E}}_{ni} \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* dV. \end{aligned} \right\} \quad (3-7-32)$$

Действительно, напряженность возмущенного поля

$$\dot{\mathbf{H}}_{bi} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \dot{\mathbf{H}}_{nk},$$

где a_k — коэффициент, равный отношению амплитуды возмущенного поля k -го типа к амплитуде начального поля i -го типа. Используя свойство ортогональности [см. выражение (3-6-3)], находим:

$$\int_V \dot{\mathbf{H}}_{bi} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* dV = \int_V \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* \sum_{k=1}^{\infty} a_k \dot{\mathbf{H}}_{nk} dV = a_i \int_V \dot{\mathbf{H}}_{ni} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* dV.$$

При достаточно малом возмущении a_i близко к единице и, следовательно, равенства (3-7-32) справедливы. Обозначая $W = 2\mu_0 \int_V \dot{\mathbf{H}}_{ni} \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* dV = 2\varepsilon_0 \int_V \dot{\mathbf{E}}_{ni} \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* dV$, из уравнений (3-7-30) и (3-7-31) получаем основную формулу гиротропного возмущения резонатора

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = - \frac{\mu_0 \int_{V_1} \Delta \parallel \mu_{ik} \parallel \dot{\mathbf{H}}_b \dot{\mathbf{H}}_n^* dV + \varepsilon_0 \int_{V_1} \Delta \parallel \varepsilon_{ik} \parallel \dot{\mathbf{E}}_b \dot{\mathbf{E}}_n^* dV}{W}. \quad (3-7-33)$$

Индекс i при символах \mathbf{H} и \mathbf{E} , обозначающий тип поля, в этой формуле опущен. Числитель в ее правой части соответствует изменению энергии вследствие внесения гиротропной неоднородности, знаменатель — величине энергии, запасенной в пустом резонаторе.

Так как метод возмущений пригоден для малых возмущений, то целесообразно ввести параметр малости не-

однородности d . Для неоднородности в виде сферы или цилиндра это диаметр, а для пластины — толщина. Напряженности полей в выражении (3-7-33) находят методом квазистатического приближения, согласно которому предполагается, что на протяжении «параметра малости» поле в резонаторе постоянно. Если $d < \lambda_T/6$, где λ_T — длина волны в гиротропной неоднородности, то квазистатическое приближение дает точность не хуже 5%.

Так как компоненты тензоров $\|\epsilon_{ik}\|$ и $\|\mu_{ik}\|$ в общем случае являются комплексными величинами, то формула возмущения (3-7-33) определяет комплексный сдвиг частоты $\Delta\omega$, который на основании выражения (3-6-29) может быть представлен в виде

$$\Delta\omega = \Delta\omega + j \frac{\Delta\omega}{2Q}. \quad (3-7-34)$$

Первый член этого выражения определяет изменение резонансной частоты, второй — изменение добротности.

Для случая чисто электрогиротропного возмущения в выражение (3-7-33) следует подставлять величину $\Delta\|\mu_{ik}\| = 0$, а для чисто магнитогиротропного возмущения величину $\Delta\|\epsilon_{ik}\| = 0$.

С помощью введенного в резонатор гиротропного тела, магнитная или электрическая проницаемость которого изменяется управляющим магнитным или электрическим полем, осуществляют быструю перестройку резонансной частоты. Такой способ перестройки называется электрическим, так как при этом не требуется механического перемещения каких-либо частей резонатора.

При изотропном возмущении $\Delta\|\mu_{ik}\| = \mu - 1$, $\Delta\|\epsilon_{ik}\| = \epsilon - 1$ и, следовательно, формула (3-7-33) принимает вид:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = - \frac{\mu_0 \int_{V_1} (\mu - 1) \dot{\mathbf{H}}_B \dot{\mathbf{H}}_H^* dV + \epsilon_0 \int_{V_1} (\epsilon - 1) \dot{\mathbf{E}}_B \dot{\mathbf{E}}_H^* dV}{W}. \quad (3-7-35)$$

Из последней формулы следует, что внесение в резонатор диэлектрика ($\epsilon > 1$, $\mu = 1$) вызывает изменение частоты, определяемое выражением

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = - \frac{\int_{V_1} (\epsilon - 1) \dot{\mathbf{E}}_B \dot{\mathbf{E}}_H^* dV}{2 \int_V \dot{\mathbf{E}}_H \dot{\mathbf{E}}_H^* dV}, \quad (3-7-35a)$$

т. е. уменьшает собственную частоту резонатора.

Введение тонкого диэлектрического стержня в цилиндрический резонатор с волной E_{010} (рис. 3-82) с учетом выражения (3-6-7), вызывает изменение частоты

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_r} \approx - \frac{(\varepsilon - 1) V_1}{2l \int_0^a \left[J_0 \left(A_{01} \frac{r}{a} \right) \right]^2 2\pi r dr} = - \frac{(\varepsilon - 1)}{3} \left(\frac{d}{a} \right)^2,$$

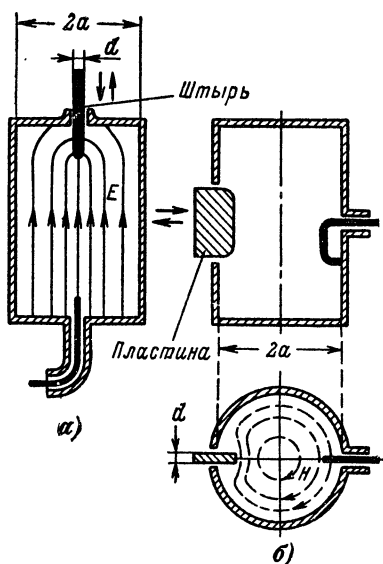


Рис. 3-84. Подстройка частоты резонатора металлическим штырем (а) и металлической пластиной (б).

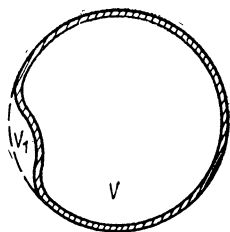


Рис. 3-85. Неоднородность в сферическом резонаторе, образованная деформацией стенки.

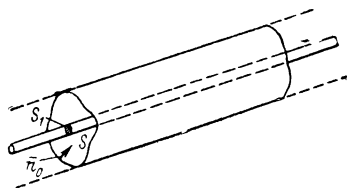


Рис. 3-86. Волновод с неоднородностью в виде неоднородного стержня.

Если неоднородность представляет собой хорошо проводящее тело (рис. 3-84), то согласно формуле (3-7-17) изменение собственной частоты резонатора определяется выражением

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_r} \approx - \frac{-\mu_0 \int_{V_1} \dot{H}_B \dot{H}_B^* dV + \varepsilon_0 \int_{V_1} \dot{E}_B \dot{E}_B^* dV}{W} . \quad (3-7-35б)$$

Формула эта справедлива и в случае деформации стенки резонатора (рис. 3-85); из нее также следует, что вве-

дение в область максимального электрического поля идеально проводящего тела уменьшает резонансную частоту резонатора, а помещение такого тела в область максимального магнитного поля — увеличивает ее. На этом основана подстройка частоты резонаторов введением в них подвижных металлических штырей (винтов) или пластин (рис. 3-84).

Рассмотрим волновод с неоднородностью в виде ги-ротропной области S_1 (рис. 3-86), характеризующейся тензорами магнитной $\|\mu_{ik}\|$ и электрической $\|\epsilon_{ik}\|$ проницаемости, причем, внутри области

$$\left. \begin{aligned} \|\mu_{ik}\| &= \|\mu_{ik}(x_1, x_2)\| = \|\delta_{ik}\| + \Delta \|\mu_{ik}\|, \\ \|\epsilon_{ik}\| &= \|\epsilon_{ik}(x_1, x_2)\| = \|\delta_{ik}\| + \Delta \|\mu_{ik}\|, \end{aligned} \right\} \quad (3-7-36)$$

а вне этой области

$$\left. \begin{aligned} \|\mu_{ik}(x_1, x_2)\| &= 0; \\ \|\epsilon_{ik}(x_1, x_2)\| &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-7-36a)$$

Для комплексно сопряженных амплитуд начального поля i -го типа уравнения (2-1-5) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* &= j\omega\mu_0 \dot{\mathbf{H}}_{ni}^*; \\ \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* &= -j\omega\epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_{ni}^*. \end{aligned} \right\} \quad (3-7-37)$$

Так как в волноводе векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ определяются множителем e^{-jk_0z} , то уравнения (3-7-37) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_\perp \dot{\mathbf{E}}_{ni}^* + jk_{0i} [\mathbf{e}_z \dot{\mathbf{E}}_{ni}^*] &= j\omega\mu_0 \dot{\mathbf{H}}_{ni}^*; \\ \text{rot}_\perp \dot{\mathbf{H}}_{ni}^* + jk_{0i} [\mathbf{e}_z \dot{\mathbf{H}}_{ni}^*] &= -j\omega\epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_{ni}^*. \end{aligned} \right\} \quad (3-7-38)$$

В этих уравнениях значок \perp обозначает векторную операцию rot в плоскости поперечного сечения волновода, а \mathbf{e}_z — единичный вектор, направленный по оси волновода.

Для возмущенного поля уравнения (2-1-5) можно написать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_\perp \dot{\mathbf{E}}_{bn} - jk_{0n} [\mathbf{e}_z \dot{\mathbf{E}}_{bn}] &= -j\omega\mu_0 \|\mu_{ik}\| \dot{\mathbf{H}}_{bn}; \\ \text{rot}_\perp \dot{\mathbf{H}}_{bn} - jk_{0n} [\mathbf{e}_z \dot{\mathbf{H}}_{bn}] &= j\omega\epsilon_0 \|\epsilon_{ik}\| \dot{\mathbf{E}}_{bn}. \end{aligned} \right\} \quad (3-7-39)$$

Проводя с системами уравнений (3-7-38) и (3-7-39) операции, аналогичные выполненным с (3-7-21) — (3-7-24),

получим основную формулу гиротропного возмущения волновода

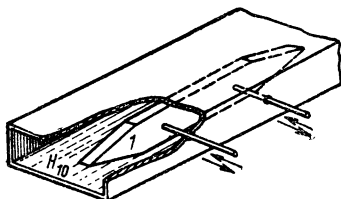
$$\Delta k_0 = k_{0n} - k_{0i} = \frac{\omega \int_{S_1} (\Delta \|\epsilon_{ik}\| \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_{\text{вн}} \dot{\mathbf{E}}_{\text{нi}}^* + \Delta \|\mu_{ik}\| \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_{\text{вн}} \dot{\mathbf{H}}_{\text{нi}}^*) dS}{\int_S \{ [\dot{\mathbf{E}}_{\text{нi}}^* \dot{\mathbf{H}}_{\text{вн}}] + [\dot{\mathbf{E}}_{\text{вн}} \dot{\mathbf{H}}_{\text{нi}}^*] \} dS}. \quad (3-7-40)$$

Учитывая комплексность диэлектрической и магнитной проницаемостей и разделяя их действительные и мнимые части, получаем:

$$\Delta k_0 = \Delta\beta - j \Delta\alpha$$

т. е. не только изменение фазовой, но и постоянной затухания. Изменение постоянной распространения, естественно, вызывает изменение критической частоты и критической длины волн волновода.

Рис. 3-87. Механически управляемый фазовращатель. Постоянная распространения изменяется при перемещении диэлектрической пластины 1.



Для чисто электрогиротропного возмущения следует в формулу (3-7-40) подставлять $\Delta \|\mu_{ik}\| = 0$, а для чисто магнитогиротропного возмущения $\Delta \|\epsilon_{ik}\| = 0$. В случае изотропного возмущения $\Delta \|\epsilon_{ik}\| = \epsilon - 1$, $\Delta \|\mu_{ik}\| = \mu - 1$ и формула (3-7-40) имеет следующий вид:

$$\Delta k_0 = \frac{\omega \int_{S_1} [(\epsilon - 1) \dot{\mathbf{E}}_{\text{вн}} \dot{\mathbf{E}}_{\text{нi}}^* + (\mu - 1) \dot{\mathbf{H}}_{\text{вн}} \dot{\mathbf{H}}_{\text{нi}}^*] dS}{\int_S \{ [\dot{\mathbf{E}}_{\text{нi}}^* \dot{\mathbf{H}}_{\text{вн}}] + [\dot{\mathbf{E}}_{\text{вн}} \dot{\mathbf{H}}_{\text{нi}}^*] \} dS}. \quad (3-7-41)$$

С помощью выражений (3-7-40) и (3-7-41) можно рассчитать фазовращатели, представляющие собой отрезки волноводов с диэлектрическими пластинами (рис. 3-87) или стержнями. Учитывая зависимость параметров $\|\epsilon_{ik}\|$ и $\|\mu_{ik}\|$ плазмы и феррита от напряженности постоянного поля H_0 , можно производить расчет управляемых фазовращателей и других волноводных элементов с гиротропными неоднородностями (рис. 3-76—3-78).

3-8. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОКОЛО ЗЕМЛИ

Электромагнитное поле распространяется около Земли в виде земной и пространственной волн. Под земной волной подразумевается электромагнитное поле, возникающее в результате отражения и дифракции у земной поверхности; под пространственной волной — поле, возникающее в результате преломления и рассеяния в различных слоях атмосферы.

Количественно эти явления определяются электромагнитными параметрами Земли и атмосферы, а также частотой электромагнитного поля. Поэтому условия распространения электромагнитных волн различных диапазонов весьма различны. Электромаг-

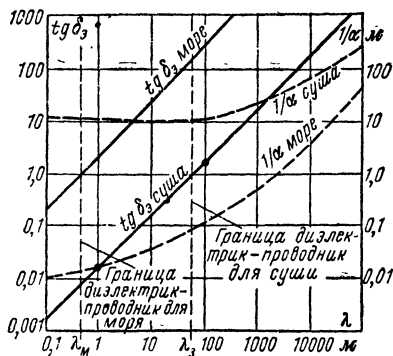


Рис. 3-88. Зависимость от длины волны тангенса угла потерь и глубины проникновения для морской поверхности ($\sigma=4$ сим/м, $\epsilon=80$) и сухой почвы ($\sigma=10^{-3}$ сим/м, $\epsilon=4$). Поверхность моря можно считать диэлектриком при $\lambda < \lambda_m$ и проводником при $\lambda > \lambda_m$. Поверхность суши можно считать диэлектриком при $\lambda < \lambda_z$ и проводником при $\lambda > \lambda_z$.

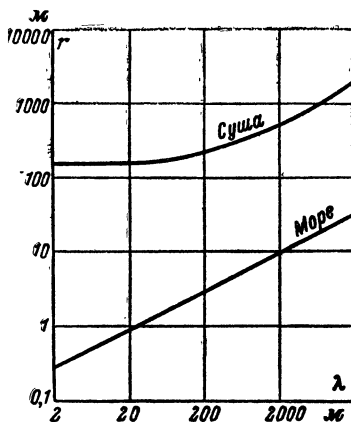


Рис. 3-89. Зависимости от длины волны расстояния, на котором напряженность поля убывает в 10^6 раз в морской воде и сухой почве.

нитные волны, используемые для электросигнализации и других практических целей, делят на следующие диапазоны (см. табл. П-1 в приложении):

- СДВ — сверхдлинные волны;
- ДВ — длинные волны;
- СВ — средние волны;
- КВ — короткие волны;
- УКВ — ультракороткие волны;
- Субмиллиметровые и более короткие волны.

Поле земной волны зависит от рельефа и электромагнитных параметров поверхности Земли. Зависимость от λ тангенса угла потерь $\operatorname{tg} \delta_3 = \sigma / \omega \epsilon_a$ и глубины проникновения электромагнитного поля [величина, обратная постоянной затухания α , определяемой по формуле (2-7-12)] для поверхности суши и моря иллюстрирует

рис. 3-88. Если $\sigma/\omega\epsilon_a > 1$, то согласно табл. 2-1 земную поверхность в электромагнитном смысле можно считать проводником; наоборот, при $\sigma/\omega\epsilon_a < 1$ ее можно считать диэлектриком. Подчеркнем, что одну и ту же поверхность можно рассматривать как «проводниковую» для относительно низких частот (более длинных волн) и как «диэлектрическую» при больших частотах (более коротких волнах). Из рис. 3-89 следует, что, более или менее значительное проникновение электромагнитного поля в глубь земной поверхности происходит лишь при СДВ и ДВ. Вследствие этого подземная и подводная радиосвязь осуществима лишь на СДВ и ДВ.

Расчет характеристик поля, возникающего в результате отражения от земной поверхности, без учета влияния атмосферы может быть сделан на основе схемы, приведенной на рис. 3-90. Поверхность Земли предполагается плоская, что допустимо для малых дистанций ($d \ll R_0$, где R_0 — радиус Земли), и $\lambda \ll h_1$ и h_2 ; последнее условие имеет место при наземной радиосвязи на УКВ и радиосвязи Земля — самолет на КВ. При этих условиях в приближении геометрической оптики напряженность поля в точке приема 2 можно считать суммарной напряженностью полей прямого луча r_1 и отраженного от поверхности Земли луча r_2 . Точка, в которой происходит отражение, находится у пересечения поверхности Земли линией $I'-2$; при этом точка I' является зеркальным отображением точки I , в которой расположен источник поля. Если диаграмма излучения в вертикальной плоскости в отсутствие Земли представляет окружность, то напряженность поля в точке 2 определяется выражением

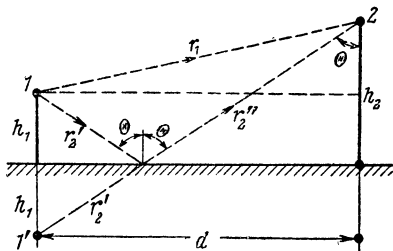


Рис. 3-90. К расчету поля при отражении от земной поверхности при $d \ll R_0$.

$$\dot{E} = E_{\text{пр}} + \dot{E}_{\text{отр}} = E_{\text{пр}} \left\{ 1 + \Gamma e^{i \left[\psi - \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right]} \right\}.$$

Отсюда модуль относительной величины напряженности суммарного поля в точке 2 определяется формулой

$$F = \left| \frac{\dot{E}}{E_{\text{пр}}} \right| = \sqrt{1 + 2\Gamma \cos \left[\psi - \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right] + \Gamma^2}, \quad (3-8-1)$$

где Γ , ψ — модуль и фаза коэффициента отражения [см. выражение (3-2-47)];

$$(r_2 - r_1) = \sqrt{d^2 + (h_2 + h_1)^2} - \sqrt{d^2 + (h_2 - h_1)^2}$$

— разность хода отраженного и прямого лучей.

На рис. 3-91, а даны диаграммы, показывающие зависимость коэффициента F от расстояния для моря и суши. Эти диаграммы составлены на основе выражения (3-8-1) с использованием (3-2-47) и данных, взятых из кривых на рис. 3-27.

Практически важным является также случай «малых» высот, когда $h_1, h_2 \ll d$. При этом

$$(r_2 - r_1) \approx \frac{2h_1 h_2}{d} \text{ и } \cos \theta = \frac{(h_2 + h_1)}{\sqrt{d^2 + (h_2 + h_1)^2}} \approx \frac{h_2 + h_1}{d} \ll 1.$$

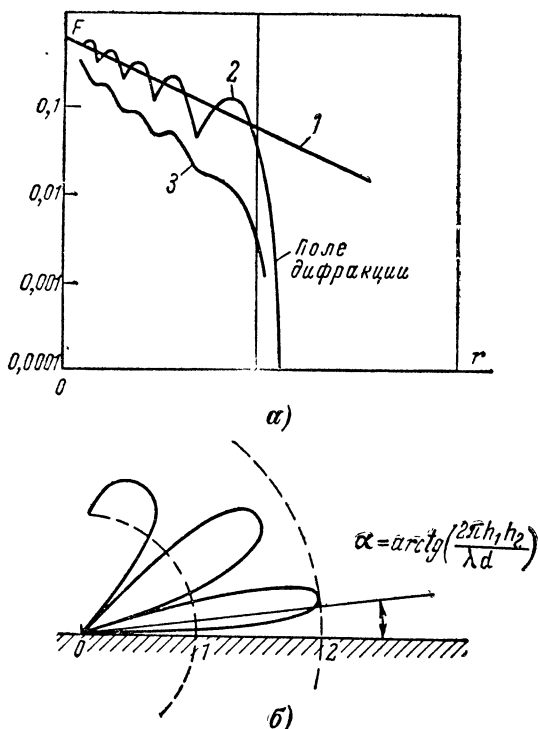


Рис. 3-91. Диаграммы поля при отражении от Земли.

а — случай «больших» высот, т. е. $h_1, h_2 \gg d$ (1 — поле в отсутствие влияния Земли; 2 — поле при отражении от водной поверхности; 3 — поле при отражении от суши); б — случай «малых» высот ($h_1, h_2 \ll d$).

Но при $\theta \rightarrow \pi/2$, как следует из выражения (3-2-47), $\Gamma_E = 1$ и $\psi_E = \pi$. При вертикальной поляризации из выражения (3-2-47а) имеем: $\Gamma_H = 1$ и $\psi_H = \pi$, если $Z_{02}/Z_{01} \leq 1$; последнее соотношение всегда имеет место при реальных параметрах земной поверхности и радиоволнах длиной более 1 см [см. замечание к формуле (3-2-26)]. В связи с этим формула (3-8-1) принимает вид:

$$F = 2 \sin\left(\frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda d}\right). \quad (3-8-2)$$

При $2\pi h_1 h_2 \ll \lambda d$

$$F \approx \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda d}. \quad (3-8-2a)$$

Из формулы (3-8-2) следует, что при наличии отражения от земной поверхности диаграмма излучения в вертикальной плоскости приобретает многолепестковую структуру (рис. 3-91, б); поле у поверхности Земли при этом отсутствует.

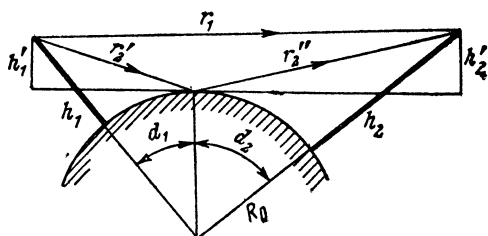


Рис. 3-92. К расчету поля при отражении от сферической поверхности.

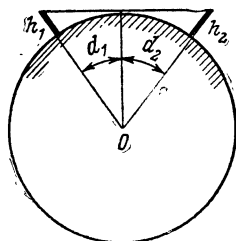


Рис. 3-93. К расчету дальности геометрического горизонта.

Формула (2-3-16) при введении в нее множителя (3-8-2a) приобретает квадратичную зависимость; в таком виде она известна как формула Б. А. Введенского. Действительно, полагая $d \approx r$, получим:

$$E_d = \frac{\sqrt{30 G P_0 \text{ из } \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda}}}{r^2}. \quad (3-8-3)$$

Формулы (3-8-1) — (3-8-3) называют также интерференционными формулами, поскольку они описывают сложение когерентных лучей в результате отражения от земной поверхности.

При учете сферической формы Земли в формулы (3-8-1) — (3-8-3) вместо реальных высот h_1 и h_2 следует подставлять приведенные высоты:

$$\left. \begin{aligned} h_1' &= h_1 - \frac{d_1^2}{2R_0}; \\ h_2' &= h_2 - \frac{d_2^2}{2R_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3-8-4)$$

Приведенные высоты представляют собой высоты передающей и приемной антенн над плоскостью, касательной к сферической поверхности земли (рис. 3-92).

Дальность геометрического горизонта $r = d_1 + d_2$ (рис. 3-93), т. е. дальность прямой видимости без учета рефракции в атмосфере можно вычислить, пользуясь формулами

$$\left. \begin{aligned} d_1 &\approx \sqrt{(R_0 + h_1)^2 - R_0^2} \approx 3,57 \sqrt{h_1 [\text{м}]} [\text{км}]; \\ d_2 &\approx 3,57 \sqrt{h_2 [\text{м}]} [\text{км}]. \end{aligned} \right\} \quad (3-8-5)$$

Здесь $R_0 = 6370$ км — радиус Земли и $h_1, h_2 \ll R_0$. Высоты h_1 и h_2 в эти формулы нужно подставлять в метрах.

Учитывая выражения (3-8-5), интерференционные формулы (3-8-1) — (3-8-3) практически применимы лишь для случаев $r \leq 0,7 r_{\text{макс}}$, где $r_{\text{макс}} = d_1 + d_2 \approx 3,57 (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})$.

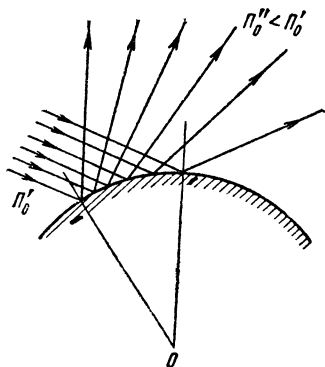


Рис. 3-94. Рассеяние поля от сферической поверхности Земли.

При отражении от сферической и шероховатой поверхностей плотность потока мощности отраженного луча меньше, чем падающего (рис. 3-94). В некоторых практических случаях это приходится учитывать подстановкой соответствующего значения коэффициента отражения в формулу (3-8-1).

При больших расстояниях и если положенное в основу вывода формулы (3-8-1) условие $\lambda \ll h_1, h_2$ не удовлетворяется (практически это всегда имеет место при наземной радиосвязи на ДВ и СВ), то поле земной волны представляет собой поле дифракции на сферической поверхности, обладающей потерями.

В общем случае можно рассматривать три области земной поверхности (рис. 3-95), параметры которых различным образом влияют на процесс радиосвязи между двумя наземными пунктами: 1) область возбуждения поля, в центре которой находится передающая антенна; 2) область радиоприема, в центре которой находится приемная антенна и 3) промежуточная область — область распространения поля. Электромагнитные параметры первой и второй обла-



Рис. 3-95. К расчету поля дифракции на поверхности Земли.

стей влияют на величину сопротивления излучения соответствующих антенн и, следовательно, в большей степени определяют мощность сигнала на входе приемника. Параметры промежуточной области определяют затухание распространяющейся волны, однако их влияние на мощность принимаемого сигнала (при не очень больших расстояниях) меньше, чем параметров первой и второй областей. С уве-

личением расстояния между передающим и приемным пунктами влияние электромагнитных свойств земной поверхности промежуточной области на мощность принимаемого сигнала увеличивается.

В пределах промежуточной области электромагнитное поле приближенно описывается выражениями (3-2-29a) и (3-2-31), т. е. поле, распространяющееся около земной поверхности, является поверхностной волной, а поле, распространяющееся в Земле, — однородной волной с амплитудой, быстро убывающей вглубь. Из этих выражений также следует, что *на поверхности раздела отношение горизонтальных составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} равно волновому сопротивлению $|Z_{02}|$ поверхностного слоя Земли.* Фронт волны, распространяющейся около земной поверхности, имеет наклон, т. е., как следует из выражения (3-2-28) и как видно из рис. 3-19, угол $\theta_p < \pi/2$; при этом согласно выражению (3-2-30) *скорость распространения электромагнитной волны около земной поверхности меньше скорости в вакууме.* Из выражения (3-2-31) следует, что около земной поверхности поле имеет эллиптическую поляризацию (см. рис. 3-21). Учитывая, что при этом $E_{3(1)} > E_{2(1)}$ и $E_{3(2)} < E_{2(2)}$, наземная приемная антенна для лучшего радиоприема должна иметь большой вертикальный размер, тогда, как подземная антенна — большой горизонтальный размер. Максимальный сигнал на входе радиоприемника будет в том случае, если горизонтальная часть антенны направлена на источник поля.

Задача о дифракции электромагнитных волн на поверхности Земли к настоящему времени наиболее полно решена академиком В. А. Фоком. На основании этого решения напряженность электрического поля в месте приема

$$E_d = E_d^{(u)} F_o, \quad (3-8-6)$$

где согласно выражению (2-3-16)

$$E_d^{(u)} = \frac{\sqrt{30 GP_0 \text{ из}}}{r}$$

— поле того же источника для случая плоской идеальнопроводящей земной поверхности; F_o — множитель ослабления, обусловленный дифракцией и загуханием электромагнитных волн, распространяющихся у земной поверхности.

Если передающая и приемная антенны расположены непосредственно у поверхности Земли, то коэффициент ослабления в области глубокой тени определяется формулой

$$F_o = 2 \sqrt{\pi x} \left| \frac{e^{ixp}}{p + q^2} \right|, \quad (3-8-7)$$

в которой

$$x = \frac{r}{R_0} \left(\frac{\pi R_0}{\lambda} \right)^{1/3};$$

$$p = (2,34 \div 1,02) e^{i \frac{2\pi}{3}};$$

$$q^2 = \frac{\left(\frac{\pi R_0}{\lambda} \right)^{2/3}}{\varepsilon (\operatorname{tg} \delta - 1)}.$$

Эта формула содержит экспоненциальный множитель

$$F_0 \sim e^{-a \left(\frac{R_0}{\lambda} \right)^{1/3}}, \quad (3-8-7a)$$

характеризующий быстрое убывание поля при укорочении длины волны.

На практике для определения напряженности поля в месте приема на различных расстояниях пользуются графиками, пример которых приведен на рис. 3-96; на этом рисунке по оси ординат отложены значения напряженности электрического поля E [мкв/м] при мощности излучения 1 кВт вертикальным проводом, у которого в направлении горизонта $G_0=3$. Напряженность поля при других значениях мощности P_0 и коэффициента направленного действия G_0 вычисляются по формуле

$$E_{д1} = E_d \sqrt{\frac{G_{01} P_{0 \text{ из } 1}}{3000}}. \quad (3-8-8)$$

Если земная поверхность между пунктом излучения и пунктом приема в электромагнитном смысле неоднородна, причем $\text{etg} \delta_0 < 1$,

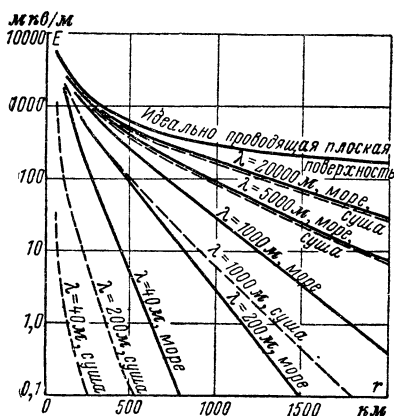


Рис. 3-96. Напряженность электрического поля у земной поверхности при мощности излучения 1 кВт вертикальным проводом с к. н. д., равным 3.

Электрические параметры моря: $\epsilon \approx 80$, $\sigma \approx 4$ сим/м, параметры суши: $\epsilon=4$, $\sigma=10^{-3}$ сим/м.

то множитель ослабления определяется как среднее геометрическое из его значений для различных участков трассы. Зависимость напряженности поля от расстояния для случая распространения волны длиной 200 м над неоднородной поверхностью (суша — море) представлена на рис. 3-97. Из этого рисунка видно, что напряженность поля у приемной антенны больше, если она расположена на хорошо проводящей поверхности. На рис. 3-98 показана зависимость коэффициента ослабления от отношения протяженности трассы над сушей ко всей длине трассы для случая — море — суша — море (передающая и приемная антенны находятся на морской поверхности, разделенной сушей) и случая суша — море — суша (антенны находятся на суше, разделенной морской поверхностью).

В первом случае мощность сигнала на входе приемника будет значительно больше, чем во втором. Это является подтверждением того, что хорошо проводящая поверхность около антенны увеличивает ее сопротивление излучения.

Так как фазовая скорость распространяющейся около земной поверхности электромагнитной волны согласно выражению (3-2-30)

зависит от параметров поверхности, то неоднородная поверхность Земли может вызывать ошибки при радиопередаче сигналов времени и при радиопеленговании. Ошибку при пеленговании вызывает, в частности, «береговая рефракция». Сущность этого явления заключа-

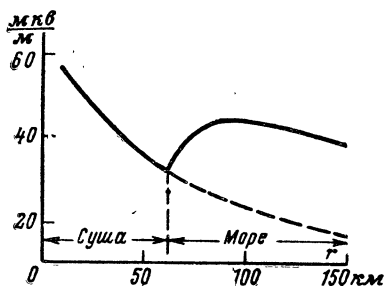


Рис. 3-97. Распределение напряженности поля вдоль трассы суша — море при мощности излучения 1 квт и длине волны 200 м. Для суши $\sigma = 4 \times 10^{-4}$ сим/м, для моря $\sigma = 4$ сим/м.

ется в следующем. Если между пунктами излучения и радиоприема проходит береговая линия (рис. 3-99), нормаль к которой составляет угол с направлением трассы $\theta < 90^\circ$, то из-за изменения фазовой скорости волны при переходе с одной поверхности на другую фазовый фронт волны поворачивается на угол $\Delta\varphi$. Это явление наблюдается при небольшом удалении от береговой линии ($r_2 < r_1$). Максимальный угол поворота фазового фронта может достигать в диапазоне ДВ нескольких градусов.

Рельеф земной поверхности, а также высокие искусственные сооружения увеличивают напряженность поля земной волны в области «тени», создаваемой сферической формой Земли (рис. 3-100). Это яв-

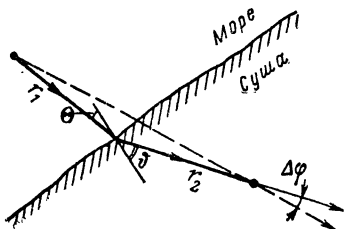


Рис. 3-99. К расчету «береговой» рефракции.

$\Delta\varphi$ — угол рефракции.

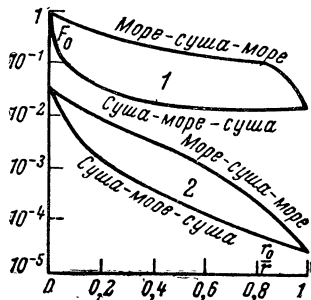


Рис. 3-98. Изменение множителя ослабления F_0 вдоль неоднородной трассы при $\lambda = 300$ м.

По оси абсцисс отложено отношение протяженности суши ко всей длине трассы. 1 — кривые для «небольших» трасс (поверхность Земли можно считать плоской); 2 — кривые для «больших» трасс (поверхность земли рассматривается как сферическая)

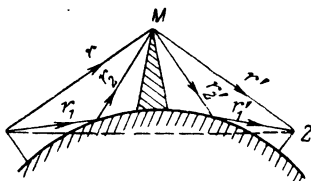


Рис. 3-100. Распространение электромагнитного поля при наличии клиновидного препятствия.

ление, называемое усилением за счет препятствий, особенно заметно в диапазонах КВ и УКВ, где множитель ослабления (3-8-7а) особенно мал ввиду малости λ/R_0 . По этой причине напряженность поля дифракции на рельефе земной поверхности и искусственных сооружениях на этих волнах может оказаться больше на-

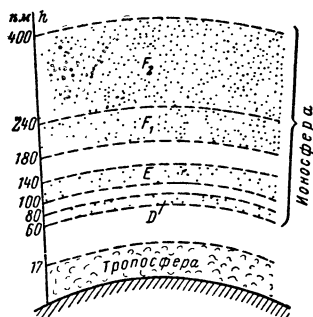


Рис. 3-101. Схема строения земной атмосферы.

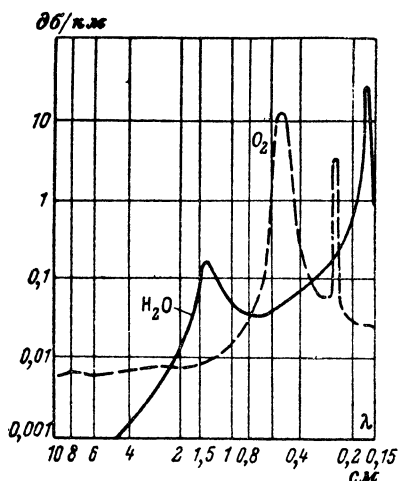


Рис. 3-102. Поглощение электромагнитных волн в кислороде и водяных парах атмосферы.

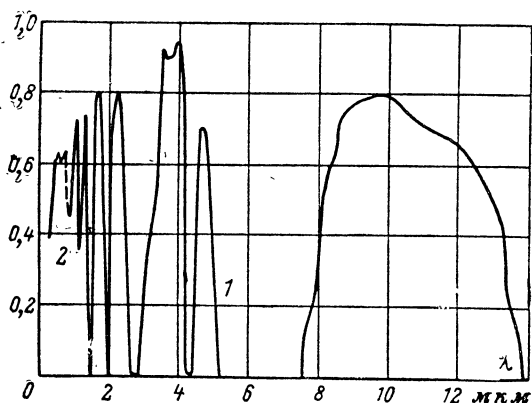


Рис. 3-103. Зависимость коэффициента пропускания электромагнитных волн слоем атмосферы толщиной около 1800 м от длины волны.

пряженности поля, определяемой множителем ослабления [см. формулу (3-8-7а)]. При коэффициенте отражения от земной поверхности, равном единице, и при соответствующих длинах прямых лучей r , r'

и длинах отраженных лучей $r_1 + r_2$ и $r'_1 + r'_2$ напряженность поля в точке 2 (рис. 3-100) может быть в 4 раза больше, чем в отсутствии препятствия.

Поле пространственной волны определяется параметрами земной атмосферы. В связи с тем что физические свойства последней сильно зависят от высоты, земная атмосфера делится на тропосферу, стратосферу и ионосферу (рис. 3-101).

Тропосфера содержит $4/5$ всей массы воздуха земной атмосферы. В этой области сосредоточены гидрометеоры: облака и другие образования из водяных паров. В тропосфере происходит заметное поглощение энергии электромагнитного поля сверхвысокой частоты. На рис. 3-102—3-104 приведены кривые, характеризующие это поглощение. Поле в месте приема с учетом этого поглощения на основании выражений (2-3-16) определяется следующими формулами (если пренебречь влиянием земной поверхности):

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \frac{GP_0 \text{ из}}{4\pi r^2} e^{-\frac{\partial \delta / \kappa \text{ м}}{10} r} ; \\ E_d &= \frac{\sqrt{30 GP_0 \text{ из}}}{r} e^{-\frac{\partial \delta / \kappa \text{ м}}{20} r} \end{aligned} \right\} \quad (3-8-9)$$

На рис. 3-102 видно, что имеются максимумы поглощения, вызванные резонансным поглощением в водяных парах на $\lambda \approx 1,3$ см, в кислороде на $\lambda \approx 0,5$ см и на других волнах. Очевидно, что эти волны непригодны для радиосвязи и радиолокации на больших расстояниях в нижних слоях атмосферы.

Кроме поглощения, в тропосфере имеет место рассеяние электромагнитной энергии на гидрометеорах. Эквивалентную отражающую площадь [см. выражение (2-6-20)] облучаемого объема облаков, дождей и других гидрометесров можно определить по формуле

$$\sigma_{\alpha} \approx \alpha^2 r^2 \frac{c\tau}{2} N_0 \sigma_{\text{ц}}, \quad (3-8-10)$$

где α — угловая ширина радиолуча;

τ — длительность радиолокационного импульса;

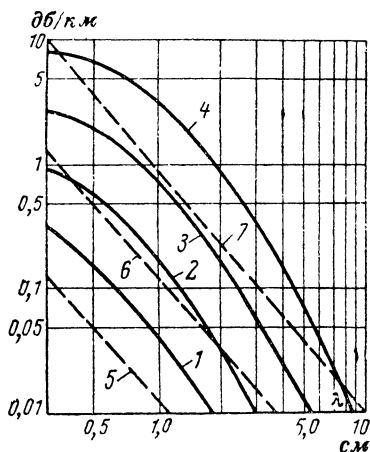


Рис. 3-104. Поглощение электромагнитного поля в различных метеорологических условиях.

1 — дождь морсящий (0,25 мм/ч); 2 — то же слабый (1,0 мм/ч); 3 — то же умеренный (4,0 мм/ч); 4 — то же проливной (16 мм/ч); 5 — туман 0,032 г/м³; 6 — то же 0,32 г/м³; 7 — то же 2,3 г/м³.

r — расстояние до гидрометеора;
 N_0 — число капель в m^3 ;
 $\sigma_{ц0}$ — эквивалентная отражающая площадь одной капли, определяемая по формуле (3-1-15в).

Наблюдаемое в диапазоне сантиметровых волн отражение от дождевых облаков является существенной помехой при радиолокации воздушных целей; вместе с тем это явление используется для метеорологических наблюдений.

Тропосфера является неоднородной средой в смысле диэлектрической проницаемости. Величина последней определяется плотностью

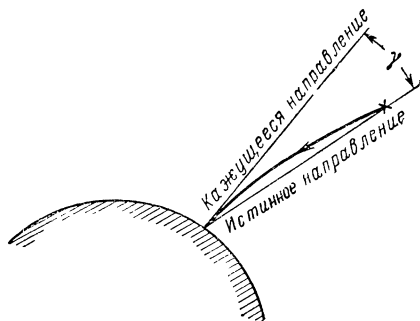


Рис. 3-105. Рефракция в атмосфере.

γ — угловая ошибка рефракции

атмосферы и присутствием водяных паров; у поверхности земли $\epsilon \approx (1 + 6,5 \cdot 10^{-8})$ и изменяется с высотой. В результате этого возникает рефракция. При нормальном состоянии тропосферы диэлектрическая проницаемость ее уменьшается с высотой. Вследствие этого скорость распространения электромагнитных волн в верхних слоях тропосферы больше, чем в нижних. В результате этого кривизна рефракции совпадает по знаку с кривизной Земли. При этом кажущееся направление распространения электромагнитной волны отличается от истинного направления на угол γ (рис. 3-105).

Нормальным градиентом коэффициента преломления n в тропосфере называется величина

$$\frac{\partial \sqrt{\epsilon}}{\partial h} = \frac{\partial n}{\partial h} = -4 \cdot 10^{-8} [m^{-1}]. \quad (3-8-11)$$

Она соответствует нормальной тропосфере, за которую принимают самый нижний слой атмосферы высотой 11 км, считая влажность постоянной и равной 60%, с давлением и температурой у поверхности Земли 1013 мбар и 15°С, которые равномерно убывают с уменьшением высоты соответственно на —0,012 мбар/м и —0,0055 град/м. Среднее состояние реальной тропосферы соответствует этим характеристикам.

Количественно явление рефракции в тропосфере при малых углах к горизонту характеризует формула

$$1/\rho \approx - \frac{\partial n}{\partial h}, \quad (3-8-12)$$

где ρ — радиус кривизны рефракции.
Эта формула выводится из очевидных соотношений

$$\rho d\theta = \frac{dh}{\cos(\theta + d\theta)};$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin(\theta + d\theta)} = \frac{n + dn}{n},$$

если принять структуру тропосферы горизонтально слоистой (рис. 3-106). Из формул (3-8-11) и (3-8-12) следует, что радиус кривизны нормальной рефракции $\rho \approx 25\,000$ км.

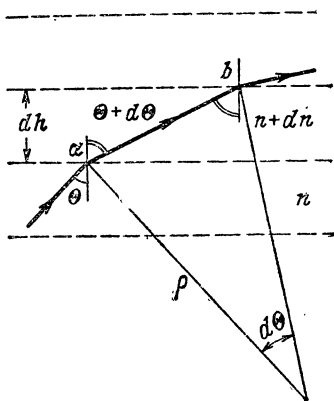


Рис. 3-106. К определению радиуса кривизны рефракции.

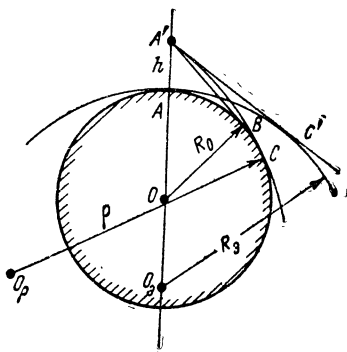


Рис. 3-107. К определению дальности радиогоризонта.

Отметим, что ϵ воздуха в общем случае зависит от частоты электромагнитного поля; однако зависимость эта практически сказывается лишь при $\lambda \leq 3 \cdot 10^{-3}$ мм (инфракрасные и более короткие волны). При частотах, соответствующих этим волнам, молекулы воздуха не успевают изменять свою ориентацию под действием электромагнитного поля. Вследствие этого при таких частотах показатель преломления атмосферы меньше, а радиус кривизны нормальной рефракции приблизительно в 2 раза больше, т. е. $\rho \approx 50\,000$ км. Рефракция, определяемая углом между истинным и кажущимся направлениями (рис. 3-105), в оптическом диапазоне равна $\gamma \approx 1'$ под углом 45° к горизонту и $\gamma \approx 30'$ — под углом 0° к горизонту. Рефракция в диапазоне УКВ под углом 0° к горизонту может достигать $\gamma \approx 50'$.

Дальность радиогоризонта и оптического горизонта, т. е. дальность «прямой» видимости с учетом рефракции в тропосфере (рис. 3-107), вычисляется при замене в формуле (3-8-5) реального радиуса Земли эквивалентным радиусом $R_{0\epsilon}$. При этом реальная криволинейная траектория $A'C$ с радиусом ρ заменяется равновеликой

траекторией с бесконечно большим радиусом, т.е. прямолинейной траекторией $A'C'$. Эквивалентный радиус Земли может быть определен из соотношения ($R_{0э} \rightarrow R_э$).

$$\frac{1}{R_0} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_{0э}} - \frac{1}{\infty}.$$

Учитывая выражение (3-8-12), находим:

$$R_{0э} = R_0 \frac{1}{1 + R_0 \frac{\partial n}{\partial h}}. \quad (3-8-13)$$

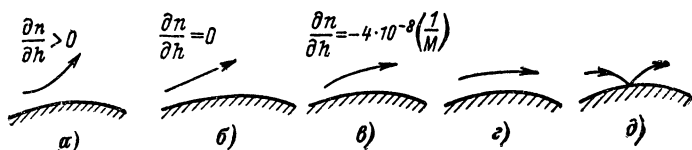


Рис. 3-108. Различные виды рефракции.

a — отрицательная; b — нулевая; v — нормальная; z — критическая $\frac{\partial n}{\partial h} = -16 \cdot 10^{-8} \left(\frac{1}{M} \right)$; d — сверхрефракция $\frac{\partial n}{\partial h} < -16 \cdot 10^{-8} \left(\frac{1}{M} \right)$.

При нормальной рефракции для волн длиннее $3 \cdot 10^{-3}$ мм

$$R_{0э} \approx \frac{4}{3} R_0 \quad (3-8-13a)$$

и для волн короче $3 \cdot 10^{-3}$ мм

$$R_{0э} \approx 1,15 R_0. \quad (3-8-13b)$$

Следовательно, дальность радиогоризонта

$$d \approx 3,57 \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{h [м]} \approx 4,12 \sqrt{h [м]} [км] \quad (3-8-14)$$

и дальность оптического горизонта (для инфракрасных и более коротких волн)

$$d \approx 3,8 \sqrt{h [м]} [км]. \quad (3-8-14a)$$

В отличие от нормальной рефракции в самых нижних слоях тропосферы (на высотах менее 200 м) вследствие температурной инверсии, т.е. изменения величины и знака градиента температуры $\partial\theta/\partial h$, может возникать аномальная рефракция; она отличается как знаком кривизны, так и величиной радиуса рефракции. На рис. 3-108 показаны различные возможные виды такой рефракции. При сверхрефракции распространение УКВ около поверхности Земли происходит подобно распространению в диэлектрическом волноводе. Однако вследствие неустойчивости метеоявлений такое распространение сопровождается регулярными и спорадическими из-

менениями напряженности поля в пункте приема («замираниями»).

Помимо убывания ϵ с высотой, в тропосфере имеются обусловленные турбулентностью атмосферы локализованные области, в которых величина ϵ отличается от среднего значения в окружающем пространстве; на таких областях могут рассеиваться электромагнитные волны дециметрового и сантиметрового диапазонов.

Хаотические флуктуации коэффициента преломления в тропосфере вызывают хаотическое изменение амплитуды и фазы поля в оптическом диапазоне. Это приводит, в частности, к неустойчивости сигналов и является причиной мерцания звезд.

В стратосфере и ионосфере под действием солнечной и космической радиации земная атмосфера ионизируется. При этом имеются четыре слоя, называемые соответственно слоями D, E, F_1 и F_2 , которые характеризуются максимумами плотности ионизации (рис. 3-101 и 3-109).

Ионосфера и магнитное поле Земли подвержены регулярным и спорадическим изменениям, вызываемым активностью Солнца и космических лучей. В результате этих процессов напряженность поля распространяющейся в ионосфере пространственной волны изменяется; при этом в месте приема возникают кратковременные и длительные уменьшения напряженности поля («замирания», или иначе «фединг»). Кроме того, параметры ионосферы могут изменяться под действием электромагнитного поля мощных радиостанций («Горьковско-Люксембургский эффект», теоретически предсказанный М. А. Бонч-Бруевичем). Явление это вызывает помехи приему сигналов одних радиостанций со стороны других; такие помехи наблюдаются преимущественно при приеме на средних волнах со стороны мощных радиостанций длинноволнового диапазона.

Измерение высоты ионизированных слоев производится регулярно с помощью сети ионосферных станций, работающих на радиолокационном принципе. На основе этих наблюдений выдаются прогнозы прохождения коротких волн.

Как было показано в § 2-7, при распространении электромагнитной волны в ионизированной среде происходит отражение и поглощение энергии, причем относительная проницаемость ϵ и удельная проводимость σ среды оказываются зависимыми от частоты поля [см. формулу (2-7-37)]. Собственная частота ионизированной среды [см. выражение (2-7-36)]

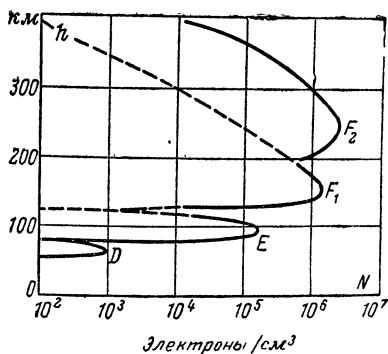


Рис. 3-109. Распределение плотности ионизации в земной атмосфере.

$$\omega_p = e \sqrt{\frac{n}{m\epsilon_0}}$$

определяется плотностью ионизации. Так как плотность ионизации атмосферы изменяется с высотой, то электромагнитные волны различной длины отражаются и поглощаются на разных высотах; для каждого ионизированного слоя существует критическая частота, при которой $\epsilon=0$, и, следовательно, электромагнитное поле при нормальном падении данным слоем полностью отражается. Обращаясь к выражению (2-7-37) и полагая, что $v^2 \ll \omega^2$, поскольку в слоях с большой плотностью ионизации $v \approx 10^3 \div 10^4$, получаем нижеследующее условие полного отражения волны [см. формулу (2-7-40а)] при нормальном ее падении:

$$\frac{e^2 n}{\omega^2 m \epsilon_0} \geq 1$$

Подставляя сюда $e=1,6 \cdot 10^{-19}$ к и $m=9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, получаем формулы, определяющие критическую частоту и критическую длину волны:

$$\left. \begin{aligned} f_{кр} &\approx 9\,000 \sqrt{n} \text{ [Гц];} \\ \lambda_{кр} &\approx \frac{10^5}{3 \sqrt{n}} \text{ [м].} \end{aligned} \right\} \quad (3-8-15)$$

Здесь n — число электронов в 1 см^3 .

Таким образом, через слой с данной плотностью ионизации не могут проникать электромагнитные волны длиннее $\lambda_{кр}$. При плотности ионизации $n=2 \cdot 10^6$ электронов/см³, наблюдаемой в слое F_2 , критические значения равны:

$$\left. \begin{aligned} f_{кр} &\approx 13 \text{ МГц;} \\ \lambda_{кр} &\approx 25 \text{ м.} \end{aligned} \right\} \quad (3-8-15a)$$

При наклонном падении волны, в частности при излучении вдоль горизонта (рис. 3-110), угол $\theta_{кр}$, при котором будет иметь место полное отражение, определяется выражением

$$\sin \theta_{кр} = \frac{R_0}{R_0 + h}.$$

С другой стороны, в данном случае согласно выражению (3-2-39)

$$\sin \theta_{кр} = \frac{1}{n_{1,2}} = \sqrt{\epsilon}.$$

Подставляя сюда ϵ из выражения (2-7-37) и используя формулы (3-8-15), получаем формулу для предельной частоты электромагнитного поля, при которой будет иметь место полное отражение

$$f_{пр} \approx f_{кр} \sqrt{\frac{R_0}{2h} + 1} \approx f_{кр} \sqrt{\frac{R_0}{2h}}. \quad (3-8-16)$$

При той же плотности ионизации $n=2 \cdot 10^6$ электронов/см³ и при $h \approx 200$ км предельная частота $f_{пр} \approx 4,1$ $f_{кр} = 54$ МГц.

Из приведенных расчетов следует, что надежная радиосвязь Земля — Космос по всем радиусам полусферы осуществима лишь на частотах выше 54 МГц (на волнах короче 5,5 м).

Границы слоев с максимумами плотности ионизации (рис. 3-109) расплывчатые. Поэтому траектория электромагнитного луча является плавной, и он может возвращаться к поверхности Земли (рис. 3-111). Если пространственная волна претерпевает многократные отражения от ионизированных слоев и от поверхности Земли (рис. 3-113), можно считать, что ее распространение аналогично распространению электромагнитной волны в металлическом волноводе.

На больших высотах под действием метеоритов в ионизированных слоях возникают локализованные области с более высокой плотностью ионизации; на таких областях могут рассеиваться электромагнитные волны метрового диапазона.

Согласно выражению (2-7-37) относительная диэлектрическая проницаемость ионосферы меньше единицы и зависит от плотности ионизации и частоты поля. Поэтому фазовая скорость в ионосфере больше, чем в вакууме, и обладает дисперсией. Вследствие этого прохождение сигнала в ионизированной атмосфере сопровождается искажениями, различными в разных слоях.

До сих пор мы полагали, что ионосфера является неоднородной, но изотропной средой. В действительности же под влиянием магнитного поля Земли ионизированная атмосфера является анизотропной средой с комплексной диэлектрической проницаемостью, определяемой выражениями (2-9-31) — (2-9-33). Распространение в такой среде плоской однородной электромагнитной волны, как показано в § 2-9, сопровождается вращением плоскости поляризации и двойным лучепреломлением. Если вектор магнитного поля Земли \mathbf{H}_0 совпадает с направлением распространения волны, то на основании выражения (2-9-34) плоскость поляризации поля в ионосфере поворачивается на угол

$$\vartheta = 2\pi \frac{r}{\lambda} (\sqrt{\varepsilon + \varepsilon_a} - \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_a}). \quad (3-8-17)$$

Когда вектор \mathbf{H}_0 совпадает с направлением вектора \mathbf{E} плоской однородной линейно поляризованной волны, то последняя разделяется

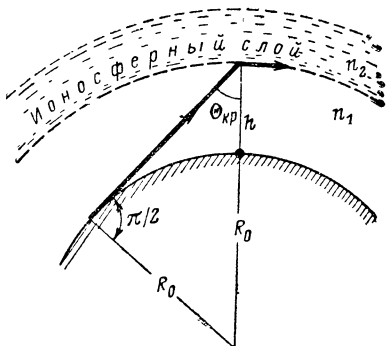


Рис. 3-110. Отражение электромагнитной волны от ионосферного слоя при излучении вдоль горизонта.

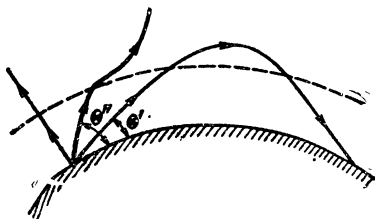


Рис. 3-111. Преломление электромагнитных волн в ионосфере в зависимости от вертикального угла (угла места).

на «обыкновенную» волну, которая на основании формулы (2-9-35) имеет характеристики

$$\left. \begin{aligned} v_{\phi} &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_3}}; \\ Z_0 &= \frac{120 \pi}{\sqrt{\epsilon_3}}, \end{aligned} \right\} \quad (3-8-18)$$

и на «необыкновенную» волну, обладающую на основании формулы (2-9-36) характеристиками

$$\left. \begin{aligned} v_{\phi} &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{эф}}}}; \\ Z_0 &= \frac{120 \pi}{\sqrt{\epsilon_{\text{эф}}}}. \end{aligned} \right\} \quad (3-8-19)$$

В последних формулах согласно (2-9-37) $\epsilon_{\text{эф}} = \frac{\epsilon^2 - \epsilon_a^2}{\epsilon}$. При выходе

из ионизированной анизотропной атмосферы обе волны, отличаясь по фазе, образуют волну с эллиптической поляризацией.

Из выражения (2-9-33) следует, что при $\omega > \omega_H$ диэлектрическая проницаемость ионосферы от магнитного поля Земли H_0 не зависит. При наибольшем значении $H_0 \approx 0,5$ а/см имеем $f \approx 2 \cdot 10^6$ гц. Это означает, что при частотах $f \gg 2 \cdot 10^6$ гц и соответствующих им волнах $\lambda < 170$ м магнитное поле Земли на распространение УКВ практически не влияет.

Субмиллиметровые и более короткие волны распространяются практически в виде пространственной волны, претерпевая небольшое рассеяние и сравнительно большое поглощение в тропосфере. При распространении на большие расстояния в нижних слоях атмосферы амплитуда и фаза напряженности поля в месте приема хаотически флюктуируют.

Расчет дальности радиосвязи и радиолокации на волнах этого диапазона может производиться по формулам (2-6-18) и (2-6-20) с учетом поглощения [см. формулу (3-8-9)].

Ультракороткие волны (УКВ) распространяются главным образом в виде пространственной волны; земная волна может быть использована для целей радиосвязи лишь при высотах антенн $h_1, h_2 \gg \lambda$.

Волны этого диапазона проходят через ионизированные слои атмосферы практически без преломления и без затухания. Они не проникают только через сильно ионизированную плазму, образующуюся, например, около ракеты, быстро движущейся в земной атмосфере; плотность ионизации при этом достигает таких значений, при которых критическая длина волны, определяемая выражением (3-8-15), лежит в диапазоне субмиллиметровых волн.

УКВ могут распространяться далеко за горизонт: метровые за счет рассеяния на областях с повышенной плотностью ионизации в ионосфере, а дециметровые и сантиметровые — за счет рассеяния на неоднородностях в тропосфере. Эти явления могут использоваться

в сверхдальней радиосвязи на УКВ (рис. 3-112). «Пересечение» диаграмм направленности передающей и приемной антенн происходит в области, рассеивающей поле УКВ, в результате чего часть энергии поля излучения поступает в приемник. Однако, несмотря на указанные явления и волноводное распространение волн в тропосфере, радиосвязь на УКВ вокруг земного шара в естественных условиях без активной ретрансляции не осуществима.

Дальность радиосвязи и радиолокации на УКВ рассчитывают по формулам (2-6-18), (2-6-21). Если диаграмма излучения антенн, рас-

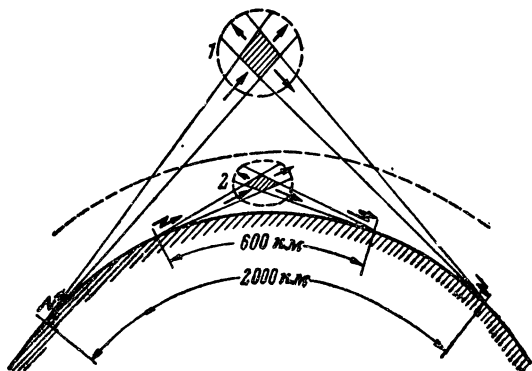


Рис. 3-112. Схема сверхдальней радиосвязи на УКВ.

1 — неоднородность в ионосфере, рассеивающая метровые волны; 2 — неоднородности в тропосфере, рассеивающая дециметровые волны.

считанная без учета влияния Земли, пересекает земную поверхность, то в эти формулы должен вводиться коэффициент F , определяемый выражениями (3-8-1) — (3-8-2а) с учетом нормальной рефракции. При сантиметровых волнах следует также учитывать поглощение в тропосфере и поле в месте приема определять с учетом выражений (3-8-9). Разумеется, максимальная дальность радиосвязи около Земли ограничивается дальностью радиогоризонта и оптического горизонта, которая на основании выражений (3-8-14) и (3-8-14а) определяется формулой

$$r_{\text{макс}} \leq (d_1 + d_2) \approx (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \begin{cases} 4,12 \\ 3,80 \end{cases} \quad (3-8-20)$$

в которой h_1, h_2 надо подставлять в метрах, а $r_{\text{макс}}$ при этом получится в километрах

Короткие волны (КВ) распространяются на большие расстояния в виде пространственной волны. Не претерпевая большого поглощения при распространении в нижних слоях ионосферы D, E и F₁, волны этого диапазона многократно отражаются слоем F₂ и поверхностью Земли; в результате этого возможна радиопередача сигналов до антипода и кругосветное эхо. Последнее явление заключается

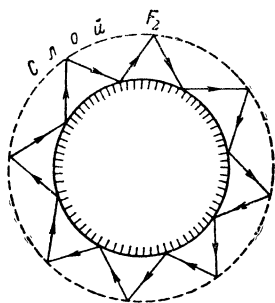


Рис. 3-113. Распространение коротких волн вокруг Земли.

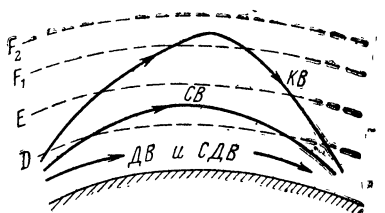


Рис. 3-115. Распространение радио-волн диапазонов СДВ, ДВ, СВ и КВ.

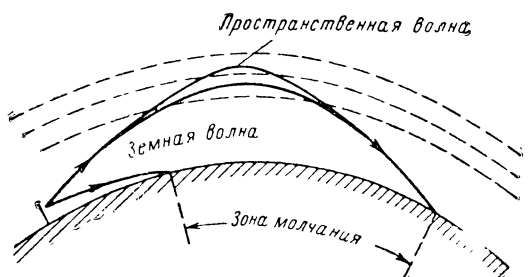


рис. 3-114. Образование зоны молчания при распространении коротких волн.

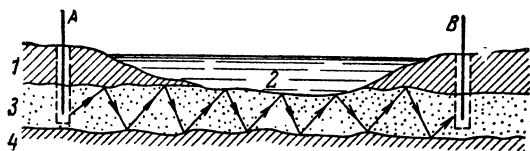


Рис. 3-116. Схема подземного волноводного распространения СДВ.

1, 2 — поверхностный слой с большой проводимостью;
3 — подземный слой с малой проводимостью; 4 — глубокие
слои с большой проводимостью.

в том, что радиосигнал обегает вокруг Земли (рис. 3-113), иногда многократно. Волны длиной 50—100 м, называемые «ночными», распространяются лучше ночью потому, что в это время суток вследствие уменьшения плотности ионизации слоев D и E уменьшается в этих слоях поглощение энергии поля при частотах, соответствующих волнам 50—100 м. Волны длиной 10—50 м, называемые «дневными», лучше проходят днем, чем ночью, за счет отражения от слоев F₁ и F₂.

Земная волна в диапазоне КВ сравнительно быстро затухает, ввиду чего дальность распространения КВ у поверхности Земли практически ограничивается дистанцией менее 100 км. Это явление приводит к образованию зон молчания (рис. 3-114).

Расчет радиосвязи на КВ производится по полуэмпирическим формулам и картам прохождения соответствующих длин волн в зависимости от географии местности, суток и времени года.

Средние волны (СВ) заметно поглощаются в слое D, а в ночное время, когда этот случай почти исчезает, отражаются слоем E. Вследствие этого в дневное время СВ распространяются в виде земной волны на сравнительно небольшие (менее 1 000 км), а ночью в виде пространственной волны на значительные расстояния (более 2 000 км).

Расчет дальности радиосвязи на средних волнах для дневного времени производят на основе формулы (2-6-18) с учетом выражений (3-8-6)—(3-8-8); при этом пользуются графиками Международного консультативного комитета по радиосвязи. Пример такого графика дан на рис. 3-96. Дальность радиосвязи в ночные часы рассчитывают по полуэмпирическим формулам и картам прохождения радиоволн.

Длинные и сверхдлинные волны (ДВ и СДВ) распространяются в виде земной волны, вызываемой дифракцией, и в виде пространственной волны, движущейся в волноводе, образованном поверхностью Земли и слоем D (рис. 3-115). На расстояниях свыше 2 000 км преобладает поле пространственной волны.

Расчет радиосвязи на ДВ и СДВ производится по тем же графикам, что и на СВ, а с учетом поля пространственной волны — по полуэмпирическим формулам.

Заметим, что условия распространения ДВ и СДВ мало зависят от состояния ионосферы; поэтому радиосвязь на этих волнах более устойчива, чем на СВ и КВ. При больших мощностях радиопередатчиков и при антеннах больших размеров на ДВ и СВ возможна связь на расстояния 10 000 км и больше.

СДВ могут распространяться без сравнительно большого поглощения в верхних слоях земной коры, обладающих малой проводимостью. Рисунок 3-116 иллюстрирует «волноводное» подземное распространение СДВ.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

СТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

4-1. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Поле, называемое электростатическим, создается неподвижными зарядами. Строго говоря, статических полей не существует, так как элементарные заряды находятся в тепловом движении. Однако длины пробега элементарных частиц по сравнению с линейными размерами изучаемых областей малы, и поэтому можно считать, что среднее значение напряженности магнитного поля, создаваемого хаотически движущимися элементарными зарядами, равно нулю.

Создающие электростатические поля статические заряды обычно сосредоточены на проводниках и на диэлектриках. Это могут быть: а) заряды избыточные, т. е. приданные данному телу извне (рис. 4-1); при этом создается заряженный проводник или заряженный диэлектрик, несущий заряд $|q| > 0$; б) заряды, индуцированные внешним полем, в которое внесено данное тело (рис. 4-2); в этом случае создается соответственно поляризованный проводник или поляризованный диэлектрик, причем его заряд $|q| = 0$.

Так как в проводниках всегда есть свободные электроны, то в процессе установления статических зарядов в проводящем теле возникает ток. Течет он до тех пор, пока напряженность электрического поля внутри проводника станет равной нулю, а заряды распределятся по поверхности проводника, создавая в окружающем его пространстве электростатическое поле. Условие

$$\mathbf{E} = 0 \quad (4-1-1)$$

внутри проводника соответствует отсутствию движения зарядов, т. е. условию электростатического поля.

Поверхностный слой проводника, в котором скапливается заряд, в пределах макроскопической электродинамики можно считать бесконечно тонким, поскольку он является слоем нескомпенсированных элементарных зарядов.

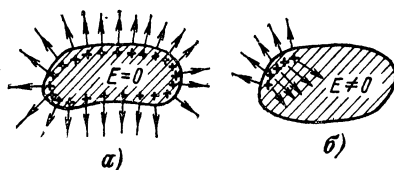


Рис. 4-1. Проводящее (а) и диэлектрическое (б) заряженные тела.

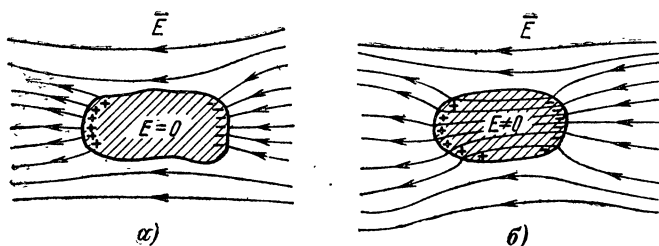


Рис. 4-2. Проводящее (а) и диэлектрическое (б) поляризованные тела.

Так как в диэлектриках электроны связаны внутри молекулярной структуры, то при установлении статических зарядов в диэлектрике происходит смещение электронов около равновесного состояния. Это смещение вызывает кратковременный ток, длящийся до завершения процесса установления статического поля вне и внутри диэлектрика. В отличие от проводника внутри диэлектрика

$$\mathbf{E} \neq 0. \quad (4-1-1a)$$

Согласно выражениям (1-4-15) и (1-1-3) электростатическое поле описывается уравнениями

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E} \quad (4-1-2)$$

и удовлетворяет граничным условиям (1-5-3), (1-5-6)

$$\left. \begin{aligned} D_{n(2)} - D_{n(1)} &= \kappa; \\ E_{\tau(2)} &= E_{\tau(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (4-1-2a)$$

Эти уравнения показывают, что в электростатическом поле электрические силовые линии не замкнуты и опираются своими концами на заряды.

Так как \mathbf{E} — сила, действующая на находящийся в данном поле единичный заряд, то при перемещении его вдоль пути $d\mathbf{l}$ работа сил поля равна:

$$dU = (\mathbf{E}d\mathbf{l}) = E_i dx_i.$$

При перемещении единичного заряда из точки поля M в точку поля M' полная работа

$$U = \int_M^{M'} E_i dx_i.$$

Так как согласно выражению (Д-3-9) $E_i dx_i = -\text{grad } \varphi dx_i = -d\varphi$, то

$$U = - \int_M^{M'} d\varphi = \varphi - \varphi'. \quad (4-1-3)$$

Здесь φ' — потенциал поля в точке M' и φ — в точке M ,

U — разность потенциалов этих точек, называемая электрическим напряением.

Во многих задачах, связанных с электростатическим полем зарядов, расположенных в конечной области пространства, потенциал бесконечно удаленной точки удобно принимать равным нулю. Тогда электростатический потенциал точки M

$$\varphi = U = \int_M^{\infty} \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad (4-1-3a)$$

т. е. он определяется работой на перемещение единичного заряда из данной точки в бесконечность.

В области, где существуют заряды, потенциал φ определяется согласно выражению (1-7-7) уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad (4-1-4)$$

решение которого согласно формуле (1-7-15) имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho}{r} dv. \quad (4-1-4a)$$

В области, где заряды отсутствуют, потенциал подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (4-1-5)$$

Общее решение этого уравнения в сферических координатах согласно формуле (Д-6-55б) имеет вид:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (C_{1n} r^n + C_{2n} r^{-(n+1)}) P_n^m(\cos \vartheta) \times \\ \times (A_{1m} \cos m\alpha + A_{2m} \sin m\alpha). \quad (4-1-5a)$$

Так как оператор Δ обозначает вторую производную по координатам пространства, то потенциал в пространстве, лишенном зарядов согласно формуле (4-1-5) максимумов и минимумов не имеет, а изменяется монотонно. Из уравнения (4-1-4) следует, что в месте расположения зарядов потенциал имеет минимум или максимум в зависимости от знака заряда.

При решении уравнений (4-1-4) и (4-1-5) постоянные интегрирования находят из удовлетворения граничным условиям, которые получаются из условий (4-1-2a) и сводятся к следующему:

а) при переходе через поверхность раздела двух сред потенциал остается непрерывным, т. е.

$$\varphi_{(1)} = \varphi_{(2)}; \quad (4-1-6)$$

в противном случае напряженность поля, определяемая производной потенциала по направлению, обращалась бы в бесконечность, что физически невозможно;

б) на границе двух диэлектриков

$$\left. \begin{aligned} -\epsilon_{a2} \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial n} + \epsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial n} &= \kappa, \\ \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial \tau}; \end{aligned} \right\} \quad (4-1-7)$$

в) на границе проводник — диэлектрик

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{a2} \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial n} &= -\kappa, \\ \frac{\partial \Phi_{(1)}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \Phi_{(2)}}{\partial \tau} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-1-8)$$

В среде, не содержащей зарядов, согласно формуле (4-1-2) электростатическое поле описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0; \\ \mathbf{D} &= \epsilon_a \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (4-1-9)$$

Уравнения электростатического поля можно написать и на основании уравнений монохроматического поля, если подставить в последние

$$T \rightarrow \infty \quad (4-1-10)$$

или

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad (4-1-10a)$$

т. е. представить электростатическое поле как частный случай монохроматического, описываемого выражением $E = E_m \cos(\omega t + \psi)$. Рассматривая это поле в момент времени, определяемый из условия

$$(\omega t + \psi) = k2\pi, \quad (4-1-11)$$

где k — целое число, можно принять напряженность электростатического поля равной амплитуде электрической составляющей монохроматического поля.

4-2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

Точечными называют заряды, линейные размеры которых исчезающе малы по сравнению с рассматриваемыми расстояниями.

Поле точечного заряда q (рис. 4-3) на основании (4-1-4a) и (4-1-2) описывается выражениями

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r}; \quad (4-2-1)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2}, \quad (4-2-2)$$

где \mathbf{e}_r — единичный вектор, определяющий направление радиуса вектора \mathbf{r} , проведенного от заряда к точке наблюдения M .

На основании принципа суперпозиции напряженность поля системы N точечных зарядов

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{e}_{ri}}{r_i^2}. \quad (4-2-3)$$

Поле электрического диполя (рис. 4-4) на основании равенства (4-2-1) определяется потенциалом

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Если $r \gg l$, $r_1 r_2 \approx r^2$ и $(r_2 - r_1) \approx l \cos \vartheta$, то

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{ql}{4\pi\epsilon_a r^2} \cos \vartheta = \\ &= \frac{\mathbf{e}_r \mathbf{p}_3}{4\pi\epsilon_a r^2}, \end{aligned} \quad (4-2-4)$$

где $\mathbf{p}_3 = ql$ — момент электрического диполя.

Напряженность поля диполя определяется в сферической системе координат согласно (Д-3-54) выражением

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = \frac{\mathbf{p}_3}{4\pi\epsilon_a r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos \vartheta + \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta). \quad (4-2-5)$$

Если в выражение (2-3-8) подставить согласно (4-1-11) $(\omega t - \beta r) = k \cdot 2\pi$ и на основании (2-3-7) $I_m l \sin(\omega t - \beta r)$ заменить на $\omega p_{эм} \cos(\omega t - \beta r)$, то получим то же выражение (4-2-5). Это указывает на возможность рассматривать статическое поле как частный случай монохроматического.

Поле заряженной бесконечно тонкой нити с плотностью заряда на единицу длины τ [к/м]. Из соображений симметрии очевидно, что электрические силовые линии такого поля представляют собой равномерно расходящиеся от нити радиальные прямые. Если нить окружить цилиндрической поверхностью длиной l и радиусом r , то применяя теорему Остроградского-Гаусса (Д-3-30)

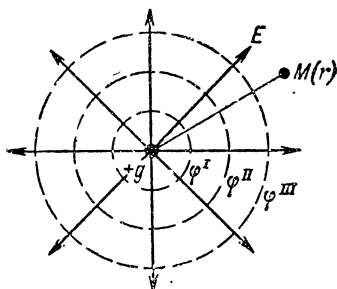


Рис. 4-3. Поле точечного заряда. Стрелки — силовые линии; пунктирные окружности — эквипотенциальные поверхности ($\varphi = \text{const}$)
 $\varphi^{(I)} > \varphi^{(II)} > \varphi^{(III)}.$

и представляя левую и правую части формулы (Д-3-30) следующим образом:

$$\oint_S \mathbf{D} dS = 2\pi r l D;$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV = \tau l,$$

получим:

$$E = e_r \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}. \quad (4-2-6)$$

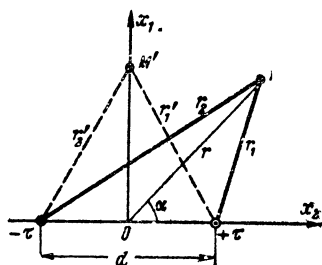
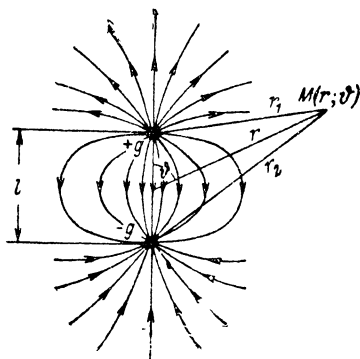


Рис. 4-4. Поле электрического поля.

Рис. 4-5. К определению поля заряженных нитей.

Поле, создаваемое двумя параллельными разноименно заряженными нитями. Напряженность такого поля в точке M (рис. 4-5) на основании формулы (4-2-6) равна:

$$E = E_1 + E_2 = \tau \left\{ \frac{e_{r1}}{2\pi\epsilon_a r_1} - \frac{e_{r2}}{2\pi\epsilon_a r_2} \right\},$$

а потенциал этой точки

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2;$$

согласно формуле (4-1-3а)

$$\varphi_1 = \int_M^\infty E_1 dr_1,$$

$$\varphi_2 = \int_M^\infty E_2 dr_2.$$

Так как работа в потенциальном поле определяется разностью потенциалов начальной и конечной точек и не

зависит от формы пути, соединяющего эти точки, то

$$\varphi_1 = \int_M^{M'} \mathbf{E}_1 d\mathbf{r}_1 + \int_{M'}^{\infty} \mathbf{E}_1 d\mathbf{r}_1 = \int_M^{M'} \mathbf{E}_1 d\mathbf{r}_1 + \varphi'_1;$$

$$\varphi_2 = \int_M^{M'} \mathbf{E}_2 d\mathbf{r}_2 + \varphi'_2,$$

где $\varphi'_1 = -\varphi'_2$ — потенциалы в точке M' , создаваемые

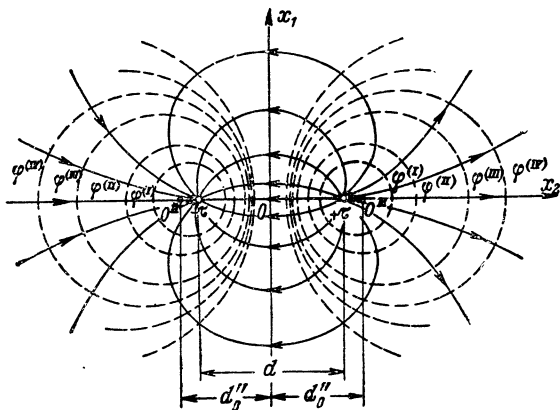


Рис. 4-6. Структура силовых линий и эквипотенциальных поверхностей двух заряженных нитей.

обеими заряженными нитями при $r'_1 = r'_2$. Подставляя \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 согласно формуле (4-2-6), находим, что

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left(\ln \frac{r'_1}{r_1} - \ln \frac{r'_2}{r_2} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (4-2-7)$$

Для весьма удаленной точки M ($d \ll r$) напряженность поля в цилиндрической системе координат [см. выражение (Д-3-50)]

$$\mathbf{E} = \frac{\tau d}{2\pi\epsilon_a r^2} (\mathbf{e}_r \cos \alpha + \mathbf{e}_\alpha \sin \alpha). \quad (4-2-8)$$

Структура электрических силовых линий и эквипотенциальных поверхностей поля заряженных нитей показана на рис. 4-6. Поскольку выражение (4-2-8) не содержит составляющих вдоль оси x_3 , параллельной осям нитей, то силовые линии лежат в плоскостях $0x_1x_2$, перпен-

дикулярным к оси x_3 , и являются нормальными к поверхностям одинакового потенциала. Согласно формуле (4-2-7) условие, определяющее эти поверхности:

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{const} = k.$$

В декартовой системе координат

$$k^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{\left(\frac{d}{2} + x_2\right)^2 + x_1^2}{\left(\frac{d}{2} - x_2\right)^2 + x_1^2}.$$

Вводя обозначения

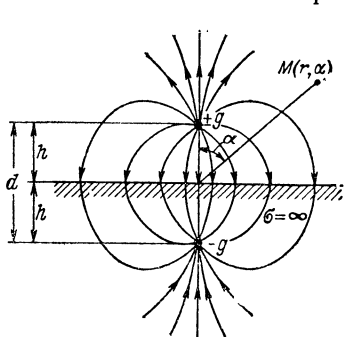
$$\left. \begin{aligned} d_0 &= \frac{d}{2} \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}, \\ R^2 &= d_0^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (4-2-9)$$

получаем уравнение эквипотенциальных поверхностей

$$(x^2 - d_0)^2 + x_1^2 = R^2. \quad (4-2-10)$$

Это уравнение окружности с радиусом R и центром в точке $x_2 = d_0$, $x_1 = 0$, образующейся при пересечении эквипотенциальной поверхности с плоскостью $0x_1x_2$. Проведя достаточное количество таких окружностей для различных значений k , получим структуру поля, характеризующую силовыми линиями, пересекающимися по нормальным эти окружности.

Поле бесконечно тонкой заряженной нити, расположенной параллельно бесконечной проводящей плоскости (рис. 4-7). Непосредственное определение такого поля было бы возможно при известном распределении ин-



дуцированных зарядов на плоскости. Если распределение не задано, то можно применить метод зеркальных изображений. Согласно этому методу, проводящую плоскость заменим фиктивным «зеркальным» изобра-

Рис. 4-7. Поле заряженной нити, расположенной над бесконечно проводящей поверхностью.

жением нити с зарядом, равным по величине, но обратным по знаку и расположенным от плоскости на таком же расстоянии h , что и действительный заряд. Структура поля при этом не изменяется, поскольку проводящая плоскость совпадает с эквипотенциальной поверхностью и одинакова со структурой поля двух заряженных нитей, описываемого уравнениями (4-2-7) и (4-2-8), в которых $d=2h$. На основании этого вектор напряженности искомого поля в точке M при $r \gg 2h$ определяется по формуле

$$\mathbf{E} = \tau \frac{h}{\pi \varepsilon_a r^2} (\mathbf{e}_r \cos \alpha + \mathbf{e}_a \sin \alpha). \quad (4-2-11)$$

При этом вектор напряженности поля на проводящей поверхности ($\alpha=90^\circ$)

$$\mathbf{E} = \tau \frac{h}{\pi \varepsilon_a r^2} \mathbf{e}_r \quad (4-2-12)$$

и плотность заряда на этой поверхности согласно (4-1-2а) определяется выражением

$$\kappa = \varepsilon_a E_n = \tau \frac{h}{\pi r^2} [\kappa/\text{м}^2]. \quad (4-2-13)$$

4-3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ

Так как напряженность поля внутри заряженного проводника равна нулю, то и поток вектора \mathbf{D} через любую расположенную внутри проводника замкнутую поверхность равен нулю (рис. 4-8); согласно теореме Гаусса (1-3-11) при этом равен нулю и заряд, расположенный внутри такой поверхности.

Если заряженное проводящее тело имеет полость, то поле внутри нее также равно нулю. На этом явлении основано электростатическое экранирование: в случае необходимости устранения влияния электростатического поля соответствующие устройства помещают внутрь замкнутой металлической поверхности; на практике часто применяют сетку с небольшими ячейками.

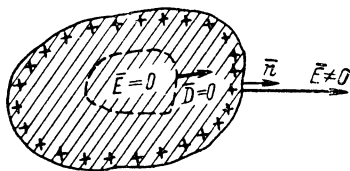


Рис. 4-8. Заряженный проводник.

Плотность заряда на поверхности заряженного проводника

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S},$$

где Δq — заряд элементарной площадки ΔS .

Граничные условия на поверхности заряженного проводника согласно уравнениям (4-1-2а)

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \quad E_\tau = 0. \quad (4-3-1)$$

Из первого условия следует, что нормальная составляющая напряженности поля вблизи проводника определяется только плотностью заряда на прилегающем элементе его поверхности и не зависит от распределения зарядов. Из второго условия следует, что поверхность проводника является эквипотенциальной, т. е. потенциал имеет одинаковую величину во всех ее точках

$$\varphi = \text{const}. \quad (4-3-2)$$

Потенциал любой точки внутри проводящего тела равен потенциалу любой точки на его поверхности, что следует из условия отсутствия поля внутри заряженного проводящего тела и непрерывности потенциала. На основании этого потенциалом проводника называется потенциал любой точки на его поверхности.

На основании третьей формулы (4-1-2) напряженность электростатического поля у поверхности заряженного проводника

$$E_n = - \frac{\partial \varphi}{\partial n}; \quad (4-3-3)$$

если поверхность имеет форму шара, то

$$E_n = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (4-3-4)$$

Любую элементарную площадку на поверхности проводника неправильной формы можно представить как часть сферы, радиус которой равен радиусу кривизны этой площадки. При этом поле у поверхности можно определять как поле точечного заряда $q = 4\pi r^2 \sigma$, расположенного в центре этой сферы. В таком случае на основании формулы (4-2-1) выражение (4-3-4) принимает следующий вид:

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (4-3-5)$$

Так как согласно условию (4-3-2) потенциал φ на поверхности проводника постоянен, то из выражения (4-3-5) следует, что с увеличением кривизны поверхности проводника напряженность поля резко возрастает (эффект кривизны). Особенно велика напряженность поля вблизи острых выступов проводника (рис. 4-9); при заряде его до высокого потенциала с этих выступов в воздухе может начаться разряд. Чтобы из-

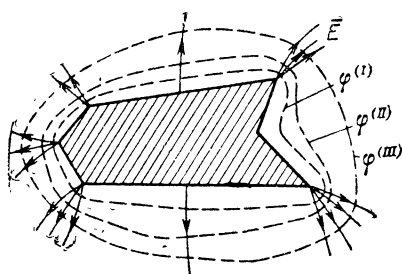


Рис. 4-9. Поле заряженного проводника.

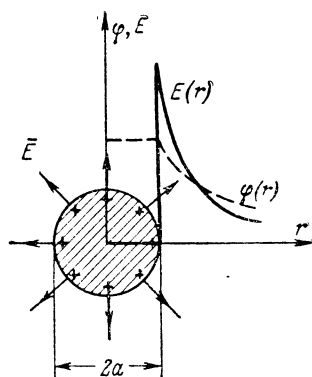


Рис. 4-10. Поле заряженного сплошного проводящего шара.

бежать этого, поверхность проводников, заряжаемых до высоких потенциалов, делают гладкой, а выступам придают форму с малой кривизной.

Из сопоставления выражений (4-3-5) и (4-3-1) следует, что плотность заряда достигает наибольшей величины в местах с наибольшей кривизной. По этой причине эквипотенциальные поверхности располагаются ближе к поверхности проводника в местах с большей кривизной. На малых расстояниях от проводника эти поверхности повторяют форму проводника, а на больших — приближаются к сферической форме, так как в этом случае заряд, распределенный на поверхности проводника конечных размеров, может быть принят за точечный.

Поле заряженного проводящего шара (рис. 4-10) описывается следующими формулами:

при $r \leq a$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_a a} = \text{const}, \\ E &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4-3-6)$$

при $r > a$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_a r}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4-3-6a)$$

На поверхности проводящего шара заряд q распределяется равномерно с поверхностной плотностью $\kappa = q/4\pi a^2$. Заряженный шар создает такое же поле, как сосредоточенный в его центре точечный заряд q [см. выражения (4-2-1) и (4-2-2)].

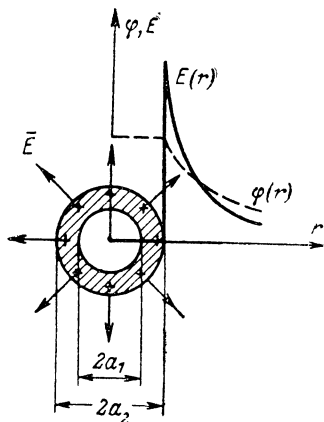


Рис. 4-11. Поле заряженного полого проводящего шара.

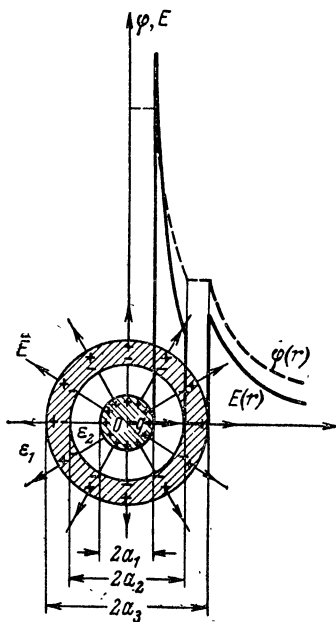


Рис. 4-12. Поле проводящего шара с зарядом q , размещенным в центре проводящей сферы, $\epsilon_1 < \epsilon_2$.

Поле заряженной полой металлической сферы (рис. 4-11) описывается уравнениями, аналогичными (4-3-6) и (4-3-6a). В полости, т. е. когда $r \leq a_1$,

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_a a_2}, \\ \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-3-6б)$$

Если проводящий шар с зарядом q размещен в центре полой проводящей сферы (рис. 4-12), то согласно тео-

реме Гаусса (1-3-11), интегрируя по замкнутой поверхности, расположенной в стенке полый сферы, где напряженность поля равна нулю, получим:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum q_i = 0,$$

т. е. на внутренней поверхности сферы наводится заряд q' , равный по величине заряду q , но противоположный по знаку. На внешней поверхности сферы наводится заряд $q'' = q$ и поле вне сферы не равно нулю. Поле вне сферы совпадает с полем проводящего шара с зарядом q . Таким образом, при $r \geq a_3$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{(1)} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_{a1} r}, \\ \mathbf{E}_{(1)} &= \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_{a1} r^2}; \end{aligned} \right\} \quad (4-3-7)$$

при $a_1 \leq r \leq a_2$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{(2)} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_{a1} a_3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_{a2}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_2} \right), \\ \mathbf{E}_{(2)} &= \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_{a2} r^2}; \end{aligned} \right\} \quad (4-3-7a)$$

при $a_2 \leq r \leq a_3$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_{a1} a_3}, \\ \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-3-7б)$$

Если полая сфера используется в качестве экрана, т. е. для того чтобы помещенные внутри экрана заряды не создавали внешнее поле, сферу заземляют (рис. 4-13). При этом заряд и потенциал на поверхности сферы будут равны нулю при наличии любых зарядов внутри нее.

Поле двух расположенных концентрически проводящих сфер с зарядами q и $-q$ (рис. 4-14) на основе формул (4-2-1) и (4-2-2) описывается следующими выражениями:

при $a_1 \leq r \leq a_2$

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2} = \mathbf{e}_r \frac{U}{r^2} \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}; \quad (4-3-8)$$

при $r < a_1$ и $a_2 < r$

$$\mathbf{E} = 0. \quad (4-3-8a)$$

Здесь

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) [\theta] \quad (4-3-9)$$

— разность потенциалов между наружной поверхностью внутренней сферы и внутренней поверхностью наружной сферы.

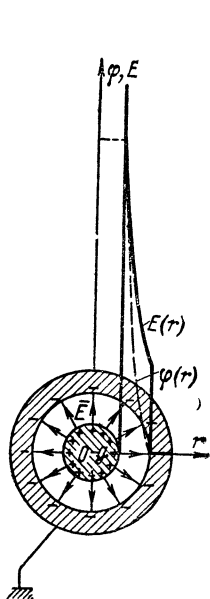


Рис. 4-13. Поле проводящего шара с зарядом q , размещенным в центре заземленной проводящей сферы.

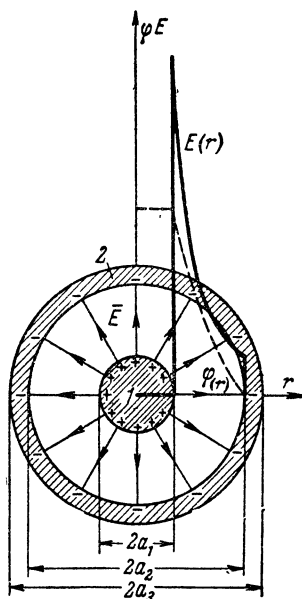


Рис. 4-14. Поле расположенных concentрически заряженных проводящих сфер 1 и 2 (сферический конденсатор).

Из выражения (4-3-8а) следует, что поле возникает только лишь в пространстве между поверхностями сфер.

Поле заряженного бесконечно длинного проводящего цилиндра радиусом a по структуре подобно полю бесконечно длинной заряженной нити; на основании выражения (4-2-6) при $r \geq a$ напряженность поля

$$E = e_r \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r} \quad (4-3-10)$$

и при $r \leq a$

$$E=0. \quad (4-3-10a)$$

4-4. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

Заряд уединенного проводника можно выразить через его потенциал

$$q=C \varphi. \quad (4-4-1)$$

Здесь C — электрическая емкость уединенного проводника $[\phi]$; она зависит от формы проводника, его размеров и от диэлектрической проницаемости окружающей среды. Величина емкости C определяет заряд, необходимый для создания на поверхности проводника заданного потенциала, и является интегральным параметром ограниченной области диэлектрической среды, в которой локализовано электрическое поле, создаваемое расположенными в этой области заряженными проводниками.

На основе выражений (4-4-1) и (4-3-6) емкость уединенной проводящей сферы

$$C = \left. \frac{q}{\varphi} \right|_{r=a} = 4\pi\epsilon_a a [\phi]. \quad (4-4-2)$$

Пользуясь эллипсоидальной системой координат (см. рис. Д-11), цилиндр можно рассматривать как вытянутый эллипсоид (рис. 4-15), а круглый диск — как сплюснутый эллипсоид. На основании этого из решения уравнения Лапласа (4-1-5), переписанного в эллипсоидальных координатах [см. выражение (Д-3-59)], находим выражения для определения емкости уединенных проводящих тел. Емкость вытянутого эллипсоида ($a \gg b = c$)

$$C = 4\pi\epsilon_a \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\text{Arch}\left(\frac{a}{b}\right)} [\phi]; \quad (4-4-3)$$

емкость сплюснутого эллипсоида ($a = b > c$)

$$C = 4\pi\epsilon_a \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\arccos\left(\frac{c}{a}\right)} [\phi]; \quad (4-4-4)$$

емкость круглого диска ($a = b, c = 0$)

$$C = 4\pi\epsilon_a \frac{2a}{\pi} = 8\epsilon_a a [\phi]. \quad (4-4-5)$$

Если данный проводник не уединен, то потенциал его зависит не только от формы и заряда проводника, но и от формы и расположения других проводников. Так как вследствие электростатической индукции происходит перераспределение зарядов, в том числе и на незаряженных проводниках, то потенциал данного проводника равен сумме потенциалов, создаваемых собственным пере-

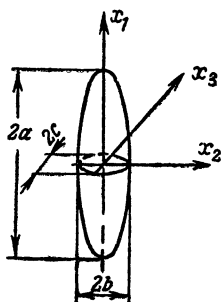


Рис. 4-15. К определению электрической емкости эллипсоида.

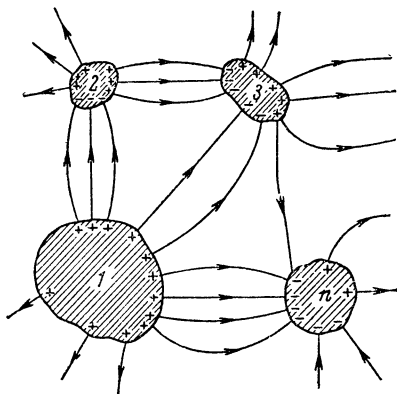


Рис. 4-16. К определению потенциала поля системы проводников.

распределившимся зарядом этого проводника и зарядами, индуцированными им на других проводниках (рис. 4-16):

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n), \quad (4-4-6)$$

где φ_i — потенциал на поверхности i -го проводника;
 φ_{ik} — потенциал i -го проводника, обусловленный зарядом k -го проводника;
 φ_{ii} — потенциал i -го проводника, обусловленный собственным зарядом;
 n — количество проводников.

Каждая составляющая φ_{ik} потенциала φ_i пропорциональна соответствующему заряду, т. е.

$$\varphi_{ik} = \alpha_{ik} q_k. \quad (4-4-6a)$$

Следовательно,

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} q_k \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4-4-6б)$$

Коэффициенты α_{ik} называются взаимными потенциальными коэффициентами; они зависят от формы, размеров и взаимного расположения всех проводников. Коэффициенты α_{ii} — называются собственными потенциальными коэффициентами. Коэффициент α_{ik} численно равен потенциалу i -го проводника, когда заряд на k -м проводнике равен единице, а на всех остальных — нулю.

Решая систему уравнений (4-4-6б) относительно зарядов q_i , получим другую систему уравнений, позволяющую определить заряды по известным потенциалам.

$$q_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} \varphi_k \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4-4-7)$$

Коэффициенты c_{ii} называют коэффициентами емкости, а c_{ik} — коэффициентами электростатической индукции. Коэффициент c_{ik} численно равен заряду i -го проводника, когда потенциал k -го проводника равен единице, а всех остальных — нулю.

Систему уравнений (4-4-7) часто записывают в иной форме, отличающейся тем, что заряд какого-либо проводника выражают не через потенциал проводников, а через разности потенциалов между данным проводником и другими, в том числе и землей, потенциал которой принимается равным нулю:

$$q_i = \sum_{k \neq i}^n C_{ik} (\varphi_i - \varphi_k) + C_{ii} (\varphi_{ii} - 0). \quad (4-4-8)$$

Здесь C_{ii} — собственная емкость i -го проводника, отличающаяся от емкости этого проводника, находящегося в уединении;

C_{ik} — взаимная емкость пары проводников, определяемая всеми проводниками системы.

Сравнивая системы уравнений (4-4-7) и (4-4-8), можно определить связь между коэффициентами C_{ik} и c_{ik}

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n C_{ik};$$

при $i \neq k$

$$C_{ik} = -C_{ki}.$$

Так как C_{ik} и C_{ki} обозначают одну и ту же емкость между i -м и k -м проводниками, то

$$C_{ik} = C_{ki}. \quad (4-4-9)$$

Если n -й и $(n+m)$ -й проводники одинаковы, то

$$C_{nn} = C_{(n+m)(n+m)}. \quad (4-4-10)$$

4-5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ КОНДЕНСАТОР

Система двух проводников (обкладок), практически полностью защищенная от влияния других проводников, называется электрическим конденсатором. Заряды образующих конденсатор проводников равны, но отличаются по знаку. Зарядом конденсатора называется абсолютная величина заряда одного проводника.

Рассмотрим конденсатор, один из проводников которого представляет замкнутую полость, внутри которой находится другой проводник (рис. 4-14). Заряжая проводники (обкладки) равными, но противоположными зарядами, получим поле, сосредоточенное между этими проводниками; во внешнем пространстве поле будет отсутствовать. В этом случае имеем полностью защищенную от поля других источников систему, заряды на проводниках 1 и 2 которой согласно (4-4-8) равны:

$$q_1 = C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{11}\varphi_1;$$

$$q_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}\varphi_2.$$

Так как $q_1 = -q_2 = q$ и согласно выражению (4-4-9), $C_{12} = C_{21}$, то

$$q = \left(\frac{C_{11}}{2} + C_{12}\right)\varphi_1 - \left(\frac{C_{22}}{2} + C_{12}\right)\varphi_2. \quad (4-5-1)$$

Если собственные емкости обкладок одинаковы ($C_{11} = C_{22}$), то

$$|q| = \left(\frac{C_{11}}{2} + C_{12}\right)U = CU. \quad (4-5-2)$$

Здесь $U = |\varphi_1 - \varphi_2|$ — разность потенциалов на обкладках конденсатора;

$$C = \frac{C_{11}}{2} + C_{12} \quad (4-5-3)$$

— емкость конденсатора, равная отношению абсолютной величины заряда конденсатора к разности потенциалов на его обкладках, т. е.

$$C = \left| \frac{q}{U} \right|. \quad (4-5-3a)$$

Сферический конденсатор (рис. 4-14). На основе выражений (4-5-3a) и (4-3-9) емкость его равна:

$$C = 4\pi\epsilon_a a_1 \frac{1}{\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)} [\phi].$$

Цилиндрический конденсатор (рис. 4-17, a). Емкость на единицу длины такого конденсатора найдем, определив разность потенциалов обкладок, которая на основании выражения (4-3-10) равна:

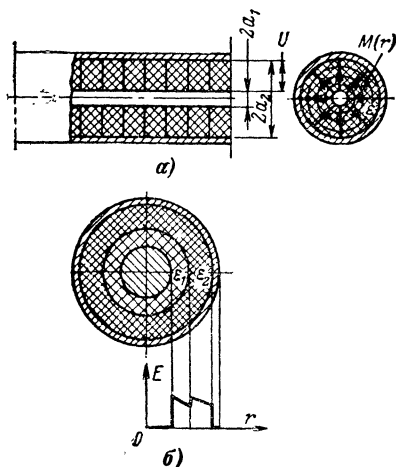


Рис. 4-17. Цилиндрический конденсатор с однородным (a) и слоистым (б) диэлектриками ($\epsilon_2 < \epsilon_1$).

$$U = |\phi_1 - \phi_2| = \int_{a_1}^{a_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{a_2}{a_1}. \quad (4-5-4)$$

Отсюда

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{a_2}{a_1}} [\phi/m]. \quad (4-5-5)$$

Концентрические окружности в плоскости поперечного сечения цилиндрического конденсатора представляют собой линии равного потенциала, а радиальные линии — силовые линии электрического поля. Напряженность электрического поля внутри конденсатора в точке $M(r)$ определяется на основе (4-3-10) выражением

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r},$$

или согласно формуле (4-5-4)

$$E_r = \frac{U}{r \ln \frac{a_2}{a_1}} [\text{в/м}]. \quad (4-5-6)$$

Из этой формулы следует, что в цилиндрическом конденсаторе с однородным диэлектриком (очевидно, и в коаксиальной линии) поле неоднородно; напряженность

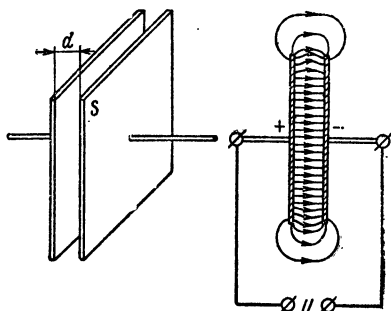


Рис. 4-18. Плоский конденсатор.

его достигает максимальной величины на поверхности внутреннего провода. Чтобы получить однородное поле и тем самым повысить электрическую прочность конденсатора, диэлектрик делают неоднородным — слоистым (рис. 4-17,б); при этом необходимо, чтобы

$$2\pi r_i \epsilon_0 \epsilon_i E_r = \tau = \text{const},$$

где r_i , ϵ_i — соответственно радиус и диэлектрическая проницаемость i -го слоя.

Следовательно, для создания однородного поля необходимо выполнить условие

$$r_i \epsilon_i = \text{const}.$$

Плоский конденсатор состоит из двух параллельных пластин (рис. 4-18). Емкость его

$$C = \frac{\epsilon_a S}{d} [\phi], \quad (4-5-7)$$

если площадь пластин $S \gg d^2$, где d — расстояние между пластинами; только при этом условии можно полагать, что поле сосредоточено в пространстве между внутренними поверхностями пластин и является однородным. В этом случае напряженность поля

$$E = \frac{U}{d} \quad (4-5-8)$$

и заряд конденсатора $q = \kappa S$.

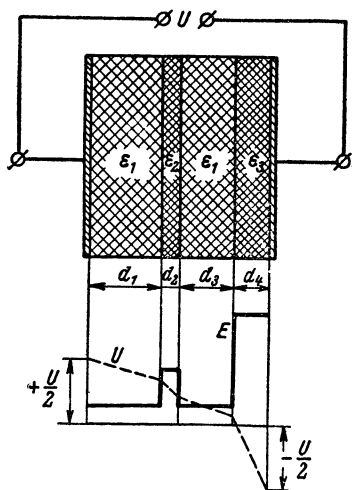
Так как, согласно первому выражению (4-3-1) $E = E_n = \kappa / \epsilon_a$, то

$$q = \epsilon_a SE = \frac{\epsilon_a SU}{d}.$$

Подставляя последнее выражение в соотношение $\left| \frac{q}{U} \right| = C$, получаем формулу (4-5-7).

Однако на краях пластин реального конденсатора поле неоднородно [см. выражение (4-3-5)]. Поэтому фор-

Рис. 4-19. Конденсатор с многослойным диэлектриком и кривые распределения в нем напряженности поля E и разности потенциалов U
 $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$.



мула (4-5-7) является неточной, и емкость плоского конденсатора нужно определять по следующей формуле:

$$C = \frac{\epsilon_a S}{d} + \frac{\epsilon_a L}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{S}}{d}, \quad (4-5-7a)$$

в которой L — периметр обкладки. Для емкости конденсатора дисковой конструкции точная формула (формула Кирхгофа) имеет вид:

$$C = \frac{\epsilon_a \pi a^2}{d} + \epsilon_a a \left(\ln \frac{16 \pi a}{d} - 1 \right), \quad (4-5-76)$$

где a — радиус дисков.

Если диэлектрик плоского конденсатора состоит из n параллельных слоев (рис. 4-19), то его емкость

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\epsilon_i}}. \quad (4-5-9)$$

Распределение напряженности поля в диэлектрике такого конденсатора неоднородно; в k -м слое диэлектрика напряженность поля $E_k = D/\epsilon_0 \epsilon_k$; так как $SD = q = UC$, то

$$E_k = \frac{U}{\epsilon_k \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\epsilon_i}}.$$

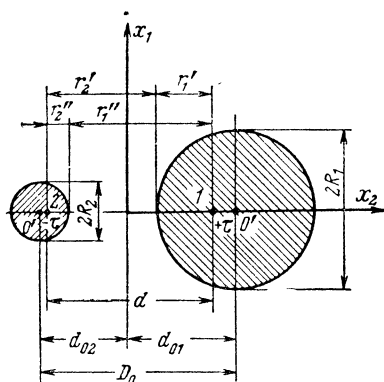


Рис. 4-20. К определению емкости параллельных проводов.

1 и 2 — эквивалентные заряженные бесконечно тонкие нити.

Неравномерность поля внутри неоднородного диэлектрика снижает электрическую прочность конденсатора. Так, например, в воздушном зазоре между диэлектрической пластиной и обкладкой конденсатора может возникнуть поле большей напряженности, что приведет к электрическому пробое конденсатора.

Емкость двух параллельных круглых проводов (рис. 4-20). Если вместо проводов взять две бесконечно тонкие заряженные нити и найти такое их положение, при котором получится электрическое поле с эквипотенциальными поверхностями, совпадающими с поверхностями проводов, то поле этих нитей будет иметь такую же структуру, как и поле заряженных проводов. При заданном расстоянии между центрами проводов $D_0 = d_{01} + d_{02}$ на основании формул (4-2-9) при $R_1 = a_1$ и $R_2 = a_2$ имеем:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = d_{01}^2 - R_1^2 = d_{02}^2 - R_2^2,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} d_{01} &= \frac{R_1^2 - R_2^2 + D_0^2}{2D_0}; \\ d_{02} &= \frac{-R_1^2 + R_2^2 + D_0^2}{2D_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4-5-10)$$

Зная d_{01} и d_{02} , находим координаты эквивалентных заряженных нитей

$$\frac{d}{2} = \sqrt{d_{01}^2 - R_1^2} = \sqrt{d_{02}^2 - R_2^2}. \quad (4-5-11)$$

Из условия равенства заряда обоих проводов $2\pi R_1 \kappa_1 = \tau$ и $2\pi R_2 \kappa_2 = \tau$. Отсюда $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{a_2}{a_1}$, т. е. поверхностные заряды проводов обратно пропорциональны их радиусам.

Емкость системы проводов на единицу длины согласно выражению (4-5-3а)

$$C_0 = \left| \frac{\tau}{\varphi_1 - \varphi_2} \right|.$$

На основании формулы (4-2-7)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left(\ln \frac{r_2'}{r_1'} - \ln \frac{r_2''}{r_1''} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \left(\frac{r_2' r_1''}{r_1' r_2''} \right).$$

Отсюда

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \left(\frac{r_2'}{r_1'} \frac{r_1''}{r_2''} \right)}.$$

Решая систему уравнений (4-2-9) для $k' = \frac{r_2'}{r_1'}$ и $k'' = \frac{r_2''}{r_1''}$ с учетом, что $d_{01} > 0$, а $d_{02} < 0$, находим:

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \left\{ \left[\frac{d_{01}}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{d_{01}}{R_1} \right)^2 - 1} \right] \left[\frac{d_{02}}{R_2} + \sqrt{\left(\frac{d_{02}}{R_2} \right)^2 - 1} \right] \right\}} [\phi/m]. \quad (4-5-12)$$

Если $R_1, R_2 \gg D_0$, то согласно (4-5-10) $d_{01} \approx d_{02} \approx \frac{D_0}{2}$ и, следовательно:

$$C_0 \approx \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \left[\frac{2d_{01}}{R_1} \frac{2d_{02}}{R_2} \right]} \approx \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \frac{D_0}{\sqrt{R_1 R_2}}} [\phi/\text{м}]. \quad (4-5-12a)$$

При $R_1 = R_2 = R = a$

$$C_0 = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \left(\frac{D_0}{R} \right)} = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \left(\frac{D_0}{a} \right)}. \quad (4-5-12б)$$

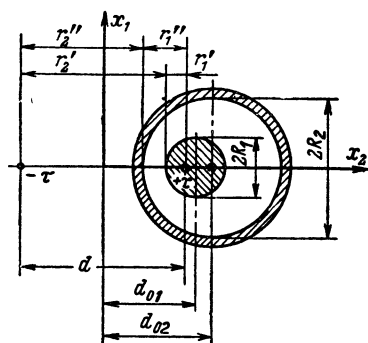


Рис. 4-21. К определению емкости параллельных проводов (второй провод внутри первого).

При этом, как и в случае цилиндрического конденсатора [см. формулу (4-5-6)], можно показать, что напряженность поля между проводами на линии $x_1 = 0$

$$E \approx \frac{U}{D_0 \ln \left(\frac{D_0}{a} \right)}. \quad (4-5-12в)$$

Если $R_2 \rightarrow \infty$ (цилиндр, расположенный над проводящей плоскостью), то $\frac{d_{02}}{R_2} \rightarrow 1$, а d_{01} равно расстоянию от оси цилиндра с радиусом R_1 до проводящей плоскости; в этом случае

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \left[\frac{d_{01}}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{d_{01}}{R_1} \right)^2 - 1} \right]}. \quad (4-5-13)$$

При тонком проводе, т. е. когда $R_1 = a \ll d_{01}$, погонная емкость

$$C_0 \approx \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln\left(\frac{2d_{01}}{a}\right)}. \quad (4-5-13б)$$

Если один из проводов полый, а другой расположен внутри него (рис. 4-21), то d_{01} и d_{02} имеют одинаковый знак, в этом случае

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \left[\frac{\frac{d_{01}}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{d_{01}}{R_1}\right)^2 - 1}}{\frac{d_{02}}{R_2} + \sqrt{\left(\frac{d_{02}}{R_2}\right)^2 - 1}} \right]}. \quad (4-5-14)$$

При концентрическом расположении проводов согласно выражениям (4-5-10) $d_{01} = d_{02} \rightarrow \infty$ и емкость определяется формулой (4-5-5) для цилиндрического конденсатора.

Емкость конденсаторов со сложной формой проводников можно определять методом конформного отображения, основанным на теории функций комплексного переменного (§ Д-5), если поле конденсатора плоское. Электростатическое поле в отсутствии зарядов характеризуется потенциалом ϕ , удовлетворяющим уравнению Лапласа (4-1-5). Этому уравнению удовлетворяют согласно выражениям (Д-5-17) и (Д-5-18) вещественная и мнимая части аналитической функции $\omega(z) = X_1 + jX_2$. Следовательно, функции X_1 и X_2 представляют собой потенциалы плоского электростатического поля. Так как кривые $X_1(x_1, x_2) = \text{const}$ и $X_2(x_1, x_2) = \text{const}$ ортогональны, то если первые представляют семейство эквипотенциальных поверхностей, то вторые силовые линии или наоборот. Аналитическая функция $\omega(z)$ называется комплексным потенциалом. Пусть $X_1(x_1, x_2)$ представляет потенциал плоского поля. Тогда согласно выражениям (Д-5-15) и (Д-5-16)

$$\frac{d\omega(z)}{dz} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - j \frac{\partial X_1}{\partial x_2} = -E_1 + E_2$$

и напряженность поля

$$|E| = \left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}. \quad (4-5-15)$$

Определим напряженность поля конденсатора, состоящего из двух софокусных эллиптических цилиндров с большими полуосями a_1 и a_2 , при расстоянии между фокусами $2d$, если цилиндры заряжены до потенциалов φ_1 и φ_2 (рис. 4-22). Поле такого конденсатора согласно табл. Д-2 характеризуется комплексным потенциалом

$$w(z) = A \operatorname{arch} \frac{z}{d}. \quad (4-5-16)$$

Чтобы выделить действительную и мнимую части $w(z)$, рассмотрим обратную функцию

$$z = d \operatorname{ch} \frac{w(z)}{A};$$

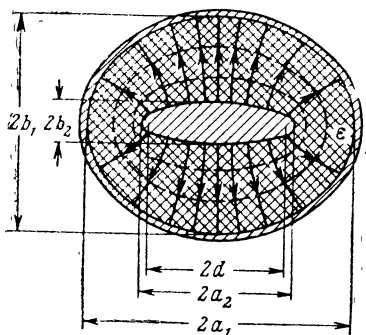


Рис. 4-22. Эллиптический цилиндрический конденсатор.

из нее получаем:

$$\frac{x_1^2}{d^2 \operatorname{ch}^2 \frac{X_1}{A}} + \frac{x_2^2}{d^2 \operatorname{sh}^2 \frac{X_1}{A}} = 1; \quad (4-5-16a)$$

$$\frac{x_1^2}{d^2 \cos^2 \frac{X_2}{A}} - \frac{x_2^2}{d^2 \sin^2 \frac{X_2}{A}} = 1. \quad (4-5-16b)$$

Уравнения (4-5-16a) и (4-5-16b) описывают соответственно семейство софокусных эллипсов и гипербол (рис. 4-23). Эллипсы $X_1(x_1, x_2) = \operatorname{const}$ представляют эквипотенциальные поверхности, гиперболы при $X_2(x_1, x_2) = \operatorname{const}$ — силовые линии. Для определения

постоянной A согласно выражениям (4-5-16а) и (4-5-16б) имеем:

$$X_{1(1)} = A \operatorname{arch} \frac{a_1}{d}, \quad X_{1(2)} = A \operatorname{arch} \frac{a_2}{d}$$

или

$$A = \frac{X_{1(1)} - X_{1(2)}}{\operatorname{arch} \frac{a_1}{d} - \operatorname{arch} \frac{a_2}{d}} = \frac{U}{\operatorname{arch} \frac{a_1}{d} - \operatorname{arch} \frac{a_2}{d}},$$

где $U = X_{1(1)} - X_{1(2)} = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов между обкладками.

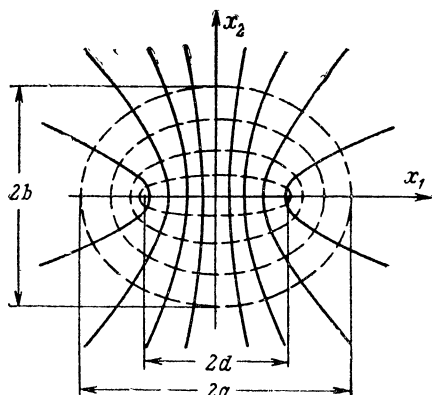


Рис. 4-23. Семейство софокусных эллипсов и гипербол.

Согласно выражению (4-5-16) комплексный потенциал

$$\omega(z) = \frac{U}{\operatorname{arch} \frac{a_1}{d} - \operatorname{arch} \frac{a_2}{d}} \operatorname{arch} \frac{z}{d}.$$

Напряженность поля согласно выражению (4-5-15)

$$E = \frac{U}{\operatorname{arch} \frac{a_1}{d} - \operatorname{arch} \frac{a_2}{d}} \frac{1}{\sqrt[4]{[(x_1 + d)^2 + x_2^2][(x_1 - d)^2 + x_2^2]}}.$$

Поверхностная плотность заряда конденсатора согласно первому выражению (4-3-1)

$$\kappa = \epsilon_a E_n = - \epsilon_a \frac{\partial X_1}{\partial n} ;$$

в виду ортогональности X_1 и X_2

$$\kappa = \epsilon_a \frac{\partial X_2}{\partial S} .$$

Элемент поверхности единичной длины, стягиваемый дугой dS , несет заряд $dq = \kappa dS = \epsilon_a dX_2$. При полном обходе вокруг эллипса получим заряд на единицу длины конденсатора

$$\tau = 2\pi A \epsilon_a .$$

Емкость на единицу длины

$$C_0 = \left| \frac{\tau}{U} \right| = \frac{2\pi\epsilon_a}{\operatorname{arch} \frac{a_1}{d} - \operatorname{arch} \frac{a_2}{d}} ; \quad (4-5-17)$$

на основании формулы $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ погонная емкость

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}} . \quad (4-5-17a)$$

Функция (4-5-16) является комплексным потенциалом для целого ряда задач, имеющих практическое значение. С помощью этой функции можно определить напряженность поля и емкость системы, состоящей из эллиптического цилиндра и расположенной внутри него пластины шириной $2d$, края которой совпадают с фокусами оболочки, а также системы, состоящей из софокусных гиперболических цилиндров с двумя плоскостями, расположенными на некотором расстоянии в одной плоскости или взаимно перпендикулярными.

Погонная емкость системы, состоящей из пластины и эллиптического цилиндра, можно найти из выражения (4-5-17a), полагая $b_2 = 0$

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{a_1 + b_1}{d}} ,$$

где d — половина ширины пластины, края которой совпадают с фокусами оболочки.

Принимая гиперболы за эквипотенциальные линии, аналогично можно найти, что погонная емкость двух проводящих лент, расположенных в одной плоскости на расстоянии друг от друга $2d$ (рис. 4-24), равна:

$$C_0 = \frac{2\epsilon_a}{\pi} \ln \left(\frac{x}{d} + \sqrt{\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 1} \right) [\phi/m]. \quad (4-5-176)$$

Другим примером ортогональных кривых являются семейства кривых, описываемых уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X_1 + e^{X_1} \cos X_2, \\ x_2 &= X_2 + e^{X_1} \sin X_2. \end{aligned} \right\} \quad (4-5-18)$$

Эти кривые могут представлять эквипотенциальные линии $X_2(x_1, x_2)$ и силовые линии $X_1(x_1, x_2)$ поля плоского конденсатора (рис. 4-25). Если контур поперечного сечения пластины такого конденсатора совпадает с одной из эквипотенциальных линий, то напряженность поля у краев пластин будет меньше, чем в их средней части.

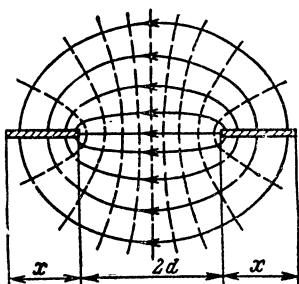


Рис. 4-24. Поле двух проводящих лент.

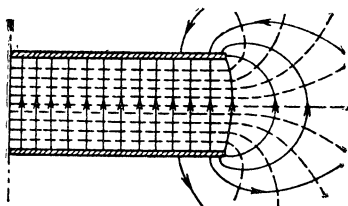


Рис. 4-25. Поле плоского конденсатора.

Таким способом уменьшают краевой эффект и повышают электрическую прочность конденсаторов, коаксиальных кабелей и других подобных устройств.

Параллельное соединение конденсаторов. При подключении конденсаторов к двум точкам с потенциалами ϕ_1 и ϕ_2 согласно рис. 4-26 получается одинаковое напряжение на всех конденсаторах $U = |\phi_1 - \phi_2|$. На основании выражения (4-5-2) сумма абсолютных зарядов всех пластин конденсаторов

$$\sum_{i=1}^{2n} |q_i| = [(C_{11} + 2C_{12}) + (C_{33} + 2C_{34}) + \dots] U,$$

где n — количество соединенных конденсаторов.

Отсюда на основе равенства (4-5-3а) емкость системы параллельно соединенных конденсаторов

$$C = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} |q_i|}{U} = \left(\frac{C_{11}}{2} + C_{12} \right) + \left(\frac{C_{33}}{2} + C_{34} \right) \dots$$

или

$$C = \sum_{i=1}^n C_i, \quad (4-5-19)$$

т. е. равна сумме емкостей этих конденсаторов.

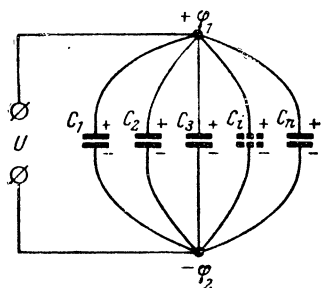


Рис. 4-26. Параллельное соединение конденсаторов.

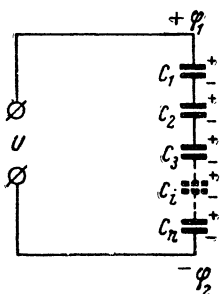


Рис. 4-27. Последовательное соединение конденсаторов.

Последовательное соединение конденсаторов. При присоединении конденсаторов к двум точкам с потенциалами φ_1 и φ_2 согласно рис. 4-27 напряжение $U = |\varphi_1 - \varphi_2|$ является суммой напряжений всех конденсаторов, т. е.

$$U = \sum_{i=1}^n U_i.$$

Если электрические поля последовательно соединенных конденсаторов друг на друга не влияют, то заряды всех конденсаторов одинаковы и при этом напряжение

$$U = |\varphi_1 - \varphi_2| = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i},$$

следовательно, емкость системы последовательно соединенных конденсаторов

$$C = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}}. \quad (4-5-20)$$

4-6. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СРЕДЕ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

На плоской границе раздела двух диэлектрических сред происходит преломление электростатического поля (рис. 4-28). Действительно, если поверхностные заряды отсутствуют, то из граничных условий $D_{n(2)} = D_{n(1)}$ и $E_{\tau(2)} = E_{\tau(1)}$ [см. выражения (4-1-2а)] следует:

$$\frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{\operatorname{ctg} \theta} = \frac{E_{n(2)}}{E_{\tau(2)}} \frac{E_{\tau(1)}}{E_{n(1)}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad (4-6-1)$$

т. е. угол преломления ϑ больше угла падения θ , если диэлектрическая проницаемость второй среды больше первой.

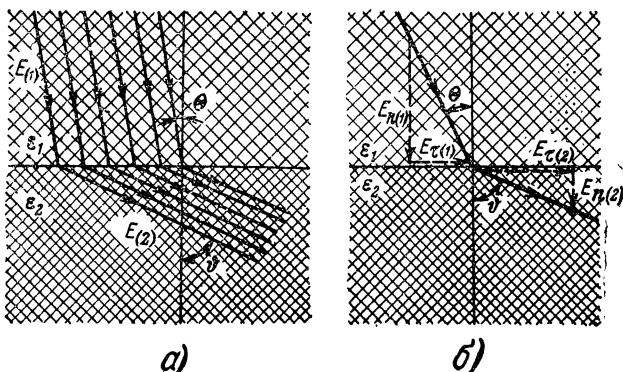


Рис. 4-28. Преломление электрических линий на границе двух диэлектрических сред при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

а — общая картина; б — к определению угла преломления.

Если в электростатическое поле, создаваемое удаленными на бесконечность источниками, внести проводниковые или диэлектрические тела конечных размеров, то структура поля нарушается — имеет место дифракция электростатического поля. Как и в случае монохроматического поля (§ 3-1), дифрагированное (возмущенное) электростатическое поле можно рассматривать как сумму первичного поля и вторичного, создаваемого зарядами,

индуцированными на поверхностях вносимых тел. Следовательно, потенциал дифрагированного поля

$$\varphi_1 = \varphi + \varphi_0, \quad (4-6-1a)$$

где φ — потенциал первичного (невозмущенного) поля, а φ_0 — потенциал вторичного поля, создаваемого зарядами индуцированными на поверхности внесенного тела.

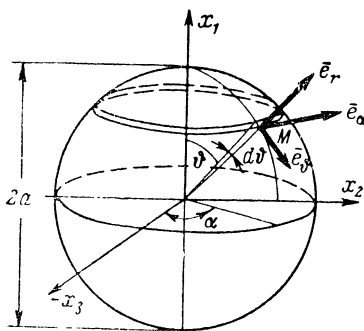


Рис. 4-29 К определению поля, возмущенного шаром.

Помимо дифрагированного (возмущенного) поля в окружающем пространстве, внутри внесенного диэлектрического тела возникает прошедшее поле, характеризуемое напряженностью $\mathbf{E}_{(2)}$ и потенциалом $\varphi_{(2)}$. Поле внутри проводящего тела, разумеется, равно нулю.

Решение задач, связанных с дифракцией электростатического поля, может быть найдено из уравнений Лапласа (4-1-5).

При этом точное решение может быть найдено только в случае тел простой геометрической формы: эллипсоида, бесконечного цилиндра и сферы, для которых математическая формулировка граничных условий не представляет трудностей.

Незаряженный проводящий шар в однородном электростатическом поле (рис. 4-29), определяемом уравнением $\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E$. При внесении в электростатическое поле незаряженного проводящего шара на поверхности его индуцируются заряды обоих знаков за счет перераспределения имеющихся в нем свободных, скомпенсированных в отсутствии первичного поля, зарядов. Во время процесса

перераспределения зарядов внутри шара протекает ток. Общий заряд шара при этом остается равным нулю и поле внутри шара отсутствует.

Согласно равенству (4-6-1а) в любой точке M вне шара потенциал $\varphi_{(1)} = \varphi + \varphi_0$. На основании выражения

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1$$

потенциал первичного поля

$$\varphi = -Ex_1 = Er \cos \vartheta. \quad (4-6-2)$$

Потенциал вторичного поля в общем случае определяется выражением (4-1-5а). Так как в данном случае поле симметрично относительно оси x_1 и на расстоянии $r \rightarrow \infty$ потенциал $\varphi_0 \rightarrow 0$, то выражение (4-1-5а) принимает вид:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta). \quad (4-6-3)$$

Подставляя выражения (4-6-2) и (4-6-3) в (4-6-1а), находим потенциал дифрагированного (возмущенного) поля в точке $M(r)$

$$\varphi_{(1)} = -Er \cos \vartheta + \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta). \quad (4-6-4)$$

Чтобы определить постоянные C_{2n} , подставим в это выражение $r=a$, что соответствует определению потенциала φ_S на поверхности шара. Учитывая, что $P_0(\cos \vartheta) = 1$ и $P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$ [см. выражения (Д-6-51)], можно написать:

$$\begin{aligned} \varphi_S = & -Ea \cos \vartheta + C_{20} a^{-1} + C_{21} a^{-2} \cos \vartheta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} C_{2n} a^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Так как шар проводящий, то согласно выражению (4-3-2) потенциал на его поверхности $\varphi_S = \text{const}$, т. е. от угла ϑ не зависит. Следовательно,

$$-Ea \cos \vartheta + C_{21} a^{-2} \cos \vartheta = 0;$$

$$C_{20} a^{-1} = \varphi_S;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_{2n} a^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta) = 0.$$

Отсюда находим, что $C_{20} = \varphi_S a$, $C_{21} = a^3 E$ и $C_{2n} = 0$ при $n > 1$.

Подставляя эти коэффициенты в формулу (4-6-4), получаем следующее выражение для потенциала дифрагированного электростатического поля:

$$\varphi_{(1)} = -Er \cos \vartheta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \varphi_S \frac{a}{r}. \quad (4-6-5)$$

Плотность индуцированных зарядов

$$\kappa = -\epsilon_a \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=a} = 3\epsilon_a E \cos \vartheta + \frac{\varphi_S \epsilon_a}{a},$$

а полный заряд шара

$$q = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \kappa a^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha = 4\pi a \epsilon_a \varphi_S.$$

В случае, если шар не заряжен ($\varphi_S = 0$), то выражение (4-6-5) принимает вид:

$$\varphi_{(1)} = -Er \cos \vartheta + E \frac{a^3}{r^2} \cos \vartheta. \quad (4-6-5a)$$

Второе слагаемое в правой части этой формулы выражает потенциал вторичного поля, создаваемого зарядами, индуцированными на поверхности шара

$$\varphi_0 = E \frac{a^3}{r^2} \cos \vartheta = \mathbf{e}_r \frac{V_\vartheta \mathbf{D}}{4\pi \epsilon_a r^2}, \quad (4-6-5б)$$

где $V_{\vartheta\Phi} = 3V = 4\pi a^3$ — «эффективный» объем шара.

Сравнивая выражения (4-6-5б) и (4-2-4), видим, что внесенный в электростатическое поле $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon_a$ незаряженный проводящий шар создает такое же поле, как ориентированный в направлении поля \mathbf{E} электрический диполь с моментом

$$\mathbf{p}_\vartheta = V_{\vartheta\Phi} \mathbf{D} = V_{\vartheta\Phi} \epsilon_a \mathbf{E}. \quad (4-6-6)$$

Напряженность дифрагированного поля определяется формулой $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$, переписанной в сферических координатах (Д-3-54) при подстановке выражения (4-6-5a)

$$\mathbf{E}_{(1)} = E \left\{ \mathbf{e}_r \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3}\right) \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin \vartheta \right\}. \quad (4-6-7)$$

На поверхности шара ($r = a$) напряженность поля

$$\mathbf{E}_{(1)}|_{r=a} = \mathbf{e}_r 3E \cos \vartheta, \quad (4-6-7a)$$

т. е., как и следовало ожидать, вектор напряженности дифрагированного поля у поверхности шара нормален к этой поверхности (рис. 4-30).

Абсолютная величина индуцированного на шаре заряда

$$q_0 = \left| \int_S \kappa dS \right|.$$

Здесь интегрирование производится в пределах полусферы. При этом

$$q_0 = \left| 3\varepsilon_a E a^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\alpha \right| = S_{\text{эф}} D, \quad (4-6-8)$$

где $S_{\text{эф}} = 3\pi a^2$ — «эффективная» поверхность шара.

Из выражений (4-6-8) и (4-6-6) находим эффективную длину плеча $l_{\text{эф}}$ диполя, каковым является незаряженный проводящий шар в электростатическом поле

$$l_{\text{эф}} = \frac{p_{\text{э}}}{q_0} = \frac{4}{3} a. \quad (4-6-8a)$$

Очевидно, что эффективные значения поверхности, объема и длины плеча незаряженного проводникового тела, внесенного в первичное электростатическое поле, определяются не только геометрическими размерами тела, но и видом первичного поля.

Диэлектрический шар в однородном электростатическом поле. Так как диэлектрик содержит связанные заряды, то под воздействием первичного поля происходит его поляризация — ориентация и растяжение молекулярных диполей. Этот процесс не изменяет суммарного заряда диэлектрика, который в любом макроскопическом объеме равен нулю. Однако на границах диэлектрика возникают связанные нескомпенсированные заряды, которые создают вторичное поле в окружающем пространстве и поле, прошедшее внутрь диэлектрического шара.

Если незаряженный диэлектрический шар помещен в

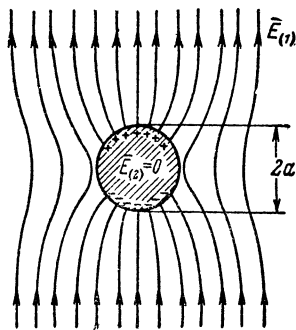


Рис. 4-30. Структура поля, возмущенного проводящим шаром.

первичное однородное поле, то на основании выражения (4-6-4) потенциал дифрагированного поля вне диэлектрического шара

$$\varphi_{(1)} = -Er \cos \vartheta + \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta). \quad (4-6-9)$$

Потенциал поля внутри диэлектрического шара $\varphi_{(2)}$ определяется выражением (4-1-5а), которое, однако, не должно содержать отрицательных степеней r , так как при $r=0$ потенциал имеет конечное значение, т. е. $C_{2n}=0$ и

$$\varphi_{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} r^n P_n(\cos \vartheta). \quad (4-6-10)$$

Граничные условия (4-1-7) на поверхности шара ($r=a$) при $\kappa=0$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial r} &= \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial r}; \\ \varphi_{(1)} &= \varphi_{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (4-6-11)$$

Подставляя сюда выражения (4-6-9) и (4-6-10), получаем систему уравнений для определения коэффициентов C_{1n} и C_{2n} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \left[-E \cos \vartheta - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} (n+1) a^{-(n+2)} P_n(\cos \vartheta) \right] &= \\ &= \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} n a^{(n-1)} P_n(\cos \vartheta); \\ -Ea \cos \vartheta + \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} a^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} a^n P_n(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\cos \vartheta$ находим, что $C_{1n}=C_{2n}=0$ при $n \neq 1$;

$$C_{21} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E a^3,$$

$$C_{11} = -\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E.$$

Подставляя эти значения в формулы (4-6-9) и (4-6-10), получаем выражения, определяющие потенциал и напряженность дифрагированного поля вне шара:

$$\varphi_{(1)} = -Er \cos \vartheta \left[1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \frac{a^3}{r^3} \right]; \quad (4-6-12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(1)} = -\operatorname{grad} \varphi_{(1)} = E \left\{ \mathbf{e}_r \left[1 + 2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \left(\frac{a^3}{r^3} \right) \right] \cos \vartheta - \right. \\ \left. - \mathbf{e}_\vartheta \left[1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \frac{a^3}{r^3} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4-6-12a)$$

и поля, прошедшего внутрь шара:

$$\varphi_{(2)} = - \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E r \cos \vartheta; \quad (4-6-13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 = -\operatorname{grad} \varphi_{(2)} = E \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} (\mathbf{e}_r \cos \vartheta - \\ - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta) = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (4-6-13a).$$

Из этих уравнений следует:

$$\varphi_S = \varphi_{(1)}|_{r=a} = \varphi_{(2)}|_{r=a} = - \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E a \cos \vartheta \neq 0,$$

т. е. потенциал на поверхности незаряженного диэлектрического шара, внесенного в однородное первичное поле, не равен нулю.

Равенство $\varphi_{(1)}|_{r=a} = \varphi_{(2)}|_{r=a}$ вытекает из формулы (4-1-6).

Из выражения (4-6-13a) следует, что прошедшее поле однородно и совпадает по направлению с невозмущенным полем (рис. 4-31). При $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(1)} = E \left[\mathbf{e}_r \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \vartheta \right], \\ \mathbf{E}_{(2)} = 0. \end{aligned}$$

Полученное выражение для $\mathbf{E}_{(1)}$ совпадает с выражением (4-6-7), определяющим напряженность дифрагированного поля при внесении в него проводящего шара. Отсюда следует, что проводящий шар в электростатическом поле формально можно рассматривать как диэлектрический с $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$.

Бесконечно длинный диэлектрический цилиндр в однородном электростатическом поле, перпендикулярном оси цилиндра, т. е. $\mathbf{E} = \mathbf{e}_2 E$

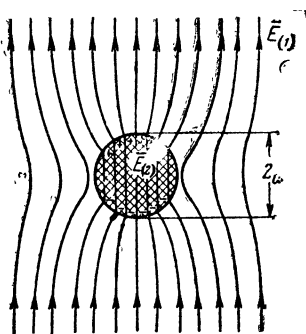


Рис. 4-31. Структура поля, возмущенного диэлектрическим шаром.

(рис. 4-32). При этом потенциал первичного поля

$$\varphi = -Ex_2 = -Er \cos \alpha.$$

Так как в этом случае вторичное поле также не зависит от координаты x_1 , то его потенциал определяется решением уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат (Д-6-23в)

$$\varphi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} r^n + C_{2n} r^{-n}) (A_{1n} \cos n\alpha + A_{2n} \sin n\alpha). \quad (4-6-14)$$

Так как поле симметрично относительно оси x_2 , а потенциал φ_0 на бесконечности равен нулю, то выражение (4-6-14) не должно содержать членов с $\sin n\alpha$, r^n и постоянных по величине, т. е. $A_{2n} = C_{1n} = 0$ при любом n и $C_{20} = 0$. Ввиду этого потенциал в любой точке вне цилиндра определяется выражением

$$\varphi_{(1)} = -Er \cos \alpha +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} r^{-n} A_{1n} \cos n\alpha. \quad (4-6-15)$$

Применительно к полю внутри цилиндра, вследствие конечности потенциала в его центре и симметрии поля, в уравнении (4-6-14) $C_{2n} = A_{2n} = 0$ при любом значении n . Поэтому потенциал поля, прошедшего внутрь цилиндра,

$$\varphi_{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} r^n A_{1n} \cos n\alpha. \quad (4-6-16)$$

На поверхности цилиндра удовлетворяются граничные условия (4-6-11); подставляя в эти формулы выражения (4-6-15) и (4-6-16), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 \left(E \cos \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} n C_{2n} a^{-(n+1)} A_{1n} \cos n\alpha \right) = \\ = \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} n a^{(n-1)} A_{1n} \cos n\alpha; \end{aligned}$$

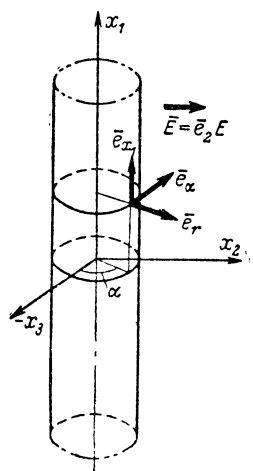


Рис. 4-32. К определению поля, возмущенного цилиндром.

$$\begin{aligned}
 -Ea \cos \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} a^{-n} A_{1n} \cos n\alpha = \\
 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} a^n A_{1n} \cos n\alpha.
 \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых $\cos n\alpha$, находим, что

$$A_{1n} C_{2n} = A_{1n} C_{1n} = 0 \text{ при } n \neq 1;$$

$$C_{11} A_{11} = -\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E;$$

$$C_{21} A_{11} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E a^2.$$

С учетом полученных значений коэффициентов на основании выражений (4-6-15) и (4-6-16) напряженность дифрагированного поля

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{(1)} = -\text{grad } \varphi_{(1)} = E \left[\mathbf{e}_r \left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \alpha - \right. \\
 \left. - \mathbf{e}_\alpha \left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \alpha \right], \quad (4-6-17)
 \end{aligned}$$

а напряженность прошедшего поля

$$\mathbf{E}_{(2)} = -\text{grad } \varphi_{(2)} = 2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \mathbf{E}. \quad (4-6-18)$$

Как и в случае диэлектрического шара, поле внутри цилиндра однородно и направлено одинаково с невозмущенным полем \mathbf{E} .

В случае проводящего цилиндра выражение для напряженности дифрагированного поля получим из (4-6-17), положив $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$,

$$\mathbf{E}_{(1)} = E \left[\mathbf{e}_r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \alpha - \mathbf{e}_\alpha \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \alpha \right]. \quad (4-6-19)$$

Из формул (4-6-13а) и (4-6-18) видно, что поле внутри диэлектрического шара и диэлектрического цилиндра меньше первичного поля, если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Причиной этому являются появляющиеся на поверхности этих тел индуцированные заряды, которые создают поле, противоположное внешнему. В общем случае напряженность поля внутри диэлектрического тела ($\varepsilon_2 > 1$) любой формы

эллипсоида вращения, находящегося в среде с $\epsilon_1 = 1$, определяется выражением

$$E_{(2)} = \frac{E}{1 + \chi_{\epsilon} n_{\epsilon}}, \quad (4-6-20)$$

где χ_{ϵ} — электрическая восприимчивость вещества;
 n_{ϵ} — коэффициент деполяризации, учитывающий форму эллипсоида.

В диэлектрическом теле произвольной формы поле не только ослабляется, но и становится неоднородным; только в телах, имеющих форму эллипсоида вращения

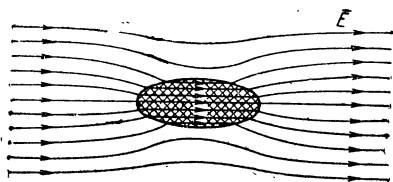


Рис. 4-33. Структура поля, возмущенного диэлектрическим эллипсоидом вращения.

(рис. 4-33), к каковым относятся шар и бесконечно длинный цилиндр, поле остается однородным. Значения коэффициента деполяризации для тел различной формы приведены в табл. 4-1.

Таблица 4-1

Коэффициенты деполяризации n_{ϵ} и размагничивания n_m для различных тел

Пластина перпенди- кулярна полю	Шар	Эллипсоиды вращения с отношением осей				Цилиндр бесконеч- но длинный
		10	20	50	100	
		Поле направлено вдоль длины				
1	$\frac{1}{3}$	0,203	0,0068	0,0014	0,0004	0

Проводящий незаряженный эллипсоид в однородном электростатическом поле. Если тело имеет форму эллипсоида, то уравнение Лапласа (4-1-5) с учетом (Д-3-60) переписывается в эллипсоидальной системе координат (рис. Д-11). При этом потенциал пер-

вичного однородного поля $\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E$, направленного вдоль оси a эллипсоида с учетом первой формулы (Д-3-58) определяется выражением

$$\varphi = -E x_1 = \frac{E}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}} \sqrt{(\zeta + a^2)(\eta + b^2)(\xi + c^2)}.$$

Потенциал вторичного поля, создаваемого индуцированными зарядами на больших расстояниях от эллипсоида, определяется формулой

$$\varphi_0 = \frac{E x_1}{r^3} \frac{abc}{3\gamma}.$$

Здесь

$$\gamma = \frac{1 - e^2}{2e^3} \left(\ln \frac{1 + e}{1 - e} - 2e \right).$$

Для вытянутого эллипсоида ($a > b = c$) эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Дальнейшее исследование поля состоит в использовании выражения (4-6-1а)

$$\varphi_{(1)} = \varphi + \varphi_0$$

и определении напряженности дифрагированного (возмущенного) внешнего поля

$$\mathbf{E}_{(1)} = -\text{grad } \varphi_{(1)}.$$

4-7. ЭНЕРГИЯ И СИЛЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Энергия электростатического поля, создаваемого системой из n заряженных проводников и объемным зарядом, распределенным в окружающем их диэлектрике, на основании формулы (1-6-10) определяется следующим выражением:

$$W_3 = \int_V w_3 dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \text{grad } \varphi dV. \quad (4-7-1)$$

Согласно равенству (Д-3-20)

$$\mathbf{D} \text{grad } \varphi = \text{div} (\varphi \mathbf{D}) - \varphi \text{div } \mathbf{D}. \quad (4-7-2)$$

Согласно теореме Остроградского — Гаусса (Д-3-30)

$$\int_V \text{div} (\varphi \mathbf{D}) dV = \oint_S \varphi \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_{S_0} \varphi \mathbf{D} d\mathbf{S} + \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \varphi \mathbf{D} d\mathbf{S}, \quad (4-7-2a)$$

где S_0 — поверхность, ограничивающая всю систему;
 S_i — поверхность i -го проводника.

Учитывая выражения (4-7-2), (4-7-2a) и уравнение III системы (1-4-10), согласно равенству (4-7-1) получим:

$$W_3 = -\frac{1}{2} \int_{S_i} \varphi \mathbf{D} dS - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \varphi D_n dS + \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV,$$

где ρ — плотность заряда, распределенного в области V .

Если заряд сосредоточен только в этой области (уединенный заряд), то первый член правой части последнего равенства равен нулю (так как в этом случае интегрирование можно распространить на бесконечное пространство и заряд этот можно рассматривать как точечный). Действительно, подставляя под знак интеграла выражения (4-2-1) и (4-2-2) и интегрируя по поверхности сферы, получим:

$$\oint_{S_i} \varphi \mathbf{D} dS = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{q}{4\pi \epsilon_a r} \frac{q}{4\pi \epsilon_a r^2} \rightarrow 0.$$

Так как на поверхности любого i -го проводника $D_n = -\kappa_i$ (нормаль направлена внутрь проводника) и потенциал каждого проводника постоянен на всей его поверхности, то

$$\oint_{S_i} \varphi D_n dS = \varphi_i \oint_{S_i} \kappa_i dS = \varphi_i q_i,$$

где q_i и φ_i — соответственно заряд и потенциал i -го проводника.

Окончательный вид выражения для энергии поля

$$W_3 = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i. \quad (4-7-3)$$

Если расстояние между зарядами q_i достаточно велико, то их можно рассматривать как точечные.

Подчеркнем, что энергия, определяемая выражением (4-7-3), заключена не в самих зарядах, а в их электрическом поле и распределена в окружающем пространстве. Первое слагаемое в правой части этого выражения представляет энергию поля заряда, распределенного в диэлектрической среде

$$W_p = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV, \quad (4-7-3a)$$

а второе — энергию поля зарядов, распределенных на проводниках

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i. \quad (4-7-3б)$$

Энергия поля проводников. В системе проводников потенциал каждого из них на основе выражения (4-4-6) равен:

$$\varphi_i = \varphi_{ii} + \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} \quad (k \neq i).$$

При этом выражение (4-7-3б) принимает вид:

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_{ii} q_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, k \\ (k \neq i)}}^n \varphi_{ik} q_i. \quad (4-7-3в)$$

Первый член правой части выражения (4-7-3в) представляет «собственную» энергию системы проводников, а второй — энергию взаимодействия. Подставляя в (4-7-3в) выражение (4-4-7) или (4-4-6а), получаем:

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} \sum_{i, k}^n c_{ik} \varphi_i \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{i, k}^n \alpha_{ik} q_i q_k.$$

Эта формула удобна для вычисления энергии системы проводников, находящихся на конечных расстояниях друг от друга.

Энергия заряженного конденсатора как системы двух заряженных уединенных проводников определяется выражением

$$W_C = \int_{V_C} \omega_0 dV;$$

здесь интегрирование производится по всему объему V_C , в котором распределено электрическое поле конденсатора. Этот объем будем называть объемом конденсатора. Последнее выражение можно представить в таком виде:

$$W_C = V_C \omega_{00}, \quad (4-7-4)$$

где ω_{00} — усредненная по объему плотность электрической энергии поля.

В плоском конденсаторе (рис. 4-18) поле практически однородно, ввиду чего с учетом выражения (1-6-10)

$$\omega_{\text{э}0} = \omega_{\text{э}} = \frac{\varepsilon_a E^2}{2} = \frac{\varepsilon_a U^2}{2d^2},$$

$$V_C = Sd.$$

Объем цилиндрического конденсатора длиной l (рис. 4-17) и средняя плотность энергии в нем [см. выражение (4-5-6)] соответственно равны:

$$V_C = \pi (a_2^2 - a_1^2) l;$$

$$\omega_{\text{э}0} = \frac{1}{\pi (a_2^2 - a_1^2)} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\varepsilon_a E_r^2}{2} 2\pi r dr = \frac{\varepsilon_a U^2}{(a_2^2 - a_1^2) \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right)}.$$

Вместе с тем на основе выражения (4-7-3б) энергия любого заряженного конденсатора

$$W_C = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) q;$$

с учетом равенства (4-5-3а)

$$W_C = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (4-7-4a)$$

Из выражения (4-7-4а) следует, что уменьшение емкости конденсатора при постоянном заряде вызывает увеличение энергии поля конденсатора. Это увеличение энергии происходит за счет работы внешних сил (механических или электрических), изменяющих емкость конденсатора, и может быть использовано для усиления электрического сигнала (параметрический усилитель).

Если в электростатическое поле внести незаряженный проводник, то энергия этого поля уменьшается. При этом на поверхности проводника индуцируются заряды, проводник поляризуется и его можно характеризовать электрическим моментом. Проводящий незаряженный шар, внесенный в первичное поле с напряженностью E , приобретает электрический момент

$$p_{\text{э}} = V_{\text{эф}} \varepsilon_a E$$

[см. выражение (4-6-6)]. Согласно формуле (4-6-5б) потенциал вторичного поля, создаваемого таким электри-

ческим диполем в удаленной точке, равен:

$$\varphi_0 = e_r \frac{p_3}{4\pi\epsilon_a r^2}.$$

На основании выражения (4-7-36) создаваемая индуцированными зарядами энергия вторичного поля

$$W_n = \frac{1}{2} \varphi_0 q,$$

где q — удаленный заряд, создающий первичное поле напряженностью E . В результате подстановки в это выражение потенциала φ_0 получаем:

$$W_n = \frac{1}{2} (e_r p_3) \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2} \right).$$

Но так как $-e_r \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2} = E$ (орт e_r направлен от проводника к заряду, создающему поле), то

$$W_n = - \frac{1}{2} (p_3 E). \quad (4-7-5)$$

Знак минус в этом выражении указывает на то, что внесение незаряженного проводника в поле заряженных проводников уменьшает энергию этого поля; физически это объясняется тем, что электростатическое поле не проникает внутрь внесенного проводника, вследствие чего наличие последнего в системе заряженных проводников уменьшает объем, в котором распределено электростатическое поле; следовательно, согласно выражению (4-7-4) при данном неизменном заряде системы энергия ее поля уменьшается.

Примером этого явления может служить уменьшение энергии плоского конденсатора с «воздушным» диэлектриком при внесении в него незаряженного проводника в виде толстой пластины (рис. 4-34). Объем конденсатора при этом уменьшается из-за уменьшения диэлектрического зазора; вместе с тем согласно выражению (4-7-4) при данном неизменном заряде q , существовавшем до внесения проводящей пластины, уменьшается энергия конденсатора.

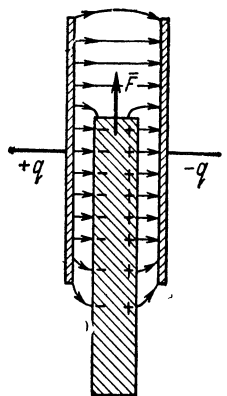


Рис. 4-34. «Воздушный» конденсатор втягивает проводниковую пластинку.

Можно показать, что уменьшение энергии конденсатора равно объему внесенной пластины, умноженному на плотность энергии в диэлектрике. Эта энергия электростатического поля затрачивается на работу по перемещению пластины.

Другим простым примером уменьшения энергии поля проводников является уменьшение энергии заряженного конденсатора при присоединении к нему другого, незаряженного конденсатора. При этом за время перехода зарядов в присоединенный конденсатор энергия электростатического поля расходуется на излучение и на поглощение в соединительных проводах.

Уменьшение энергии электростатического поля при введении в него незаряженных проводников является следствием теоремы Томпсона. Согласно этой теореме заряды на проводниках в электростатическом поле распределяются так, что энергия поля оказывается минимальной.

Из выражений (4-7-4a) и (4-5-7) следует, что введение в плоский воздушный конденсатор диэлектрической пластины толщиной b с проницаемостью $\epsilon > 1$ также уменьшает его энергию; относительное уменьшение энергии

$$\frac{\Delta W_a}{W_c} = \frac{b}{d} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right). \quad (4-7-5a)$$

Пондеромоторные силы, действующие на проводники в электростатическом поле. Проводники (заряженные или незаряженные) не могут находиться в электростатическом поле в устойчивом равновесии под влиянием одних только электростатических сил (теорема Ирншоу). Это означает, что в электростатическом поле минимума энергии $W_a(x_i)$ не существует, ибо только система, находящаяся в устойчивом состоянии, обладает минимумом энергии. Физически неустойчивое равновесие электростатической системы объясняется тем, что разноименные заряды всегда притягиваются с возрастающей силой вплоть до совпадения, а одноименные — всегда отталкиваются вплоть до расхождения их в бесконечность.

Такое представление, однако, не применимо к атомной структуре вещества. Действительно, хотя каждый атом можно считать системой точечных зарядов (расстояние между электронами и положительными ядрами

порядка 10^{-8} см, а размеры самих частиц порядка 10^{-12} см, т. е. значительно меньше этих расстояний), тем не менее атомы являются устойчивыми системами. Вследствии этого остается предположить, что атом является динамической системой, и, следовательно, построение модели атома в соответствии с законами электростатики невозможно. Представление об устойчивом периодическом (или квазипериодическом) движении электрических частиц в недрах атомов лежит в основе современной теории материи.

Чтобы формально исключить движение элементарных заряженных частиц, нужно предполагать существование силовых связей неэлектростатического происхождения, обеспечивающих требуемую устойчивость заряженной системы. В связи с этим предполагается, что на поверхности проводника существуют силы неэлектростатического происхождения, препятствующие выходу зарядов в окружающее пространство. Эти силы должны быть равны и противоположны по направлению электрическим пондеромоторным силам, плотность которых может быть определена на основании выражения (1-6-19). Если на проводнике имеется поверхностный заряд, то напряженность поля

$$E = n_0 \frac{\kappa}{\varepsilon_a},$$

где n_0 — орт нормали, направленной от проводника.

Следовательно,

$$p_z = n_0 \frac{\varepsilon_a E^2}{2} = n_0 \frac{\kappa^2}{2\varepsilon_a} = n_0 w_z. \quad (4-7-6)$$

Давление направлено от проводника, т. е. его объем в электростатическом поле увеличивается в пределах противодействия сил реакции связи.

Изменение объема проводника под действием растягивающих электрических сил (явление электрострикции) в общем случае связано с изменением его формы. Однако эта деформация обычно весьма мала, вследствие чего явление электрострикции можно рассматривать как изменение объема проводника с сохранением его формы. Относительное изменение объема проводника равно давлению [см. выражение (4-7-6)], умноженному на коэффициент всестороннего растяжения материала проводника.

Сила, действующая на находящийся в электростатическом поле проводник, может быть определена как сила, действующая на электрический диполь с моментом p_a , который приобретает данный проводник, находясь в электростатическом поле. Равнодействующая сила, приложенная к находящемуся в электростатическом поле диполю, равна:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}' - q\mathbf{E}'' = q(\mathbf{E}' - \mathbf{E}'').$$

Разность $\mathbf{E}' - \mathbf{E}''$ равна приращению напряженности поля \mathbf{E} на отрезке, равном длине диполя l . Так как величина l мала, то разность эта в общем случае неоднородного поля определяется величиной

$$(\mathbf{E}' - \mathbf{E}'') = l \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l} = (l \nabla) \mathbf{E}.$$

Отсюда

$$\mathbf{F} = q(l \nabla) \mathbf{E} = (p_a \nabla) \mathbf{E} \quad [H]. \quad (4-7-7)$$

Таким образом, действующая на диполь сила \mathbf{F} тем больше, чем больше неоднородность поля. В однородном поле силы, действующие на полюсы диполя, равны по величине, противоположны по направлению и, следовательно, взаимно уравниваются. Это означает, что незаряженный проводник остается неподвижным только в однородном поле; в неоднородном поле он увлекается в область наибольшей напряженности поля.

Энергия электростатического поля в диэлектрике имеет большую плотность, чем в вакууме. Действительно, на основании выражения (1-6-10)

$$w_3 = \frac{D\mathbf{E}}{2} = \frac{\epsilon_a E^2}{2}, \quad (4-7-8)$$

т. е. плотность энергии в диэлектрике в ϵ раз больше, чем в вакууме при той же напряженности поля.

Возникновение электрического поля в диэлектрике с квазиупругими диполями связано с поляризацией его молекул (с раздвижением зарядов диполей). Силы поля совершают работу на преодоление кулоновых и квазиупругих сил неэлектрического происхождения, обуславливающих взаимопривлечение зарядов. Когда расстояние между зарядами диполя увеличивается на величину l , то силы электрического поля совершают работу, в то время как диполем приобретаетась равная этой ра-

боте упругая энергия $\gamma l^2/2$, где γ — коэффициент упругости диполя.

Так как на основании выражения (4-7-5) энергия диполя равна $\frac{1}{2} \mathbf{p}_0 \mathbf{E}$, величина упругой энергии

$$\frac{\gamma l^2}{2} = \frac{1}{2} \mathbf{p}_0 \mathbf{E}. \quad (4-7-9)$$

Здесь \mathbf{p}_0 — электрический момент диполя.

На основании последнего выражения плотность энергии в таком диэлектрике

$$w_0 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{2} N \mathbf{p}_0 \mathbf{E};$$

в этом выражении N — число квазиупругих диполей в единице объема диэлектрика.

Диэлектрики с «твердыми диполями» в отличие от квазиупругих не обладают запасом внутренней энергии, меняющейся в зависимости от напряженности поля. Кроме того, поляризация диэлектриков с «твердыми диполями», заключающаяся только в ориентации (вращении) диполей, существенно зависит от теплового движения молекул, препятствующего насыщению поляризации. Вследствие этого поляризация такого диэлектрика, влияя на тепловое движение его молекул, связана с поглощением или выделением тепла. Можно показать, что в данном случае величина $w_0 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$ выражает плотность «свободной» энергии электрического поля такого диэлектрика, т. е. равна работе, затрачиваемой на приращение обратимого изотермического процесса в данной среде. Отметим, что при поляризации диэлектрика, вносимого в электростатическое поле, обычно выделяется незначительное количество тепла, не имеющее практического значения.

Сила, действующая на единицу объема диэлектрика. В случае слабо поляризующегося диэлектрика ($\chi_0 < 1$) плотность силы согласно равенству (4-7-7) может быть выражена в виде

$$\mathbf{f} = N (\mathbf{p}_0 \nabla) \mathbf{E} = (N \mathbf{p}_0 \nabla) \mathbf{E} = \chi_0 \epsilon_0 (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E} \quad [\text{н/м}^3]. \quad (4-7-10)$$

Так как согласно выражению (Д-3-22) с учетом того, что $\text{rot } \mathbf{E} = 0$,

$$(\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E} = \frac{1}{2} \nabla E^2,$$

то имеет место отношение

$$\mathbf{f} = \frac{\chi_3 \varepsilon_0 \nabla E^2}{2}, \quad (4-7-11)$$

т. е. плотность пондеромоторных сил в диэлектрике пропорциональна градиенту квадрата напряженности поля. Силы эти направлены в сторону возрастания абсолютной величины вектора \mathbf{E} независимо от его направления (так как при изменении направления вектора \mathbf{E} изменяется и направление поляризации \mathbf{P}). Следовательно, в электростатическом поле диэлектрик (как и проводник) увлекается в область наибольшей напряженности поля.

4-8. МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Магнитостатическое поле согласно выражению (1-4-16) описывается следующими уравнениями:

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m.$$

Это поле существует в пространстве около постоянного магнита (рис. 4-35, *а*), соленоида с катушкой, при которой электрические силовые линии в окружающем пространстве практически не обнаруживаются (рис. 4-35, *б*), и около соленоида, приведенного в сверхпроводящее состояние.

Подобно электростатическому магнитостатическое поле можно рассматривать как частный случай монохроматического поля, полагая $T \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow \infty$.

Поскольку структура уравнений магнитостатического поля

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= 0; \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0; \\ \mathbf{B} &= \mu_a \mathbf{H}; \\ B_{n(1)} &= B_{n(2)}; \\ H_{\tau(2)} &= H_{\tau(1)} \end{aligned} \right\} \quad (4-8-1)$$

одинакова со структурой уравнений электростатики для области, не содержащей свободных зарядов, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; & D_{n(1)} &= D_{n(2)}; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0; & E_{\tau(2)} &= E_{\tau(1)}, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_a \mathbf{E}; \end{aligned} \right\} \quad (4-8-2)$$

то при решении уравнений магнитостатики можно пользоваться решениями уравнений электростатики с заменой в них \mathbf{E} на \mathbf{H} и ε_a на μ_a . При этом ρ_a заменяется на $\mu_a \rho_m$.

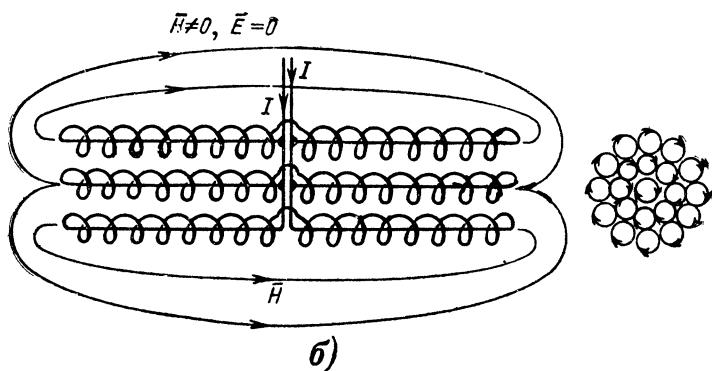
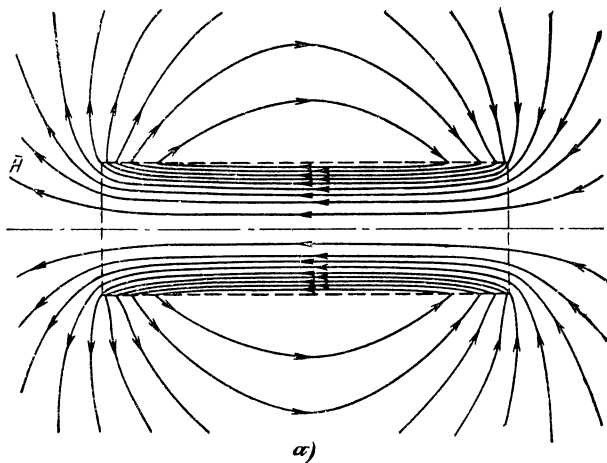


Рис. 4-35. Магнитостатические поля постоянного магнита и соленоидов.

Если произвести такую замену в формулах (4-2-4) и (4-2-5), то получим формулы, определяющие потенциал и напряженность поля магнитного диполя, или, что то же самое, поля намагниченного тела с магнитным моментом \mathbf{p}_M :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_M &= \frac{\mathbf{p}_M \mathbf{e}_r}{4\pi r^2}; \\ \mathbf{H} &= \frac{p_M}{4\pi r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos \vartheta + \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (4-8-3)$$

Проводя такую же замену в уравнениях (4-6-17) и (4-6-18), получим выражение для напряженностей дифрагированного поля и поля внутри цилиндра, внесенного в однородное первичное магнитное поле:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_{(1)} &= H \left[\mathbf{e}_r \left(1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \alpha - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{e}_\alpha \left(1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \alpha \right]; \\ \mathbf{H}_{(2)} &= 2 \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (4-8-4)$$

Здесь μ_1 — магнитная проницаемость внешней среды;
 μ_2 — магнитная проницаемость материала цилиндра.

В случае шара согласно выражениям (4-6-12а) и (4-6-13а) напряженности поля

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_{(1)} &= H \left[\mathbf{e}_r \left(1 + 2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \vartheta - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{e}_\vartheta \left(1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \vartheta \right]; \\ \mathbf{H}_{(2)} &= 3 \frac{\mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (4-8-5)$$

Поле внутри цилиндра, шара и в общем случае эллипсоида, помещенного в однородное магнитное поле, однородно и параллельно внешнему полю (рис. 4-36).

Аналогично деполяризации в диэлектриках в помещенных в первичное магнитостатическое поле магнетиках наблюдается явление размагничивания.

Магнитное поле внутри эллипсоида вращения при $\mu_1 = 1$ определяется аналогично выражению (4-6-20)

$$\mathbf{H}_{(2)} = \frac{H}{1 + \chi_M n_M}, \quad (4-8-6)$$

где n_m — коэффициент размагничивания, зависящий от формы тела, но не зависящий от его материала. Коэффициенты размагничивания для эллипсоидов вращения различной формы приведены в табл. 4-1.

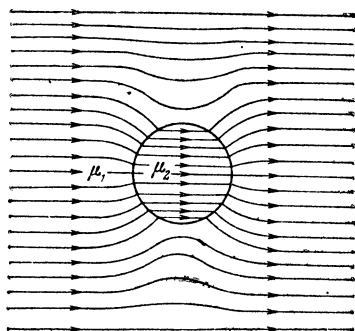


Рис. 4-36. Железный цилиндр в магнитостатическом поле, $\mu_2 > \mu_1$.

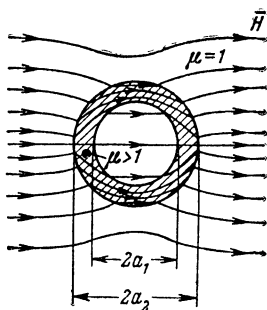


Рис. 4-37. Магнитное экранирование.

Можно показать, что внутри полого шара или полого цилиндра (рис. 4-37) магнитное поле ослабляется в k раз, причем для шара

$$k = 1 + \frac{2}{9} \left(1 - \frac{a_1^3}{a_2^3} \right) \left(\mu + \frac{1}{\mu} - 2 \right) \quad (4-8-7)$$

и для цилиндра

$$k = 1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right) \left(\mu + \frac{1}{\mu} - 2 \right). \quad (4-8-8)$$

При увеличении толщины стенок и их магнитной проницаемости магнитостатическое экранирование улучшается. Однако вследствие того, что магнитные силовые линии всегда замкнуты, полное экранирование магнитостатического поля принципиально не осуществимо (в отличие от экранирования электростатического поля); вещества с большой магнитной проницаемостью позволяют осуществить магнитное экранирование, лишь приближающееся к полному.

Полное экранирование статического магнитного поля может быть осуществлено с использованием сверхпроводникового материала, поскольку у него в сверхпроводящем состоянии $\chi_m \approx -1$, т. е. $\mu \approx 0$. Однако такой

экран действует лишь при экранировании полей с напряженностью меньше $H_{кр}$.

Аналогично выражению (4-6-1) преломление магнитостатического поля определяется соотношением

$$\frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{\operatorname{ctg} \theta} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (4-8-9)$$

Из этой формулы следует, что при $\mu_2 \rightarrow \infty$ поверхность раздела вакуум — ферромагнетик будет эквипотенциаль-

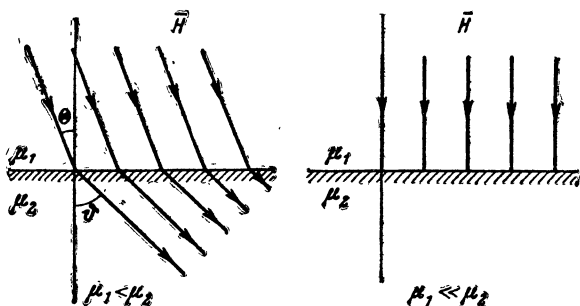


Рис. 4-38. Преломление линий магнитостатического поля.

ной поверхностью на которой $H_\tau \approx 0$ и на которую как бы «опираются» линии H_n (рис. 4-38).

Согласно выражению (1-6-11) энергия статического магнитного поля

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} dV \quad [\text{дж}],$$

а ее плотность

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} = \frac{\mu_a H^2}{2} \quad [\text{дж}/\text{м}^3].$$

Следовательно, энергия в магнетике в μ раз больше, чем в вакууме при этой же напряженности поля.

Сила притяжения магнитом согласно выражению (1-6-19) равна:

$$F = w_m 2S = \mu_a H^2 S. \quad (4-8-10)$$

Здесь S — площадь сечения полюса магнита (рис. 4-39).

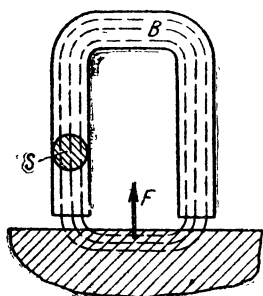


Рис. 4-39. К расчету силы притяжения магнита.

ГЛАВА ПЯТАЯ СТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЕ

5-1. УРАВНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ

Стационарное, не меняющееся во времени, поле создается равномерно движущимися зарядами, т. е. постоянным током. Такое поле описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}, \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5-1-1)$$

Последнее из этих уравнений указывает на то, что поле вектора \mathbf{J} соленоидально, т. е. линии тока замкнуты.

Волновые уравнения (1-7-6) и (1-7-7) при стационарном поле переходят в уравнения Пуассона

$$\left. \begin{aligned} \Delta A &= -\mu_a \mathbf{J}; \\ \Delta \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_a}, \end{aligned} \right\} \quad (5-1-2)$$

решение которых, согласно (Д-6-7а), имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV; \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho}{r} dV. \end{aligned} \right\} \quad (5-1-2a)$$

Напряженности поля связаны с электромагнитными потенциалами согласно (1-1-3) и (1-1-4) соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A}; \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5-1-3)$$

В области, не содержащей сторонних источников, как и в случае статических полей, уравнения (1-7-6) и (1-7-7) переходят в уравнения Лапласа

$$\Delta A=0, \quad \Delta \varphi=0, \quad (5-1-4)$$

решение которых в соответствующей системе координат дается (Д-6-12а), а также (4-1-5а) и (4-6-14).

Постоянные интегрирования при решении уравнений (5-1-1) и (5-1-4) находят из удовлетворения граничным условиям (1-5-1), (1-5-3), (1-5-6), (1-5-8), (1-5-11) и (1-5-12). Эти условия можно свести к следующим: а) на границе любых сред потенциал непрерывен, т. е. $\varphi_{(1)}=\varphi_{(2)}$ [см. выражение (4-1-6)]; б) на границе проводник — проводник

$$\sigma_2 \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial n}; \quad (5-1-5)$$

в) на границе диэлектрик — проводник

$$-\frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial \tau} = E_{\tau(2)} = \frac{J}{\sigma_2}; \quad (5-1-6)$$

$$-\frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial n} = E_{n(1)} = -\frac{\kappa}{\epsilon_{a1}}. \quad (5-1-7)$$

Условие (5-1-5) совпадает с первым условием для электростатического поля [см. равенства (4-1-7)], когда $\frac{\partial \kappa}{\partial t}=0$

$$\epsilon_{a2} \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial n} = \epsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial n}$$

при замене в нем ϵ_a на σ ; вследствие же наличия токов проводимости, создающих стационарное поле, условие (5-1-6) отличается от второго условия (4-1-8), согласно которому

$$\frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial \tau} = 0.$$

Уравнения стационарного поля, так же как и уравнения статических полей, можно написать на основании уравнений монохроматического поля, подставляя в них $T \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow \infty$. При этом векторы \mathbf{H} и \mathbf{E} стационарного поля можно определить как соответствующие амплитуды монохроматического поля, поскольку при стационарном поле каждая точка пространства характеризуется обоими векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Электрическое поле в диэлектрической среде, не содержащей зарядов и окружающей проводник с постоянным током

$$I = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S},$$

согласно (5-1-1), (5-1-3) и (5-1-4) описывается следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0; \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi; \Delta \varphi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5-1-8)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями электростатического поля (4-1-9), видим, что они совпадают. Однако граничные условия стационарного поля [выражения (5-1-5) — (5-1-7)] отличаются от граничных условий для электростатического поля [выражения (4-1-7) — (4-1-8)]. В случае электростатического поля поверхность проводника эквипотенциальна, т. е. $E_\tau = 0$ [см. выражение (4-3-1)]. В стационарном же поле касательная составляющая вектора \mathbf{E} в направлении линии тока, т. е. $E_\tau = J/\sigma \neq 0$, и электрические силовые линии отходят от поверхности проводника не по нормальям, как это имеет место в электростатическом поле. В силу этого электрическое поле постоянного тока вне проводника характеризуется составляющими

$$\left. \begin{aligned} E_n &\neq 0; \\ E_\tau &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (5-1-9)$$

В большинстве практических случаев $E_n \gg E_\tau$ и поэтому наличием продольного поля в окружающем пространстве при расчетах пренебрегают. При таком допущении граничные условия для стационарного поля совпадают с условиями для электростатического поля. Поэтому при рассмотрении электрического поля в пространстве между проводниками с постоянным током можно воспользоваться решением соответствующих электростатических задач. Так, например, напряженность электрического поля внутри коаксиального кабеля, по которому протекает постоянный ток, определяется выражением (4-5-6), а напряженность элект-

рического поля в пространстве между проводниками ленточной линии — выражением (4-5-8).

Внутри проводника с постоянным током напряженность электрического поля не равна нулю; на основании выражения (1-2-1)

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}, \quad (5-1-10)$$

тогда как электростатическое поле в этом случае отсутствует ($\mathbf{E} = 0$).

Магнитное поле, создаваемое проводом с током (рис. 5-1), в точке $M(r)$ определяется на основании первой формулы (5-1-2а). Так как линии тока непрерывны ($\text{div } \mathbf{J} = 0$), то ток I постоянен в любом сечении проводника и векторный потенциал

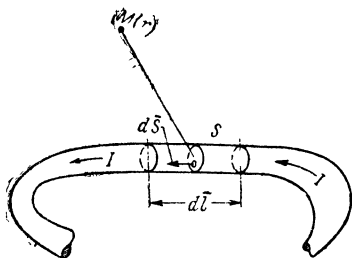


Рис. 5-1. К определению поля проводника с постоянным током.

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} dV}{r} = \frac{\mu_a}{4\pi} \iint_{S_L} \frac{\mathbf{J} dS d\mathbf{l}}{r} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}}{r}. \quad (5-1-11)$$

Эта формула пригодна для определения векторного потенциала поля на большом расстоянии (по сравнению с линейными размерами поперечного сечения проводника).

Используя соотношения (5-1-3), с помощью формулы (5-1-11) находим напряженность магнитного поля проводника с постоянным током

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \text{rot} \int_L \frac{d\mathbf{l}}{r} = \frac{I}{4\pi} \int_L \text{rot} \left(\frac{d\mathbf{l}}{r} \right);$$

здесь интегрирование и дифференцирование производятся в различных точках пространства (интегрирование по контуру проводника, а дифференцирование в той точке, где определяется напряженность поля).

На основании формулы (Д-3-21)

$$\text{rot} \left(\frac{d\mathbf{l}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot } d\mathbf{l} + \left[\text{grad } \frac{1}{r} d\mathbf{l} \right];$$

здесь $\text{rot } d\mathbf{l} = 0$, так как $d\mathbf{l}$ не зависит от координат точки, в которой определяется \mathbf{H} , а

$$\left[\text{grad } \frac{1}{r} d\mathbf{l} \right] = -\frac{1}{r^2} [\mathbf{e}_r, d\mathbf{l}] = \frac{1}{r^2} [d\mathbf{l} \mathbf{e}_r],$$

где \mathbf{e}_r — орт радиуса-вектора.

С учетом этих соотношений находим:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{e}_r]}{r^2}. \quad (5-1-12)$$

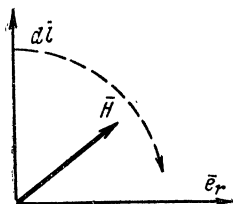


Рис. 5-2. К определению направления магнитного поля.

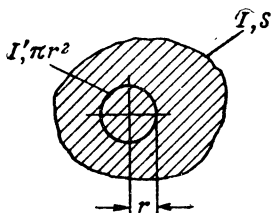


Рис. 5-3. К определению магнитного поля внутри проводника.

Полученное выражение представляет закон Био-Савара в интегральной форме; в дифференциальной форме оно имеет следующий вид:

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^2} [d\mathbf{l} \mathbf{e}_r]. \quad (5-1-13)$$

Из последних двух выражений следует, что направление вектора \mathbf{H} совпадает с направлением вращения правого винта, если его поступательное движение совпадает с направлением вектора $d\mathbf{l}$ (или направлением тока) (рис. 5-2).

Если плотность тока одинакова по всему сечению проводника S , то магнитное поле H внутри проводника на расстоянии r (рис. 5-3) создается только частью тока, определяемой соотношением

$$I' = \frac{I}{S} \pi r^2. \quad (5-1-14)$$

Подчеркнем, что магнитное поле внутри проводника имеет вихревой характер, так как в этой области $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, а вне проводника — потенциальный, так как здесь $\text{rot } \mathbf{H} = 0$.

5-2. ПОЛЕ ПРОВОДА С ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

Поле прямолинейного бесконечно длинного провода (рис. 5-4). Так как линии тока замкнуты ($\text{div } \mathbf{J}=0$), то можно предположить, что обратный ток течет по окружающему провод коаксиальному цилиндру с бесконечно большой радиальной толщиной. Пусть радиус провода a_1 , внутренний радиус цилиндра a_2 и внешний его радиус $a_3 \rightarrow \infty$. Так как при этих условиях плотность тока, протекающего в окружающем цилиндре, равна нулю, то этот цилиндр не будет влиять на структуру поля провода и магнитное поле определяется с помощью первого интегрального уравнения Максвелла (1-3-1).

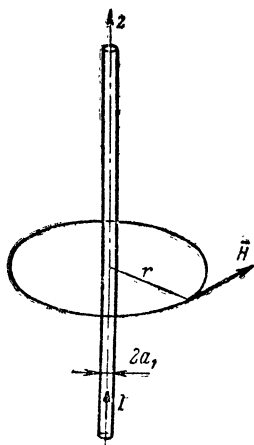


Рис. 5-4. К определению поля прямолинейного бесконечно длинного провода.

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I. \quad (5-2-1)$$

Согласно выражению (5-1-12) магнитные силовые линии лежат в плоскостях, перпендикулярных оси провода, а направление их определяется направлением вращения правого винта, поступательное движение которого совпадает с направлением тока. Та-

ким образом, на основании выражений (5-2-1) и (5-1-12) получаем, что при $r < a_1$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a_1^2} r \mathbf{e}_\alpha \quad (5-2-2)$$

и при $r > a_1$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\alpha. \quad (5-2-3)$$

Напряженность магнитного поля внутри проводника при удалении от его оси возрастает пропорционально r , а вне проводника уменьшается пропорционально $1/r$. Наибольшей величины напряженность магнитного поля достигает на поверхности провода ($r=a_1$); здесь

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a_1} \mathbf{e}_\alpha. \quad (5-2-4)$$

Электрическое поле внутри провода направлено вдоль оси; согласно выражению (5-1-10) при $r \leq a_1$

$$\mathbf{E} = \frac{I}{\pi a_1^2 \sigma} \mathbf{e}_z \quad (5-2-5)$$

и при $a_2 \leq r \leq \infty$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = 0. \quad (5-2-6)$$

Электрическое поле между цилиндром и проводом определяется уравнениями

$$\Delta \varphi = 0; \quad (5-2-7)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad (5-2-7a)$$

и следующими граничными условиями: при $r = a_1$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{I}{\pi a_1^2 \sigma} \quad (5-2-8)$$

и при $r = a_2$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (5-2-8a)$$

Так как эти условия от ϑ и z не зависят, то $\varphi = R(r)z$ и согласно уравнению (5-2-7)

$$\frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$R = A \ln r + B.$$

Постоянные A и B находятся из удовлетворения граничным условиям (5-2-8) и (5-2-8a). При этом

$$R = -\frac{I \ln \frac{r}{a_2}}{\pi a_1^2 \sigma \ln \frac{a_1}{a_2}}$$

и напряженность электрического поля между проводом и цилиндром определяется выражениями

$$E_z = -R = \frac{I \ln \frac{r}{a_2}}{\pi a_1^2 \sigma \ln \frac{a_1}{a_2}}; \quad (5-2-9)$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Iz}{\pi a_1^2 \sigma r \ln \frac{a_1}{a_2}}. \quad (5-2-10)$$

Таким образом, электрическое поле прямолинейного провода с током имеет не только поперечную, но и продольную составляющие.

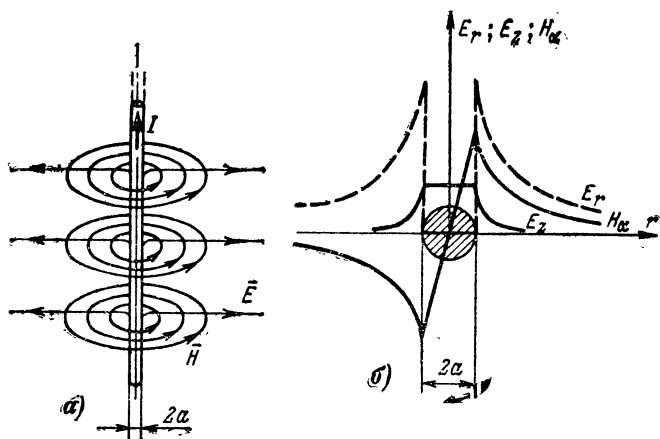


Рис. 5-5. Электромагнитное поле прямолинейного провода с постоянным током.

а — структура поля; б — эпюры составляющих поля.

На поверхности провода имеет место скачок E_r , т. е. существует поверхностный заряд с плотностью

$$\kappa = \epsilon_a E_r = \frac{\epsilon_a I z}{\pi a_1^3 \sigma \ln \frac{a_1}{a_2}}.$$

Заряд этот мал, так как отношение ϵ_a/σ для проводника мало.

На рис. 5-5, построенном на основании формул (5-2-2), (5-2-3), (5-2-5), (5-2-9) и (5-2-10), изображена структура электромагнитного поля. Силовые линии электрического поля провода с постоянным током, в отличие от электростатического поля, не являются нормальными к поверхности провода.

Напряжение между проводом и цилиндром, по которому течет обратный ток, определяется согласно (5-2-10) выражением

$$U = \int_{a_1}^{a_2} E_r dr = - \frac{Iz}{\pi a_1^2 \sigma}. \quad (5-2-10a)$$

Заряд, приходящийся на единицу длины провода,

$$\tau = 2\pi a_1 \kappa = \frac{2\pi \epsilon_a U}{\ln \frac{a_2}{a_1}}.$$

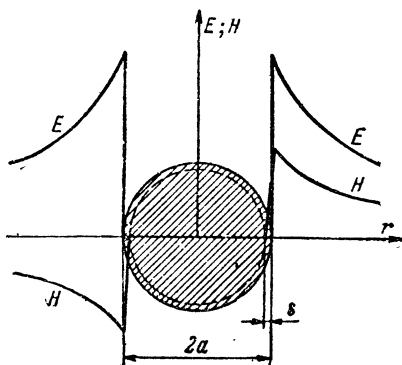


Рис. 5-6. Эпюры напряженностей стационарного поля, создаваемого текущим в сверхпроводнике током. Распределение E и H в плоскости поперечного сечения проводника.

Начало координат $z=0$ можно выбирать произвольно. Эту координату можно отождествить с серединой провода, но так как рассматривается бесконечный провод, то положение «середины» неопределенно.

Если проводник, по которому протекает постоянный ток, находится в состоянии сверхпроводимости (см. § 1-2), характеризующейся параметрами $\sigma \rightarrow \infty$ и $\chi_m = -1$, то электрическое и магнитное поле внутри такого провода отсутствуют (рис. 5-6). Это означает, что протекающий по сверхпроводнику постоянный ток сосредоточивается теоретически в бесконечно тонком поверхностном слое; практически его толщина $\delta \approx 10^{-5} \div 10^{-6}$ см.

В поверхностном слое толщиной приблизительно 28 происходит убывание напряженности магнитного поля H от максимального значения до нуля.

Подчеркнем, что поверхностный эффект постоянного тока в сверхпроводнике по своей природе отличается от поверхностного эффекта переменного тока, рассмотренного в главах 2 и 3.

Следует также обратить внимание на различие свойств сверхпроводника и идеального проводника, заключающегося в том, что у последнего $\chi_m \geq 0$. Поэтому внутри идеальнотокпроводящей среды $E=0$, $H \neq 0$, а внутри сверхпроводящей среды $E=0$ и $H=0$.

На основе выражений (1-2-8) и (5-2-4) определяется критическое значение тока $I_{кр}$ в круглом проводе, при котором исчезает состояние сверхпроводимости

$$\left. \begin{aligned} I_{кр} &= 2\pi a H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_{пер}} \right)^2 \right]; \\ J_{кр} &= \frac{2}{a} H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_{пер}} \right)^2 \right]; \end{aligned} \right\} \quad (5-2-11)$$

здесь a — радиус провода.

На рис. 5-7 показана зависимость напряженностей электрического и магнитного полей внутри круглого сплошного провода, находящегося в состоянии сверхпроводимости

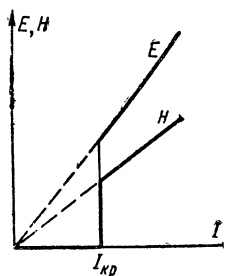


Рис. 5-7. Величины E и H в точке r ($0 < r \leq a$) сверхпроводника в зависимости от величины тока.

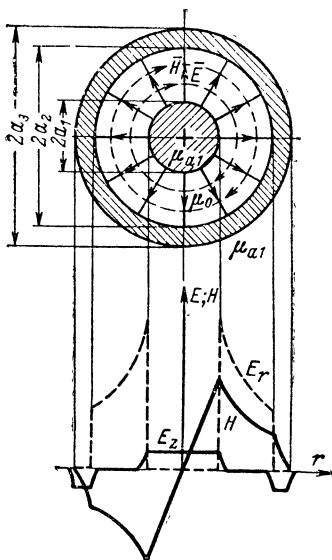


Рис. 5-8. Поле постоянного тока в коаксиальном кабеле.

сти, от величины протекающего по этому проводу тока.

Поле коаксиального кабеля. Поперечное сечение такого кабеля изображено на рис. 5-8. Полагая, что ток I во внутреннем проводе диаметром $2a_1$ и во внешнем проводе с диаметрами $2a_2$ и $2a_3$ течет в противоположных направлениях, на основании выражения (5-2-1) получим:

при $0 \leq r \leq a_1$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a} \frac{r}{a} \mathbf{e}_a; \quad (5-2-12)$$

при $a_1 \leq r \leq a_2$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_a; \quad (5-2-12a)$$

при $a_2 \leq r \leq a_3$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \frac{a_3^2 - r^2}{a_3^2 - a_2^2} \mathbf{e}_a. \quad (5-2-12б)$$

Напряженность магнитного поля снаружи кабеля равна нулю, что следует из уравнения

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I - I = 0$$

(токи текут в противоположных направлениях).

Напряженность электрического поля между внутренним и внешним проводом определяется решением уравнения (5-2-7) при следующих граничных условиях:

при $r = a_1$

$$E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{I}{\pi a_1^2 \sigma}$$

и при $r = a_2$

$$E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{I}{\pi (a_3^2 - a_2^2) \sigma}.$$

При этом получаем:

$$E_z = \frac{I}{\pi a_1^2 \sigma \ln \frac{a_1}{a_2}} \left(\ln \frac{r}{a_2} + \frac{a_1^2 \ln \frac{r}{a_1}}{a_3^2 - a_2^2} \right); \quad \left. \vphantom{\frac{I}{\pi a_1^2 \sigma \ln \frac{a_1}{a_2}}} \right\} \quad (5-2-13)$$

$$E_r = \frac{Iz}{\pi a_1^2 \sigma r \ln \frac{a_1}{a_2}} \left(1 + \frac{a_1^2}{a_3^2 - a_2^2} \right). \quad (5-2-13)$$

Согласно выражению (5-1-10) напряженность электрического поля внутри проводов равна:
при $0 \leq r \leq a_1$

$$E = E_z = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}; \quad (5-2-13a)$$

и при $a_2 \leq r \leq a_3$

$$E = E_z = - \frac{I}{\pi (a_3^2 - a_2^2) \sigma}. \quad (5-2-13б)$$

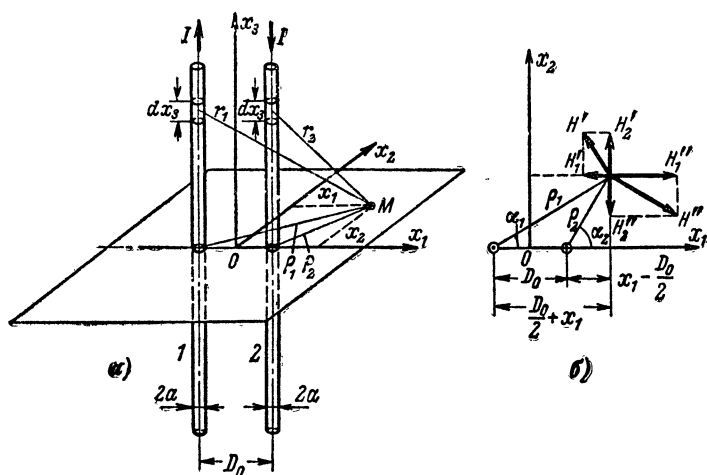


Рис. 5-9. К расчету магнитного поля двухпроводной линии.

Поле двухпроводной линии (рис. 5-9). Используя выражение (5-1-11), найдем векторный потенциал в произвольной точке M на плоскости Ox_1x_2 , перпендикулярной оси x_3 , параллельно которой расположены оба провода. Векторный потенциал, создаваемый током, текущим в левом проводе,

$$A_1 = \frac{\mu_a I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_3 dx_3}{r_1}.$$

Векторный потенциал, создаваемый током, текущим в правом проводе, выражается этой же формулой, отличаясь знаком и заменой r_1 на r_2 . На основании этого можно написать:

$$A_2 = -\frac{\mu_a I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_3 dx_3}{r_2}$$

и

$$A = A_1 + A_2 = e_3 \frac{\mu_a I}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_3}{r_1} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_3}{r_2} \right].$$

Имея в виду, что $r_1 = \sqrt{x_3^2 + \rho_1^2}$, $r_2 = \sqrt{x_3^2 + \rho_2^2}$

$$\text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_3}{\sqrt{x_3^2 + \rho^2}} = -2 \ln \rho$$

находим, что

$$A_3 = -\frac{\mu_a I}{2\pi} \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right), \quad (5-2-14)$$

т. е. векторный потенциал искомого поля имеет только одну составляющую, совпадающую с направлением тока.

Сравнивая выражения (5-2-14) и (4-2-7), находим, что поверхности постоянного векторного потенциала совпадают с эквипотенциальными поверхностями заряженных нитей и, следовательно, с поверхностями параллельных заряженных проводов круглого сечения. В пересечении с плоскостью Ox_1x_2 эти линии представляют окружности, определяемые уравнением (4-2-10).

На основании соотношений (5-1-3) находим проекции вектора \mathbf{H} . Так как $A_1 = A_2 = 0$, то

$$H_1 = \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A_3}{\partial x_2}, \quad H_2 = -\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \quad \text{и} \quad H_3 = 0.$$

Подставляя A_3 из формулы (5-2-14) и учитывая, что согласно рис. 5-9

$$\rho_1 = \sqrt{\left(x_1 + \frac{D_0}{2}\right)^2 + x_2^2}; \quad \rho_2 = \sqrt{\left(x_1 - \frac{D_0}{2}\right)^2 + x_2^2},$$

получаем для поля вне проводников следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{I}{2\pi} x_2 \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right), \\ H_2 &= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{\left(x_1 - \frac{D_0}{2} \right)}{\rho_2^2} - \frac{\left(x_1 + \frac{D_0}{2} \right)}{\rho_1^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (5-2-15)$$

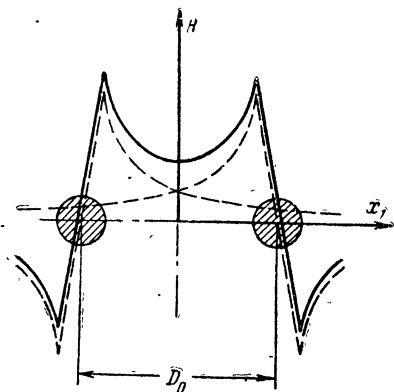


Рис. 5-10. Распределение магнитного поля двухпроводной линии.

для поля внутри проводника (например, правого)

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{I}{2\pi} x_2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\rho_1^2} \right); \\ H_2 &= -\frac{I}{2\pi} \left[\frac{\left(x_1 - \frac{D_0}{2} \right)}{a^2} - \frac{\left(x_1 + \frac{D_0}{2} \right)}{\rho_1^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (5-2-16)$$

здесь a — радиус провода.

На рис. 5-10 показано распределение магнитного поля двух параллельных проводов с током.

Магнитные силовые линии токов описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_1}{H_1} = \frac{dx_2}{H_2}$$

или

$$H_1 dx_2 - H_2 dx_1 = 0.$$

Выражая в последнем уравнении компоненты H_1 и H_2 через A , получаем:

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2} dx_2 = dA = 0,$$

т. е. $A = \text{const}$ и, следовательно, магнитные линии совпадают с линиями постоянного векторного потенциала.

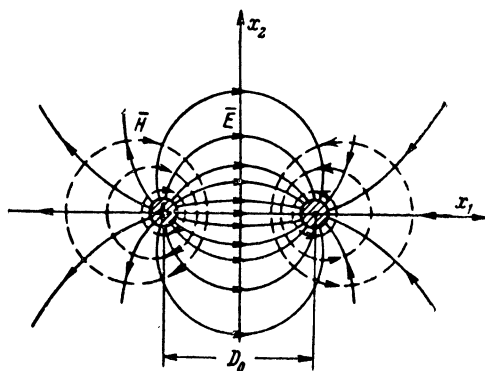


Рис. 5-11. Структура поля двухпроводной линии.

Электрическое поле внутри проводов двухпроводной линии определяется выражением (5-1-10); внешнее поле сконцентрировано между проводами и практически состоит из радиальной составляющей E_r . Структура электромагнитного поля двухпроводной линии постоянного тока приведена на рис. 5-11.

Поле прямолинейного полого провода. Представляет практический интерес определение поля в полости провода с поперечным сечением S (рис. 5-12, а), по которому течет постоянный ток I плотностью $\mathbf{J} = \mathbf{e}_z I$.

Для решения этой задачи воспользуемся суперпозицией известных решений. Предварительно определим поле в точке $M(\rho, \alpha)$ для случая, если бы полость в проводе отсутствовала. В соответствии с формулой (5-2-2) при условии такого размещения начала координат, при котором наибольшее значение ρ за пределы сечения S не выходит, напряженность магнитного поля в этой точке

$$\mathbf{H}_{(M)} = \mathbf{e}_\alpha \frac{I}{2} \frac{\rho}{S} = [\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho] \frac{J}{2} \rho.$$

Предположим, что по сечению полости S_0 , заполненной тем же веществом, из которого состоит проводник, течет ток плотностью $\mathbf{J}' = -\mathbf{J}$. Добавление этого тока приводит к тому, что суммарный ток в полости будет равен нулю. Найдем в той же точке $M(\rho, \alpha)$ поле, создаваемое этим током. Для этого проведем окружность, касательную к радиусу-вектору \mathbf{e}_ρ в точке M , с наибольшим диаметром $2a$, однако, с условием, что эта окружность не пересекает контур площади S_0 (рис. 5-12, а). Тогда напряженность магнитного поля в точке M , создаваемого током с плотностью $-\mathbf{J}$, будет согласно формуле (5-2-3) равна:

$$\mathbf{H}'_{(M)} = -\frac{\pi a^2 J}{2\pi a} [\mathbf{e}_3 \mathbf{a}_0] = -[\mathbf{e}_3 \mathbf{a}_0] \frac{J}{2} a.$$

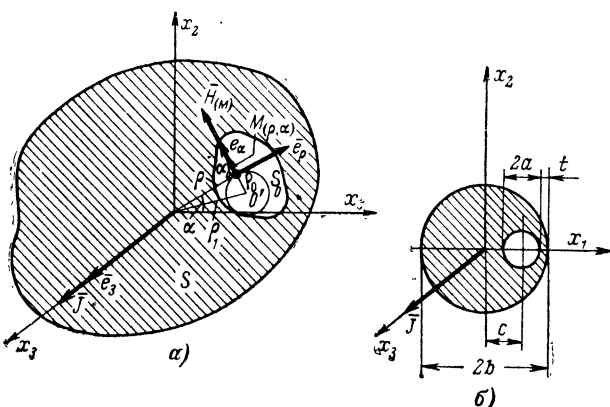


Рис. 5-12. К расчету поля в полости прямолинейного провода с постоянным током.

а — произвольное сечение; б — круглое сечение.

Складывая найденные напряженности полей $\mathbf{H}_{(M)}$ и $\mathbf{H}'_{(M)}$, получаем:

$$\mathbf{H} = \frac{J}{2} \rho \left\{ [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_\rho] - \frac{a}{\rho} [\mathbf{e}_3 \mathbf{a}_0] \right\}$$

или

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2} \frac{\rho}{S} \left[\mathbf{e}_3 \left(\mathbf{e}_\rho - \frac{a}{\rho} \mathbf{a}_0 \right) \right]. \quad (5-2-17)$$

Если сечения S и S_0 есть окружности с радиусами b и a (см. рис. 5-12, б), то проводя ось x_1 через центры окружностей, будем иметь $S = \pi(b^2 - a^2)$, $\rho = (c + a)$, $\left(\mathbf{e}_\rho - \frac{a}{\rho} \mathbf{a}_0 \right) = \mathbf{e}_\rho \left(1 - \frac{a}{\rho} \right)$, и, следовательно,

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_2 \frac{I}{2\pi} \frac{c}{(b^2 - a^2)}. \quad (5-2-18)$$

Как видим, в полости поле направлено по оси x_2 и однородно по всему сечению полости. Последнее обстоятельство имеет практический интерес в тех случаях, когда требуется получить однородное поле на большой длине.

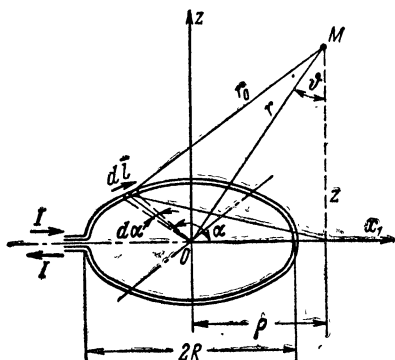
Выражение (5-2-18) показывает также, что поле в полости полого провода отличается от поля на поверхности сплошного проводника множителем $cb/b^2 - a^2$, в котором размеры a и c ограничены общим диаметром провода $2b$ и толщиной стенки t .

5-3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ КРУГОВОГО ТОКА

Поле круглого витка радиусом R (рис. 5-13) найдем, определив векторный потенциал в точке M вертикальной плоскости zOx_1 . Предполагая, что расстояние от точки, в которой определяется поле, до проводника ве-

Рис. 5-13. К расчету магнитного поля кругового тока.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} K &= 1 + 2 \frac{k^2}{8} + 9 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 + \\ &+ 50 \left(\frac{k^2}{8} \right)^3 + \frac{1225}{4} \left(\frac{k^2}{8} \right)^4 + \dots \\ \frac{2}{\pi} N &= 1 - 2 \frac{k^2}{8} - 3 \left(\frac{k^2}{8} \right)^2 - \\ &- 10 \left(\frac{k^2}{8} \right)^3 - \frac{175}{4} \left(\frac{k^2}{8} \right)^4 - \dots \end{aligned}$$



лико по сравнению с линейными размерами поперечного сечения последнего, согласно формуле (5-1-11) векторный потенциал определяют выражением

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l}}{r_0}.$$

Разлагая $d\mathbf{l}$ на составляющие $dl_1 = \sin \alpha \, dl = R \sin \alpha \, d\alpha$ и $dl_2 = \cos \alpha \, dl = R \cos \alpha \, d\alpha$ и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \sin \alpha \, d\alpha = 0,$$

находим:

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_\alpha A_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \frac{\mu_a I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R \cos \alpha \, d\alpha}{r_0},$$

т. е. векторный потенциал витка с током имеет только азимутальную составляющую A_α .

Подставляя в последнее выражение

$$r_0 = [z^2 + R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha]^{1/2},$$

получаем:

$$A_\alpha = \frac{\mu_a I}{2\pi} \int_0^\pi R [z^2 + R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha]^{-1/2} \cos \alpha d\alpha \quad (5-3-1)$$

или

$$A_\alpha = \frac{\mu_a I}{\pi k} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K - N \right]. \quad (5-3-2)$$

Здесь K и N — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; они определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} K &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}; \\ N &= \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (5-3-3)$$

в которых

$$\theta = \frac{(\pi - \alpha)}{2}, \quad (5-3-4)$$

$$k^2 = \frac{4\rho R}{[(R + \rho)^2 + z^2]}. \quad (5-3-5)$$

Значения K и N даются в подписи к рис. 5-13.

Используя выражение $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}$ [см. первое выражение (5-1-3)], находим составляющие магнитного поля витка:

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha &= 0; \\ H_\rho &= \frac{I}{2\pi\rho} \frac{z}{[(R + \rho)^2 + z^2]^{1/2}} \left[-K + \frac{R^2 + \rho^2 + z^2}{(R - \rho)^2 + z^2} N \right]; \\ H_z &= \frac{I}{2\pi} \frac{1}{[(R + \rho)^2 + z^2]^{1/2}} \left[K + \frac{R^2 - \rho^2 - z^2}{(R - \rho)^2 + z^2} N \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5-3-6)$$

Составляющие магнитного поля в плоскости витка ($z=0$) определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha &= 0, \\ H_\rho &= 0, \\ H_z &= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{K}{(R+\rho)} + \frac{N}{(R-\rho)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5-3-6a)$$

Напряженность магнитного поля на оси витка, т. е. при $\rho=0$, $k=0$ и $K=N=\frac{\pi}{2}$ определяется формулой

$$H_z = \frac{I}{2} \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (5-3-7)$$

Напряженность поля в центре витка

$$H_z = \frac{I}{2R}. \quad (5-3-7a)$$

Напряженность магнитного поля у поверхности проводника, имеющего формулу петли (виток), по формулам (5-3-6) определить нельзя, так как при выводе их предполагалось, что линейные размеры сечения проводника малы по сравнению с z и ρ . Однако для сравнительной оценки поля определим напряженность на небольшом расстоянии a от оси бесконечно тонкого проводника в плоскости петли, полагая $a \ll R$. Тогда, подставляя в третье выражение (5-3-6a) $\rho = (R-a)$, находим, что

$$H_z \Big|_{\rho=(R-a)} \approx 1,1 \left(1 + \frac{a}{R} \right) \frac{I}{2\pi a}.$$

Напряженность магнитного поля прямолинейного бесконечно тонкого провода на таком же расстоянии a определяется выражением (5-2-3), согласно которому $H = I/2\pi a$. Таким образом, поле на поверхности провода кольцевой петли больше, чем у одиночного прямолинейного провода.

Напряженность поля в удаленной точке $M(r)$ можно выразить через векторный потенциал [см. формулу (5-3-1)], учитывая соотношение $\rho = r \sin \vartheta$ и полагая, что при $R \ll r$

$$(z^2 + R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos \alpha)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \sin \vartheta \cos \alpha \right).$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\approx \mathbf{e}_\alpha \frac{\mu_a I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \sin \vartheta \cos \alpha \right) \cos \alpha \, d\alpha \approx \\ &\approx \mathbf{e}_\alpha \frac{\mu_a I}{4} \frac{R^2}{r^2} \sin \vartheta, \end{aligned}$$

или, обозначая согласно (1-2-16) $p_M = IS$, где S — площадь витка, получаем:

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\mu_a p_M}{4\pi r^2} \sin \vartheta.$$

Отсюда

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{p_M}{4\pi r^3} (\mathbf{e}_r 2\cos \vartheta + \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta). \quad (5-3-8)$$

Сравнивая последнее выражение с (4-8-3), видим, что магнитный диполь с моментом

$$\mathbf{p}_M = \mathbf{e}_z IS \quad (5-3-9)$$

физически можно представить как виток с током.

На основании этого любой замкнутый проводник (виток) с током (рис. 5-14) может быть представлен как система элементарных замкнутых проводников (витков), по каждому из которых протекает ток такой же величины и направления, как и в реальном проводнике. Очевидно, что создаваемое всеми элементарными витками суммарное поле такое же, как и поле, создаваемое реальным витком, поскольку протекающие по общим границам соприкасающихся элементов токи всюду взаимно компенсируются, за исключением внешнего контура.

Поэтому петлю с током можно рассматривать как намагниченный листок, который обладает магнитным моментом, определяемым по формуле (5-3-9).

Как следует из (5-3-6) и (5-3-8), магнитное поле одного витка с током неоднородно. В то же время для многих практических целей в локализованной области пространства важно иметь однородное магнитное поле. Такое поле может быть создано системой нескольких витков с током. В частности, нетрудно показать, что поле в средней части пространства между двумя витками будет практически однородным при условии, если витки расположены на одной оси с расстоянием между

ними, равным их радиусу. В еще большей области можно создать однородное поле цилиндрической катушкой с большим числом витков, длина которой значительно больше ее диаметра.

Поле цилиндрической катушки. По формулам (5-3-6) для напряженностей магнитного поля витка с током можно определить также напряженности магнитного поля соленоида — цилиндрической катушки, состоящей из w витков (рис. 5-15). Полагая, что витки намотаны

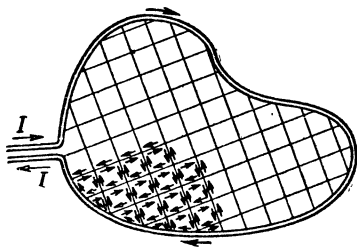


Рис. 5-14. Замкнутый виток и эквивалентная ему система элементарных витков.

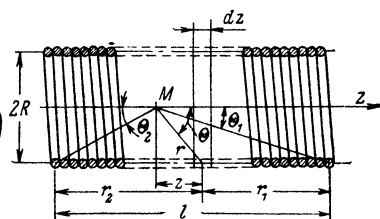


Рис. 5-15. К расчету поля цилиндрической катушки с плотной намоткой.

вплотную друг к другу, соленоид можно заменить полым цилиндром, по которому течет круговой ток wI . С помощью формулы (5-3-7) определим поле, создаваемое элементом dz цилиндра в точке M , находящейся на оси катушки:

$$dH_z = \frac{w}{l} dz \frac{I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Так как

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}},$$

а

$$d(\cos \theta) = \frac{R^2 dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

то

$$dH_z = \frac{w'I}{2} d(\cos \theta),$$

где ω' — число витков на единицу длины соленоида.

Следовательно,

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z \frac{\omega' I}{2} \int_{(\pi-\theta_2)}^{\theta_1} d(\cos \theta) = \mathbf{e}_z \frac{\omega' I}{2} (\cos \theta_2 + \cos \theta_1). \quad (5-3-10)$$

Из этой формулы следует, что в центре катушки диаметром $D=2R$ и длиной l напряженность магнитного поля

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z \omega' I \frac{l}{\sqrt{l^2 + D^2}}. \quad (5-3-11)$$

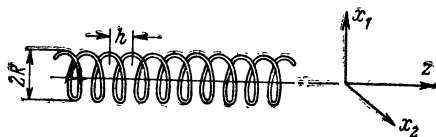


Рис. 5-16. К расчету поля цилиндрической катушки с большим шагом намотки.

Напряженность магнитного поля в бесконечно длинной цилиндрической катушке ($l \rightarrow \infty$)

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z \omega' I. \quad (5-3-12)$$

Если витки катушки намотаны в один слой с шагом h (рис. 5-16), то поле будет содержать, помимо компоненты H_z [см. выражение (5-3-11)], также и компоненты по осям x_1 и x_2 . В частном случае бесконечно длинной катушки поле на ее оси будет определяться следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= 0, \\ H_2 &= -\omega' I [\omega' \pi D K_0(\omega' \pi D) + K_1(\omega' \pi D)], \\ H_3 &= \omega' I, \end{aligned} \right\} \quad (5-3-13)$$

где $K_0(\omega' \pi D)$ и $K_1(\omega' \pi D)$ — модифицированные функции Бесселя 2-го рода [см. формулу (Д-6-32а)].

Поле тороида. Рассмотрим магнитное поле постоянного тока, возникающее в тороиде, представляющем собою замкнутую магнитную цепь (рис. 5-17, а). Поле «однородного» тороида, т. е. имеющего одинаковую магнитную проницаемость и равномерную обмотку по всей

длине, практически полностью сосредоточено в сердечнике тороида.

Для упрощения расчетов полагаем сечение тороида прямоугольным ($a \times b$). На основе закона полного тока [см. формулу (1-3-1)] напряженность магнитного поля в сердечнике

$$H(r) = \frac{I\omega}{2\pi r}. \quad (5-3-14)$$

На основании формулы (1-3-5) полный магнитный поток, пронизывающий все сечение тороида,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{R_1}^{R_2} \mu_a H(r) b dr = \mu_a \frac{I\omega}{2\pi} b \ln \frac{R_2}{R_1} = \\ &= \mu_a \frac{I\omega S}{2\pi (R_2 - R_1)} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \quad (5-3-15)$$

или

$$\Phi = \frac{\omega I}{R_M}. \quad (5-3-15a)$$

Произведение ωI в этой формуле называется магнито-движущей силой, а величина

$$R_M = \frac{l_M}{\mu_a S} \quad (5-3-16)$$

сопротивлением магнитной цепи.

В последней формуле $S = ab$ — сечение магнитопровода, $l_M = 2\pi R_0 \xi$ — длина магнитопровода, где $R_0 = (R_1 + R_2)/2$ — средний радиус тороида, в коэффициент ξ определяется рядом

$$\frac{1}{\xi} = \frac{\ln \left(\frac{1 + a/2R_0}{1 - a/2R_0} \right)}{2 \left(\frac{a}{2R_0} \right)} = 1 + \frac{\left(\frac{a}{2R_0} \right)^2}{3} + \frac{\left(\frac{a}{2R_0} \right)^4}{5} + \frac{\left(\frac{a}{2R_0} \right)^6}{7} + \dots$$

поскольку $0 < \frac{a}{2R_0} < 1$.

На рис. 5-18 дается график $\xi(a/2R_0)$, из которого видно, что если $a/2R_0 < 0,5$, то при технических расчетах можно принимать $\xi \approx 1$. Величина, обратная R_M , называется проводимостью магнитной цепи.

Рассмотрим тороид с зазором (рис. 5-17, б), заполненным материалом с $\mu=1$ и длиной $L_3=\Delta L_M$, причем $\Delta < 1$. В дальнейшем будем называть его «воздушным зазором». Сопротивление всей магнитной цепи в этом случае

$$R_M = \frac{(1-\Delta)L_M}{\mu_a S} + \frac{\Delta L_M}{\mu_0 S} = \frac{\Delta L_M}{\mu_0 S} \left(1 + \frac{1-\Delta}{\Delta \mu} \right). \quad (5-3-17)$$

Если сердечник тороида (магнитопровод) изготовлен из ферромагнетика («железный»), то $\mu \gg 1$, $\frac{1-\Delta}{\Delta \mu} \ll 1$,

$$R_M \approx \frac{\Delta L_M}{\mu_0 S}, \quad (5-3-18)$$

т. е. сопротивление магнитной цепи всего тороида с воздушным зазором в этом случае приблизительно равно магнитному сопротивлению зазора. Вследствие этого, несмотря на то что в ферромагнетике имеет место нелинейная зависимость $B=f(H)=F(\omega I)$, в ферромагнитном тороиде с воздушным зазором магнитный поток является линейной функцией намагничивающего тока. По этой причине ферромагнитопроводы с воздушным зазором широко

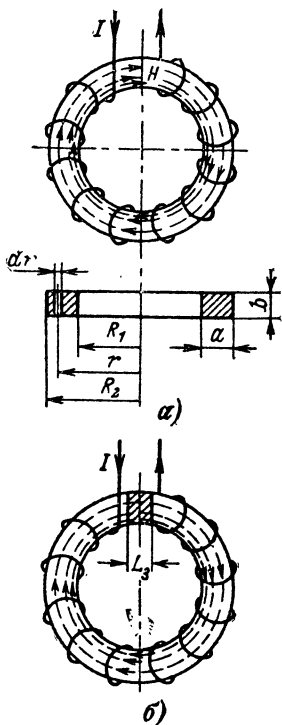


Рис. 5-17. К расчету магнитного поля тороида (замкнутой магнитной цепи).

а — тороид однородный;
б — тороид с «воздушным» зазором.

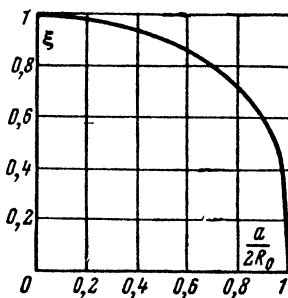


Рис. 5-18. Зависимость коэффициента ξ от отношения $a/2R_0$.

применяют в технике, когда необходимо иметь устройство с большим магнитным потоком, пропорциональным току (рис. 5-19).

При наличии воздушного зазора и при расположении обмотки не на всей длине магнитопровода возникает рассеяние магнитного потока (рис. 5-20), т. е. магнитная индукция по длине магнитопровода не остается постоянной. В этом случае магнитный поток в воздушном зазоре составляет часть потока, определяемого формулой (5-3-15), т. е. $\Phi_3 = \Phi - \Phi_{\text{расс}}$. Отсюда

$$\Phi_3 = (1 - k_{\text{расс}}) \Phi;$$

здесь

$$k_{\text{расс}} = \left(1 - \frac{\Phi_3}{\Phi}\right) = \frac{\Phi_{\text{расс}}}{\Phi} \quad (5-3-19)$$

— безразмерный коэффициент магнитного рассеяния.

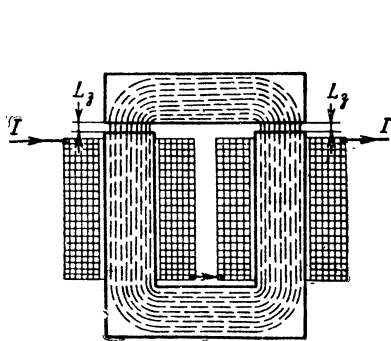


Рис. 5-19. Дроссель с железным сердечником и воздушным зазором.

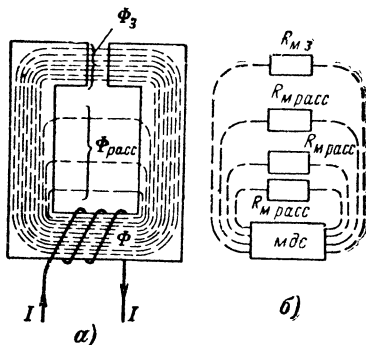


Рис. 5-20. Магнитопровод с рассеянием (а) и его эквивалентная схема (б).

Точное определение величины $k_{\text{расс}}$ расчетным путем во многих практических случаях является сложной задачей, так как при этом необходимо учитывать распределенную по длине магнитопровода проводимость магнитной цепи, вызываемую потоком рассеяния (рис. 5-20). В связи с этим величину $k_{\text{расс}}$ обычно определяют экспериментально (прямым измерением или моделированием).

Для создания в воздушном зазоре магнитопровода или внутри соленоида магнитного поля с большой напряженностью требуется значительная мощность постоянного тока в обмотке, величина которой ограничивается условиями отвода образующегося при этом тепла.

Мощность постоянного тока в обмотке магнитопровода для соленоида

$$P \approx \frac{H^2}{\sigma} . \quad (5-3-20)$$

Если обмотку изготовить из сверхпроводника ($\sigma \rightarrow \infty$), то мощность, необходимая для поддержания тока в такой обмотке, близка к нулю. При работе «сверхпроводящего» магнита требуется электрическая энергия лишь для глубокого охлаждения его обмотки, причем расходуемая с этой целью мощность значительно меньше мощности, необходимой для поддержания тока в обмотке из проводника (рис. 5-21).

Поле сверхпроводящих магнитов отличается высокой стабильностью и сохраняется практически сколь угодно долго.

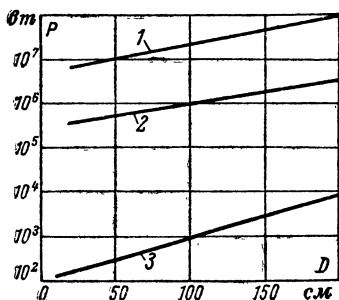


Рис. 5-21. Зависимость мощности питания электромагнитов с обмотками из различных проводников от диаметра воздушного зазора в магнитной цепи ($H \approx 80\,000$ а/см).

1 — медная обмотка при $T \approx 300^\circ \text{ K}$;
2 — алюминиевая обмотка при $T \approx 20^\circ \text{ K}$;
3 — сверхпроводниковая обмотка при $T = 4^\circ \text{ K}$.

При конструировании сверхпроводящих магнитов важное значение, разумеется, имеет выбор металлов и их соединений, которые переходят в состояние сверхпроводимости при более высоких значениях критической плотности тока $J_{кр}$ [см. формулу (5-2-11)]. Так, например, применяя сплав Nb Zr, интерметаллическое соединение Nb Sn и другие подобные материалы, возможно создать сверхпроводящие магниты с напряженностью поля свыше $100\,000$ а/см.

5-4. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА. СОБСТВЕННАЯ И ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТИ

На основании формулы (1-6-11) энергия магнитного поля в объеме V определяется выражением

$$W_m = \int_V \frac{\mathbf{H} \mathbf{B}}{2} dV = \int_V \frac{\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{A}}{2} dV.$$

Осуществляя преобразование этого соотношения в соответствии с формулой (Д-3-23)

$$\text{div} [\mathbf{A} \mathbf{H}] = \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H},$$

получаем:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} [\mathbf{A}\mathbf{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} dV.$$

Для уединенного контура с током первое слагаемое в правой части этой формулы равно нулю. Действительно, согласно теореме Остроградского — Гаусса (Д-3-30)

$$\int_V \operatorname{div} [\mathbf{A}\mathbf{H}] dV = \oint_S [\mathbf{A}\mathbf{H}] dS.$$

Здесь согласно формулам (5-1-11) и (5-1-12)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l}}{r};$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{[d\mathbf{l}\mathbf{e}_r]}{r^2},$$

$$dS = \mathbf{e}_r 8\pi r dr.$$

При этом подынтегральное выражение $[\mathbf{A}\mathbf{H}] dS$ пропорционально $1/r^2$ и при интегрировании по поверхности сферы с бесконечно большим радиусом обращается в нуль. Таким образом,

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} dV$$

или, учитывая первое уравнение системы (5-1-1) и выражение

$$\mathbf{J} dV = J dS d\mathbf{l},$$

где dS и $d\mathbf{l}$ — элементы нормального сечения и длины контура с током, окончательно получаем:

$$W_m = \frac{I}{2} \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (5-4-1)$$

Используя теорему Стокса (Д-3-28), находим, что

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} dS = \oint_S \mathbf{B} dS = \Phi,$$

где Φ — полный магнитный поток, создаваемый током, текущим в контуре и пронизывающий поверхность S , ограниченную этим контуром [см. выражение (1-3-5)].

Согласно последней формуле выражение (5-4-1) принимает вид:

$$W_M = \frac{I\Phi}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} [\text{дж}], \quad (5-4-2)$$

поскольку поток Φ пропорционален создающему его току I , т. е.

$$\Phi = LI [\text{вб}]. \quad (5-4-3)$$

Коэффициент пропорциональности L между пронизывающим контур магнитным потоком и протекающим по контуру током, создающим этот поток, называется коэффициентом самоиндукции (индуктивностью контура).

$$L = \frac{\Phi}{I} [\text{гн}]. \quad (5-4-4)$$

Учитывая формулы (1-3-5) и (5-1-12), выражение (5-4-4) можно переписать в следующем виде:

$$L = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S \left\{ \int_L \frac{[dl \mathbf{e}_r]}{r^2} \right\} dS. \quad (5-4-4a)$$

Из последнего выражения следует, что индуктивность контура определяется геометрической формой проводника и магнитной проницаемостью среды.

При неизменной величине тока I энергия возрастает с увеличением индуктивности контура, а при неизменной величине магнитного потока энергия возрастает с уменьшением индуктивности контура [см. выражение (5-4-2)].

Если система состоит из n замкнутых контуров (рис. 5-22), то, кроме собственного потока, через каждый из контуров будут проходить потоки, создаваемые токами, текущими в других контурах. На основе формул (5-4-1) и (5-4-2) энергия такой системы

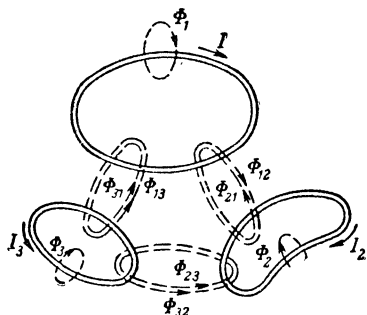


Рис. 5-22. Взаимные и собственные магнитные потоки контуров.

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \oint_{L_i} \mathbf{A} d\mathbf{l}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i. \quad (5-4-5)$$

Поток Φ_i , пронизывающий i -й контур, линейно связан с током всех контуров,

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} I_k; \quad (5-4-6)$$

здесь $L_{ii} I_i = \Phi_{ii}$ — собственный поток i -го контура;

L_{ii} и I_i — его индуктивность и ток;

$L_{ik} I_k = \Phi_{ik}$ — поток, пронизывающий i -й контур и создаваемый током I_k , протекающим в k -м контуре.

Коэффициент пропорциональности

$$L_{ik} = \frac{\Phi_{ik}}{I_k} \quad [\text{сН}] \quad (i \neq k) \quad (5-4-7)$$

называется коэффициентом взаимной индукции или взаимной индуктивностью.

Подставляя выражение (5-4-6) в (5-4-5), получаем:

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n L_{ik} I_k I_i. \quad (5-4-8)$$

Покажем, что $L_{ik} = L_{ki}$ (где $i \neq k$). Магнитный поток, пронизывающий i -й контур и создаваемый током, текущим в k -м контуре,

$$\Phi_{ik} = L_{ik} I_k \quad (i \neq k).$$

Вместе с тем

$$\Phi_{ik} = \int_{S_i} \mathbf{B}_k d\mathbf{S}_i = \int_{S_i} \text{rot } \mathbf{A}_k d\mathbf{S}_i = \oint_{L_i} \mathbf{A}_k d\mathbf{l}_i,$$

или согласно (5-1-11)

$$\Phi_{ik} = \frac{\mu_a I_k}{4\pi} \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{d\mathbf{l}_k d\mathbf{l}_i}{r}, \quad (i \neq k).$$

Из сравнения выражений для Φ_{ik} находим:

$$L_{ik} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{d\mathbf{l}_k d\mathbf{l}_i}{r}, \quad (i \neq k).$$

Так как последнее выражение симметрично относительно индексов i и k , то, очевидно,

$$L_{ik} = L_{ki}, (i \neq k)$$

или

$$\frac{\Phi_{ik}}{\Phi_{ki}} = \frac{I_k}{I_i},$$

что соответствует принципу взаимности (2-1-19). Обозначим коэффициент взаимной индукции системы из двух контуров

$$M = L_{12} = L_{21} [eH], \quad (5-4-8a)$$

а коэффициент собственной индуктивности каждого из этих контуров

$$L_{ii} = L_i \quad (i = 1, 2).$$

Коэффициенты индуктивности L и взаимной индукции M являются интегральными параметрами ограниченной области, в которой локализовано магнитное поле, создаваемое током, текущим по расположенному в этой области проводнику.

В частном случае согласно выражению (5-4-8) энергия поля двух контуров

$$W_m = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} \pm M I_1 I_2. \quad (5-4-9)$$

Знак плюс перед третьим членом правой части этой формулы ставят в том случае, когда магнитные потоки контуров складываются, а знак минус — когда они вычитаются (направлены навстречу друг другу).

Для катушки с расположенными вплотную витками, по которым течет один и тот же ток в одном направлении, выражения (5-4-9) и (5-4-4) имеют вид:

$$W_m = \frac{\omega \Phi I}{2} = \frac{L I^2}{2}; \quad (5-4-10)$$

$$L = \frac{\omega \Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}; \quad (5-4-11)$$

здесь L — общая (эквивалентная) индуктивность системы из ω витков;

Φ — поток, создаваемый током I и пронизывающий все витки.

Величина

$$\Psi = \omega \Phi \quad (5-4-12)$$

называется потокоцеплением.

5-5. ИНДУКТИВНОСТЬ И ВЗАИМОИНДУКТИВНОСТЬ ПРОСТЕЙШИХ ПРОВОДНИКОВ

Погонная индуктивность двухпроводного концентрического кабеля (рис. 5-8) складывается из трех частей: 1) L_{0i1} — индуктивности, определяемой магнитным потоком во внутреннем проводнике; 2) L_{0e} — индуктивности, определяемой магнитным потоком между проводниками; 3) L_{0i2} — индуктивности, определяемой магнитным потоком внутри наружного проводника.

Первое слагаемое можно определить с помощью выражений (1-6-11) и (5-4-2), из которых следует, что

$$\int_V \frac{\Pi B}{2} dV = \frac{L_{0i1} I^2}{2}.$$

Учитывая формулу (5-2-12), находим:

$$\int_V \frac{\Pi B}{2} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu_a H^2 dV = \frac{\mu_a I^2}{8\pi^2 a^4} \int_0^a r^2 2\pi r dr = \frac{\mu_a I^2}{16\pi}.$$

Отсюда

$$L_{0i1} = \frac{\mu_a}{8\pi} [\text{гН/м}], \quad (5-5-1)$$

где μ_a — магнитная проницаемость проводника.

Индуктивность L_{0e} определяем по формуле (5-4-4)

$$L_{0e} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \int_{a_1}^{a_2} H dS}{I}.$$

Учитывая выражение (5-2-12а), получаем:

$$L_{0e} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}.$$

Индуктивность L_{0i2} найдем аналогично тому, как была найдена индуктивность L_{0i1} , т. е.

$$L_{0i2} = \frac{\mu_a}{2\pi (a_3^2 - a_2^2)^2} \left[a_3^4 \ln \frac{a_3}{a_2} - a_3^2 (a_3^2 - a_2^2) + \frac{a_3^4 - a_2^4}{4} \right].$$

Полная погонная индуктивность на единицу длины кабеля

$$L_0 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \mu_0 \ln \frac{a_2}{a_1} + \frac{\mu_a}{(a_3^2 - a_2^2)^2} \left[a_3^4 \ln \frac{a_3}{a_2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{a_3^2}{2} (a_3^2 - a_2^2) \right] \right\}. \quad (5-5-2)$$

При $\frac{a_3}{a_2} \rightarrow 1$ индуктивностью L_{0i2} можно пренебречь; при этом погонная индуктивность

$$L_0 \approx \frac{\mu_a}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}. \quad (5-5-2a)$$

Если, кроме того, $\frac{a_2}{a_1} \gg 1$ и $\mu_a \approx \mu_0$, то можно пренебречь индуктивностью L_{0i1} ; в этом случае

$$L_0 \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}. \quad (5-5-2б)$$

Погонная индуктивность двухпроводной линии (рис. 5-9) складывается из индуктивности, определяемой магнитным потоком внутри проводов, и индуктивности, определяемой внешним магнитным потоком. На основе формулы (5-5-1) внутренняя индуктивность обоих проводов

$$L_{0i} = 2 \frac{\mu_a}{8\pi} = \frac{\mu_a}{4\pi}$$

и внешняя индуктивность на основе формул (5-4-4) и (5-2-15)

$$L_{0e} = \frac{2\mu_0}{I} \int_0^{\left(\frac{D_0}{2} - a\right)} H_2 dx_1 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{D_0 - a}{a} \right).$$

Следовательно, погонная индуктивность двухпроводной линии

$$L_0 \approx \frac{\mu_a}{4\pi} + \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{D_0 - a}{a} \right) [\text{гН/м}]. \quad (5-5-3)$$

Если $a \ll D_0$ и $\mu_a \approx \mu_0$, то

$$L_0 \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D_0}{a} [\text{гН/м}]. \quad (5-5-3a)$$

Индуктивность витка (рис. 5-13) при $a \ll R$ и $\mu_a \approx \mu_0$ на основе формул (5-4-4) и (5-3-6а) определяется выражением

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{I} \int_0^{(R-a)} 2\pi r H_z dr \approx \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{a} - 2 \right) [\text{гн}].$$

Индуктивность цилиндрической катушки (рис. 5-15) на основании выражений (5-3-12) при $l \gg D$ определяется следующей формулой:

$$L = \frac{\omega \Phi}{I} = \frac{\omega' l \Phi}{I} = \mu_0 \omega'^2 l \frac{\pi D^2}{4} [\text{гн}]. \quad (5-5-4)$$

При $\frac{l}{D} \leq 10$ для практических расчетов используется формула

$$L = k_L \mu_0 \omega'^2 l \frac{\pi D^2}{4}. \quad (5-5-5)$$

Значения коэффициента k_L приведены в табл. 5-1.

Таблица 5-1

Коэффициент к формуле (5-5-5)

l/D	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4	5	10
k_L	0,1	0,2	0,31	0,5	0,66	0,8	0,84	0,88	0,91	0,96

Индуктивность тороида на основе выражения (5-3-15) определяется следующей формулой:

$$L = \frac{\omega \Phi}{I} = \frac{\omega^2}{R_m} = \frac{\mu_a \omega^2 b}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (5-5-6)$$

Коэффициент взаимной индукции двух витков с радиусами R_1 и R_2 , расположенных концентрически в одной плоскости. Выражения (5-3-6а) позволяют определить поток Φ , пронизывающий внутренний виток и создаваемый током внешнего витка I_2 . Согласно формуле (5-4-7)

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = M.$$

Магнитное поле внутри витка в первом приближении можно считать однородным; согласно выражению (5-3-7а) напряженность этого поля

$$H_z = \frac{I_2}{2R_2}.$$

Следовательно,

$$M \approx \frac{\pi \mu_a R_1^2}{2R_2} [2H]. \quad (5-5-7)$$

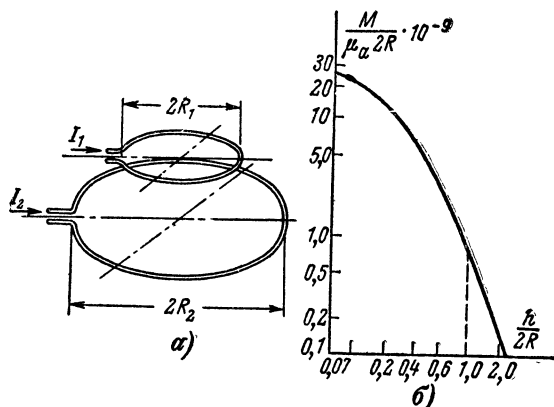


Рис. 5-23. К расчету взаимной индукции двух круглых витков.

а — схема расположения витков; б — график зависимости взаимной индукции двух одинаковых витков от расстояния между ними (R , м)

Точная формула для определения коэффициента взаимной индукции двух витков, расположенных согласно рис. 5-23, а, имеет вид:

$$M = 2\mu_a \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K - N \right], \quad (5-5-7a)$$

где

$$k^2 = \frac{4R_1 R_2}{[(R_1 + R_2)^2 + h^2]},$$

а величины K и N определяются выражениями (5-3-3).

На рис. 5-23, б дан для примера график зависимости величины $M/2\mu_a R$ для двух одинаковых витков от отношения $h/2R$.

Параллельное соединение индуктивностей (рис. 5-24).
Общая (эквивалентная) индуктивность такого соединения определяется на основании формул (5-4-9) и (5-4-10).

$$\frac{I^2 L}{2} = \frac{I_1^2 L_1}{2} + \frac{I_2^2 L_2}{2} \pm MI_1 I_2.$$

При $I = I_1 + I_2$ и $\frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2 \mp M}{L_1 \mp M}$,

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}. \quad (5-5-8)$$

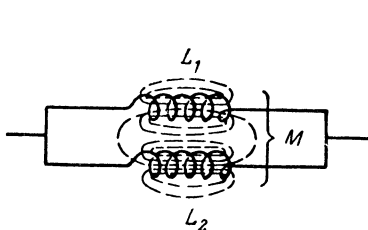


Рис. 5-24. Параллельное соединение индуктивностей.

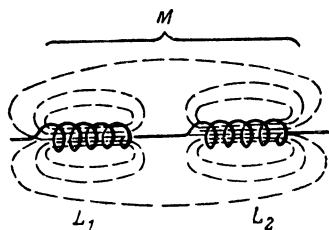


Рис. 5-25. Последовательное соединение индуктивностей.

Знак плюс принимают при одинаковом направлении полей и минус — при противоположном.

При отсутствии магнитной связи катушек ($M=0$), иначе говоря, когда у них нет общего магнитного потока, эквивалентная индуктивность

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}. \quad (5-5-8a)$$

Если параллельно соединены n индуктивностей и между ними нет взаимной индукции, то

$$L = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}}. \quad (5-5-9)$$

Последовательное соединение индуктивностей (рис. 5-25). Общая (эквивалентная) индуктивность последовательного соединения определяется также на основании формул (5-4-9), (5-4-10) и с учетом того, что при

таком соединении через каждую индуктивность протекает один и тот же ток; при этом

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{L_1 I^2}{2} + \frac{L_2 I^2}{2} \pm MI^2.$$

Отсюда общая индуктивность последовательного соединения

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M. \quad (5-5-10)$$

Знак плюс принимают при одинаковом направлении поля в индуктивностях, а знак минус — при противоположном.

При отсутствии магнитной связи ($M=0$)

$$L = L_1 + L_2. \quad (5-5-10a)$$

Если последовательно соединены n индуктивностей, общая индуктивность

$$L = \sum_{i=1}^n L_i. \quad (5-5-11)$$

5-6. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Электрическое стационарное поле внутри однородной, изотропной проводящей среды, не содержащей сторонних источников тока, на основании формул (1-2-1) и (5-1-1) характеризуется уравнениями:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}; \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (5-6-1)$$

Эти уравнения выражают в дифференциальной форме соответственно закон Ома, первый и второй законы Кирхгофа.

Электрическое поле \mathbf{E} , поддерживающее ток в проводящей среде, перемещая объемный заряд ρ , совершает на участке $d\mathbf{l}$ работу

$$\mathbf{F} d\mathbf{l} = E \rho d\mathbf{l},$$

которая превращается в тепло. На основании этой формулы мощность потерь в единице объема проводящей среды

$$p = E \rho \frac{d\mathbf{l}}{dt} = E \rho \mathbf{v} = \mathbf{E} \mathbf{J} = \sigma E^2 = J^2 \frac{1}{\sigma} [\text{вт}/\text{м}^3]; \quad (5-6-2)$$

здесь \mathbf{v} — средняя скорость движения зарядов в проводящей среде.

Формула (5-6-2) выражает в дифференциальной форме закон Джоуля-Ленца.

Если уравнения (5-6-1) сравнить с уравнениями (4-1-9), описывающими электрическое поле в диэлектрической области, не содержащей свободных зарядов: $\text{rot } \mathbf{E}=0$, $\text{div } \mathbf{D}=0$, $\mathbf{D}=\epsilon_a \mathbf{E}$, а также граничные условия (4-1-7) для электростатического поля с условиями (5-1-5) для стационарного поля, то можно сделать следующий вывод: решения задач, связанных с электрическим стационарным полем в проводящей среде, соот-

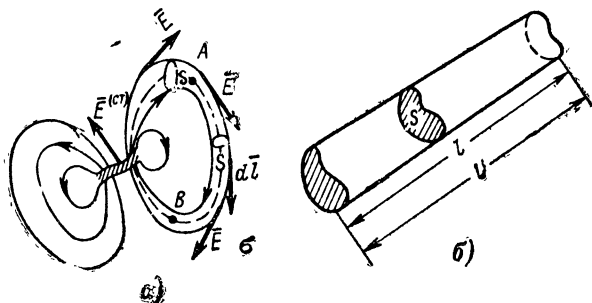


Рис. 5-26. К определению сопротивления в среде (а) и сопротивления проводника конечных размеров (б).

ветствуют решениям задач, связанных с электростатическим полем в диэлектрической среде, при замене в последних \mathbf{D} на \mathbf{J} и ϵ_a на σ .

Очевидно, верно и обратное: решения задач, связанных со стационарным полем, можно применять к задачам статического поля при замене \mathbf{J} на \mathbf{D} и σ на ϵ_a .

Решения задач, связанных с магнитным статическим полем, описываемым уравнениями $\text{rot } \mathbf{H}=0$, $\text{div } \mathbf{B}=0$, $\mathbf{B}=\mu_a \mathbf{H}$, разумеется, также можно использовать для определения электрического стационарного поля при замене \mathbf{H} на \mathbf{E} , \mathbf{B} на \mathbf{J} и μ_a на σ .

На возможности решения задач электростатики путем использования решений задач стационарного поля основано экспериментальное определение электростатических полей с помощью системы проводников, помещенных в электролитическую ванну. Создав на проводниках требуемое распределение потенциалов, измеряют в каждой заданной точке плотность тока \mathbf{J} . Очевидно, что это значение соответствует величине $\mathbf{D}=\epsilon_a \mathbf{E}$ искомого электростатического поля. При таком моделировании

проводимость электролита σ_2 должна быть мала по сравнению с проводимостью проводников σ_1 , т. е. $\sigma_2/\sigma_1 \rightarrow 0$. Это необходимо для обеспечения условий: $J_{n(1)} = J_{n(2)}$; $J_{\tau(1)} = J_{\tau(2)} \sigma_2/\sigma_1 \rightarrow 0$, соответствующих граничным условиям электростатики на поверхности проводника:

$$D_{n(1)} = D_{n(2)}, \quad D_{\tau(1)} = D_{\tau(2)} \frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}} \rightarrow 0.$$

Согласно уравнениям (5-6-1) интеграл, взятый по замкнутому контуру, совпадающему с линией тока (рис. 5-26, а) для линейной среды равен

$$\oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l} = \sigma \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\sigma \oint_L \text{grad } \varphi d\mathbf{l}. \quad (5-6-2a)$$

Так как согласно формуле (Д-3-37а) интеграл $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}$ по замкнутому контуру равен нулю, из выражения (5-6-2а) следует, что $\mathbf{J}=0$; иначе говоря, существование тока при наличии только потенциального поля \mathbf{E} невозможно. В этом случае токи могут существовать только при наличии еще стороннего поля с напряженностью $\mathbf{E}^{\text{ст}}$. При этом интеграл, взятый вдоль токовой трубки, можно представить в виде

$$\oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l} = \sigma \int_L (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}) d\mathbf{l};$$

учитывая, что $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$, получаем:

$$\oint_L \mathbf{J} \frac{d\mathbf{l}}{\sigma} = \oint_L \mathbf{E}^{\text{ст}} d\mathbf{l} = E, \quad (5-6-3)$$

где

$$E = \oint_L \mathbf{E}^{\text{ст}} d\mathbf{l} \quad (5-6-3a)$$

— электродвижущая сила (э. д. с.), определяемая работой по перемещению единичного заряда по замкнутому контуру.

Учитывая, что векторы \mathbf{J} и $d\mathbf{l}$ по направлению совпадают, левую часть выражения (5-6-3) можно представить в следующем виде:

$$\oint_L \frac{\mathbf{J} d\mathbf{l}}{\sigma} = \oint_L \frac{J d\mathbf{l}}{\sigma} = \oint_L J S \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S} = I \oint_L \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S} = IR, \quad (5-6-3b)$$

где S — поперечное сечение достаточно тонкой токовой трубки;
 I — протекающий через нее ток;

$R = \int_L \frac{dl}{\sigma S}$ — электрическое сопротивление токовой трубки.

Следовательно,

$$IR = E. \quad (5-6-3в)$$

Если интегрирование производится не по замкнутому пути, а на ограниченном участке AB , где стороннее поле отсутствует, то

$$\int_A^B \mathbf{J} d\mathbf{l} = \int_A^B \sigma \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\sigma \int_A^B \text{grad } \varphi d\mathbf{l} = \sigma U_{AB}$$

или согласно соотношению (5-6-3б)

$$I = \frac{U_{AB}}{R} = U_{AB} g, \quad (5-6-4)$$

где $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$ — напряжение на участке AB ;

$R = \int_A^B \frac{dl}{\sigma S}$ [ом] и $g = \frac{1}{R}$ [сим] — электрическое сопротивление и проводимость участка AB .

Если проводящая среда представляет проводник конечных размеров (рис. 5-26, б), к основаниям которого приложена разность потенциалов U_{AB} и который окружен непроводящей средой, то, полагая электрическое поле однородным по сечению S , получаем выражение, аналогичное (5-6-4), где

$$R = \int_L \frac{dl}{\sigma S} \quad (5-6-4а)$$

— электрическое сопротивление проводника.

Выражение (5-6-4) представляет закон Ома в интегральной форме. Электрическое сопротивление проводника называют также омическим.

На основании выражения (5-6-2) мощность потерь в проводнике

$$P_0 = \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV = \int_L \frac{J^2 S}{\sigma} dl = I^2 \int_L \frac{dl}{\sigma S} = I^2 R; \quad (5-6-5)$$

в этом выражении интегрирование производится соответственно по объему и длине проводника. Последнее выражение представляет закон Джоуля-Ленца в интегральной форме для проводника; если подставить в него (5-6-4), получим:

$$P_0 = \frac{U_{AB}^2}{R}. \quad (5-6-5a)$$

Если сравнить выражения (4-5-2) и (5-6-4), т. е.

$$q = CU \text{ и } I = gU,$$

где

$$q = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = - \oint_S \epsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad I = - \int_S \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

то можно сделать вывод, что при замене ϵ_a на σ формула емкости переходит в формулу проводимости и наоборот.

Этот метод применим для определения электрического сопротивления некоторых проводящих тел с конечными размерами.

Сопротивление проводящего шара радиусом a с диаметрально противоположными контактами (рис. 5-27). Радиус контакта r_0 будем считать весьма малым, но

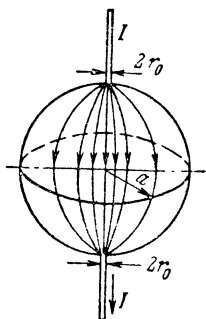


Рис. 5-27. К определению сопротивления проводящего шара.

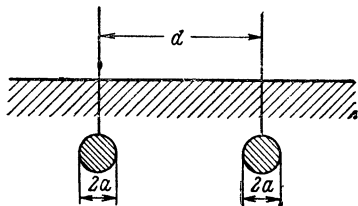


Рис. 5-28. К определению сопротивления заземления.

отличным от нуля, вследствие чего плотность тока и потенциал в области контактов конечны. На основании формулы (Д-6-55б) можно показать, что при $r_0 \ll a$ разность потенциалов между контактами

$$U = \varphi_A - \varphi_B = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2a} \right) = \frac{I}{2\pi\sigma r_0};$$

здесь I — проходящий через контакты ток и σ — удельная проводимость материала шара.

Отсюда находим:

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{I}{U} = 2\pi\sigma r_0 \text{ [сим]}; \\ R &= \frac{1}{2\pi\sigma r_0} \text{ [ом]}. \end{aligned} \right\} \quad (5-6-6)$$

Заметим, что плотность тока, протекающего через сферу, неоднородна; она достигает максимального значения на диаметре между контактами и уменьшается к поверхности.

При замене в формулах (5-6-6) σ на ϵ_a получаем формулу емкости диэлектрического шара, диэлектрическая проницаемость которого много больше, чем окружающей среды.

$$C \approx 2\pi\epsilon_a r_0 [\phi]. \quad (5-6-6a)$$

Сопротивление заземления, т. е. проводящей среды (земляного грунта) между двумя идеально проводящими сферами радиуса a , расположенными на расстоянии $d \gg a$ (рис. 5-28). На основании формул (4-4-2) и (4-5-3), пренебрегая влиянием поверхности земли и взаимной емкостью, получим емкость системы

$$C \approx \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_a a.$$

Заменяя ϵ_a на σ , получаем искомое сопротивление

$$R \approx \frac{1}{2\pi\sigma a} \text{ [ом]}. \quad (5-6-7)$$

Здесь σ — проводимость земляного грунта.

Проводимость изоляции коаксиального кабеля на единицу длины получим, заменив в (4-5-5) ϵ_a на σ :

$$g_0 = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{a_2}{a_1}} \text{ [сим/м]}. \quad (5-6-8)$$

Если произвести такую же замену в (4-5-126), то получим проводимость изоляции двухпроводной линии

$$g_0 = \frac{\pi \sigma}{\ln \frac{D_0}{a_1}} [\text{сим/м}]. \quad (5-6-8a)$$

Сопrotивление провода с постоянным сечением S и длиной l на основании формулы (5-6-4a) равно:

$$R = \frac{l}{\sigma S} [\text{ом}]. \quad (5-6-9)$$

Проводимость газовой плазмы. Хотя ток в практически полностью ионизированной плазме при наличии внешнего электрического поля создается направленным движением частиц обоих знаков — электронами и положительными ионами, однако величина тока зависит, главным образом, от электронов. Дело в том, что вследствие большой массы ионов их подвижность по сравнению с электронами весьма мала (см. § 2-7). В связи с этим плотность постоянного тока в плазме выражается общей формулой (1-2-5)

$$\mathbf{J} = ne \mathbf{v} = \sigma \mathbf{E}, \quad (5-6-10)$$

в которой σ — проводимость плазмы в стационарном поле.

Величину ее можно определить на основе формул (2-7-36) и (2-7-37), полагая $dv/dt=0$ и $\omega=0$.

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\nu} = \frac{n e^2}{m \nu} = neu, \quad (5-6-11)$$

где $u = \frac{1}{\nu} \frac{e}{m}$ — подвижность электронов в практически полностью ионизированной плазме.

Формула (5-6-11) действительна и для проводимости металлов

Ток в металле представляет собой движение электронной плазмы твердого тела, а ток в сильно ионизированной газовой среде — движение электронной компоненты газовой плазмы. Однако эти процессы отличаются количественно — числом ν эффективных соударений электронов с положительными ионами. Только при боль-

шой электронной температуре значение ν у плазмы приближается к значению ее в металлах.

Для газовой плазмы $\nu \approx 25 \frac{nq_i}{T_e^{3/2}}$, и, следовательно,

$$\sigma \sim \frac{T_e^{3/2}}{q_i};$$

здесь T_e — электронная температура плазмы [°K] и q_i — заряд иона.

Отсюда видно, что с ростом температуры проводимость плазмы быстро увеличивается, достигая значений, сравнимых с проводимостью металлических проводников. Так, например, проводимость водородной плазмы при $T_e \approx 10^7$ К приблизительно равна проводимости меди при 20° С.

Отметим, что формула (5-6-11) действительна при малых значениях отношения скорости направленного движения к тепловой скорости, т. е. когда отношение $v/v_r \ll 1$. В металле это условие практически всегда имеет место из-за малой длины свободного пробега, ограниченной периодом кристаллической решетки. В плазме это условие может не соблюдаться при большой плотности тока, т. е. при больших значениях ν . Если $v/v_r > 0,1$, то влияние положительных ионов на траекторию электрона настолько мало, что он может перейти в состояние непрерывного ускорения; при этом проводимость σ зависит от напряженности поля E , т. е. полностью ионизированная плазма при большой плотности тока становится нелинейной средой.

Проводимость слабо ионизированной плазмы, т. е. газовой среды, в которой имеются нейтральные атомы, зависит от относительной концентрации электронов. Наибольшая проводимость слабо ионизированной плазмы в десятки тысяч раз меньше наибольшей проводимости практически полностью ионизированной плазмы.

Протекающий в плазме постоянный ток замыкается либо внутри плазмы, либо вне ее при наличии введенных проводников (электродов), соединенных внешней цепью. Если электроды не замкнуты, но к ним приложено напряжение, то происходит поляризация плазмы: в течение небольшого промежутка времени заряды сосредоточиваются у соответствующих электродов, образуя статическое поле внутри плазмы.

5.7. СТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЕ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Анизотропия проводимости металлического проводника и плазмы, возникающая при намагничивании их, выражается тензором одинакового вида. Согласно выражениям (2-9-32) и учитывая, что на основании формулы (2-1-6) проводимость среды равна мнимой части комплексной проницаемости, умноженной на ω , а при стационарном поле $\omega=0$, находим компоненты тензора проводимости:

$$\sigma_{ik} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix},$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma \frac{v^2}{\omega_H^2 + v^2}; \\ \sigma_{12} &= \sigma \frac{v\omega_H}{\omega_H^2 + v^2}; \\ \sigma_{33} &= \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5-7-1)$$

Здесь σ — проводимость ненамагниченного проводника или плазмы, определяемая формулой (5-6-11).

Выражение (5-7-1) можно также получить из решения уравнения движения электронов проводящей среды в стационарном поле

$$m \mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} = e \mathbf{E} + e \mu_0 [\mathbf{v} \mathbf{H}_0]. \quad (5-7-2)$$

Последнее выражение отличается от выражения (2-9-28) тем, что в стационарном поле $d\mathbf{v}/dt=0$ и $\omega=0$. В результате решения этого уравнения находим составляющие скорости $v_i = f(E_k)$, а следовательно и

$$J_i = nev_i = \sigma_{ik} E_k.$$

Металлический проводник в поперечном магнитном поле согласно формуле (5-7-1) обладает анизотропной проводимостью. При $E_1 \neq 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ и $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_3 H_0$ в проводнике (полупроводнике) возникают токи с составляющими плотности

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_{11} E_1 = \sigma E_1 \left(\frac{v^2}{\omega_H^2 + v^2} \right); \\ J_2 &= -\sigma_{12} E_1 = -\sigma E_1 \left(\frac{v\omega_H}{\omega_H^2 + v^2} \right); \\ J_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5-7-3)$$

Действительно, если пластинку из металла или полупроводника (рис. 5-29, а) поместить в постоянное магнитное поле с вектором напряженности $\vec{e}_3 H_0$ и к расположенным на оси x_1 точкам пластинки подключить напряжение U , то в ней возникнут две составляющие то-

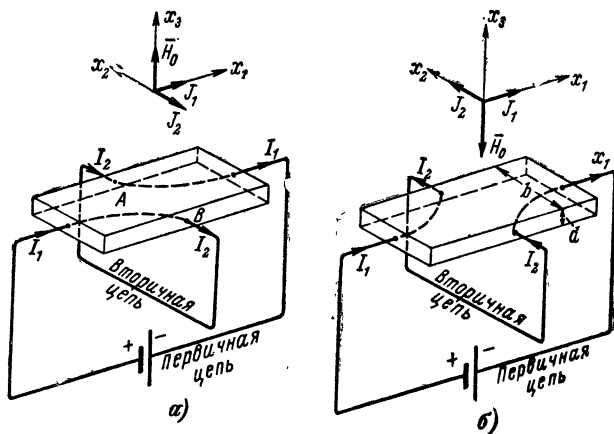


Рис. 5-29. Эффект Холла.

ка I_1 и I_2 . При изменении направления магнитного поля изменяется и направление тока I_2 (рис. 5-29, б). В обоих случаях между точками A и B пластинки, расположенными на оси x_2 , возникает разность потенциалов U_{AB} . Описанное явление носит название эффекта Холла.

В соответствии с формулами (5-7-3) и с учетом выражений (2-9-8) и (5-6-11) напряжение

$$\begin{aligned} U_{BA} &= \frac{J_2}{\sigma} b = E_1 \left[\frac{v\omega_H}{(\omega_H^2 + v^2)} \right] b = \\ &= J_1 \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\omega_H^2 + v^2}{v^2} \right) \left[\frac{\omega_H v}{\omega_H^2 + v^2} \right] b = \frac{1}{\rho} \frac{IB}{d}. \end{aligned} \quad (5-7-4)$$

Эффект Холла есть результат смещения носителей зарядов (электронов и дырок) в направлении, перпендикулярном внешнему магнитному полю, под действием силы Лоренца [см. формулу (1-1-2)]. Сосредоточение зарядов разного знака на противоположных сторонах пластинки и создает разность потенциалов, определяемую выражением (5-7-4). Эту разность потенциалов можно вычислить также по формуле (1-6-13а), переписывая ее для данного случая в следующем виде:

$$\rho E + [\mathbf{J}\mathbf{B}] = 0. \quad (5-7-5)$$

Если $\mathbf{B} = e_3 B$, то $\rho E_2 = -J_1 B$ и

$$U_{AB} = |E_2 b| = \frac{1}{\rho} J_1 B b = \frac{1}{\rho} \frac{IB}{d}.$$

Заметим, что смещение носителей зарядов (электронов и дырок) не нарушает структуры вещества, так как в этом случае перенос носителей не связан с изменением химической структуры вещества.

Постоянной Холла называется величина X , обратная объемной плотности зарядов, т. е.

$$X = \frac{1}{\rho} [M^3/\kappa]. \quad (5-7-6)$$

В полупроводнике с дырочной проводимостью постоянная Холла отличается большей абсолютной величиной и противоположным знаком, чем в проводнике с чисто электронной проводимостью. В связи с этим эффект Холла используют для экспериментального определения плотности и знака носителей зарядов.

Анизотропия проводимости в проводниках и полупроводниках может быть использована для «бесконтактного», «немеханического» управления величиной и направлением постоянного тока и для создания гиратора—взаимного элемента в цепи постоянного тока (§ 5-11).

Плазма в поперечном магнитном поле согласно выражениям (5-7-1) также обладает анизотропией проводимости, причем возникает неоднородное давление в направлении, перпендикулярном к линиям магнитного поля. Например, при $E_1 \neq 0$ и $\mathbf{H} = e_3 H_0$ возникает ток плотностью

$$J_2 = \sigma_{21} E_1 = ne v_2.$$

Этот ток является результатом смещения носителей зарядов в плазме; следовательно, и масса плазмы смеща-

ется в направлении, перпендикулярном намагничивающему внешнему полю. Этим и создается неравномерное распределение давления в плазме.

Плазма в продольном магнитном поле. При $E_1 = E_2 = 0$, $E_3 \neq 0$ и $\mathbf{H} = \mathbf{e}_3 H_0$ на основании формул (5-7-1) составляющие плотности тока имеют следующие значения: $J_1 = J_2 = 0$ и $J_3 = \sigma E_3$, т. е. поперечных токов в плазме нет. Неоднородность давления в направлении, перпендикулярном к вектору \mathbf{H} , не возникает.

В отсутствие внешнего электрического поля, но при наличии внешнего постоянного магнитного поля хаотическое тепловое движение зарядов плазмы становится винтообразным вдоль силовых линий магнитного поля (рис. 5-30). Это явление есть следствие действия лоренцевой силы. С учетом газокINETического давления объемная плотность сил в плазме

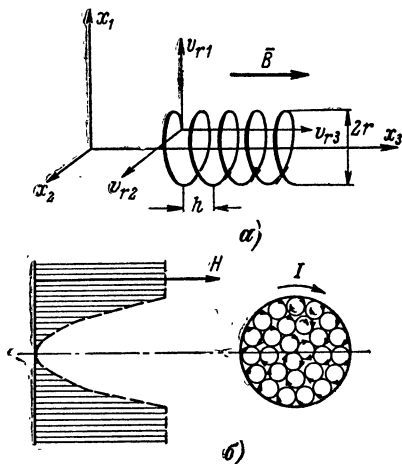


Рис. 5-30. Плазма в постоянном магнитном поле.

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \rho [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \text{grad } p_r \quad [\text{н/м}]; \quad (5-7-7)$$

здесь ρ — объемная плотность зарядов в плазме;

\mathbf{v} — скорость заряженных частиц;

p_r — газокINETическое давление в плазме.

При отсутствии внешнего электрического поля ($\mathbf{E} = 0$) и при равномерном давлении $\text{grad } p_r = 0$ уравнение (5-7-7) для силы, действующей на каждый электрон, движущийся с тепловой скоростью \mathbf{v}_r , переписывается в виде

$$\mathbf{F} = -e [\mathbf{v}_r \mathbf{B}]. \quad (5-7-8)$$

Если вектор магнитной индукции внешнего поля $\mathbf{B} = \mathbf{e}_3 \mu_0 H_0$ (рис. 5-30), то последнее уравнение принимает следующий вид:

$$\mathbf{F} = -e \mu_0 H_0 (\mathbf{e}_1 v_{r2} - \mathbf{e}_2 v_{r1});$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= -e\mu_0 H_0 v_{r2}; \\ F_2 &= e\mu_0 H_0 v_{r1}; \\ F &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = e\mu_0 H_0 v_r \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5-7-9)$$

Из этих выражений следует, что электрон в магнитном поле испытывает центростремительное ускорение, т. е. его траекторией является окружность. Радиус этой окружности и угловая частота вращения электрона определяются из уравнения

$$\frac{m (v_r \sin \alpha)^2}{R} = e\mu_0 H_0 v_r \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$R = \frac{v_r}{\omega_H} \sin \alpha, \quad (5-7-10)$$

где α — угол, образуемый векторами \mathbf{v}_r и \mathbf{B} ;

$\omega_H = \gamma\mu_0 H_0$ — угловая частота вращения электрона, совпадающая с угловой частотой прецессии [см. выражение (2-9-8)].

Помимо вращения, движение электрона имеет составляющую тепловой скорости v_{r3} . Вследствие этого траектория движения электрона представляет спираль с шагом

$$h = \frac{2\pi}{\omega_H} v_{r3} = \frac{2\pi}{\omega_H} v_r \cos \alpha. \quad (5-7-11)$$

С увеличением напряженности намагничивающего поля H_0 радиус траектории электронов уменьшается, т. е. составляющая движения их, перпендикулярная магнитному полю, практически исчезает.

Вращательное движение электронов приводит к возникновению тока, текущего по периметру, охватывающему плазменную среду в плоскости, перпендикулярной намагничивающему полю. Этот ток создает собственное магнитное поле, направленное против внешнего намагничивающего поля, ослабляя его (рис. 5-30). Это означает, что находящаяся под однородным давлением сильно ионизированная плазма является диамагнетиком, который ха-

рактизуется коэффициентом магнитной восприимчивости

$$\chi_m = - \frac{\mu_0^2 \gamma^2 e H_0}{4 \pi v_r} < 0. \quad (5-7-12)$$

5-8. ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ В СТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

На основе формулы (1-6-19) давление, т.е. поверхностная плотность пондеромоторных сил магнитного поля,

$$p_m = \mu_a \mathbf{H} (\mathbf{H} n_0) - \frac{1}{2} \mu_a H^2 n_0 \text{ [н/м}^2\text{]}, \quad (5-8-1)$$

а их объемная плотность согласно формуле (1-6-20)

$$\mathbf{f} = [\mathbf{J}\mathbf{B}] - \frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu_a. \quad (5-8-2)$$

Пондеромоторные силы магнитного поля, действующие на проводящие тела, по которым протекают токи, возникают как от взаимодействия тока с создаваемым этим током собственным магнитным полем, так и от взаимодействия с внешним магнитным полем других источников.

Силы собственного магнитного поля. Силы, действующие между параллельными ленточными (плоскими) проводами, разделенными малым зазором, т.е. когда $d \ll b$ (рис. 5-31), можно определить на основе выражения (5-8-1). При этом условии, и если токи в лентах имеют противоположное направление, можно считать, что магнитное поле практически полностью сосредоточено в зазоре между лентами. Напряженность поля [с учетом формулы (1-3-1)]

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z H \approx \mathbf{e}_z \frac{I}{b}. \quad (5-8-3)$$

На основании формул (5-8-1) и (5-8-3) давление, испытываемое

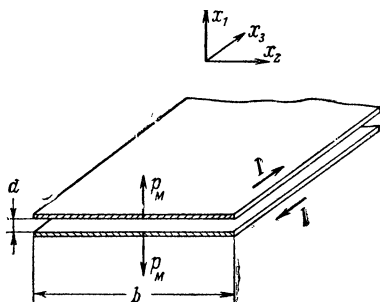


Рис. 5-31. К определению пондеромоторных сил, действующих на параллельные ленточные провода.

внутренней поверхностью каждой из лент и расталкивающее их,

$$p_m = \frac{\mu_a H^2}{2} = \frac{\mu_a I^2}{2b^2}. \quad (5-8-4)$$

Если токи в лентах имеют одинаковое направление, это же выражение определяет силы, стягивающие обе ленты. В этом случае можно считать, что напряженность поля в зазоре между лентами практически равна нулю, а напряженность внешнего поля [с учетом формулы (1-3-1)] $H \approx I/b$.

Как следует из формулы (5-8-4), при неизменной величине тока I силы, действующие между проводниками, не зависят от величины зазора d между ними. Однако в другом случае, при котором сохраняется постоянство магнитного потока в зазоре, эти силы зависят от величины зазора, резко возрастаая с его уменьшением. Если магнитный поток на единицу длины

$$\Phi_0 = 1 [м] d [м] \mu_a H = \text{const},$$

т. е. если

$$\left. \begin{aligned} \mu_a H &= \frac{\text{const}}{d}; \\ I &= \frac{b}{\mu_a} \frac{\text{const}}{d}, \end{aligned} \right\} \quad (5-8-5)$$

то согласно формуле (5-8-4) давление

$$p_m = \frac{\text{const}}{d}. \quad (5-8-4a)$$

Изменение зазора здесь связано с затратой энергии внешних источников и приводит к изменению величины тока в проводках.

Расталкивающие силы [см. выражение (5-8-4)] могут уравновесить силы тяжести, в результате чего при горизонтальном расположении пластин верхняя пластина может находиться в подвешенном состоянии над нижней. Подчеркнем, что устойчивое равновесие создается только стационарным полем; в электростатическом и магнитостатическом полях может иметь место только неустойчивое равновесие.

Постоянство магнитного потока между проводящими поверхностями может быть обеспечено путем перево-

да проводов в состояние сверхпроводимости в магнитном поле внешнего источника. После охлаждения проводов до температуры ниже температуры перехода источник внешнего магнитного поля отключается. В результате этого в проводах возникает (индуцируется) ток, создающий свой магнитный поток, равный внешнему (возникает «захваченный» магнитный поток). Так как в состоянии сверхпроводимости проводник является идеальным диамагнетиком и, следовательно, идеальным магнитным экраном, то захваченный магнитный поток остается неизменным при изменении зазора между лентами. Однако при этом изменяется линейная плотность тока в сверхпроводящих лентах; согласно формуле (5-8-5) она возрастает при уменьшении зазора.

Расталкивающие силы в зазоре между сверхпроводящими поверхностями практически применяют в подшипниках без трения; здесь устраняется касание между втулкой и валом действием лондеромоторных сил [см. формулу (5-8-4а)]. Эти же силы могут поддерживать во взвешенном состоянии сверхпроводящее тело в неоднородном магнитном поле. Последнее явление используется в гироскопах и других приборах без механического трения.

Рассмотрим силы собственного магнитного поля, действующие на проводящий цилиндр радиусом a [м], по которому протекает ток величиной I [а]. Согласно формуле (5-8-2) равномерно движущиеся носители зарядов испытывают силу в направлении, перпендикулярном оси цилиндра (рис. 5-32, а). При выбранном расположении координатных осей $\mathbf{J} = \mathbf{e}_1 J$ и $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$ объемная плотность сил

$$\mathbf{f} = -\mathbf{e}_r \mu_a J \mathbf{H} \text{ [н/м}^3\text{]}. \quad (5-8-6)$$

Если предположить, что плотность тока $J = I/\pi a^2$ по сечению цилиндра равномерна, т. е. напряженность магнитного поля $H_{r=a} = I/2\pi a$ [см. формулу (5-2-4)], то объемная плотность силы у поверхности проводящего цилиндра будет определяться выражением

$$f = \frac{\mu_a I^2}{2\pi^2 a^3} \text{ [н/м}^3\text{]}. \quad (5-8-7)$$

В твердом проводящем цилиндре силы, определяемые формулой (5-8-6), уравниваются взаимодействием зарядов внутри кристаллической решетки. При этом может возникнуть пинч-эффект—сжатие электронной плазмы твердого тела и, следовательно, неоднородность плотности тока в поперечном сечении проводящего цилиндра.

Если проводящий цилиндр представляет собой жидкое тело или газовую плазму, то силы, определяемые формулой (5-8-6), уравниваются силами упругой деформации. Давление, испытываемое поверхностью плазменного или жидкого цилиндра с радиусом a , определяется на основании формулы (5-8-1) следующим выражением:

$$p_m = \frac{\mu_a J^2}{4\pi^2 a^2} \text{ [н/м}^2\text{]}. \quad (5-8-8)$$

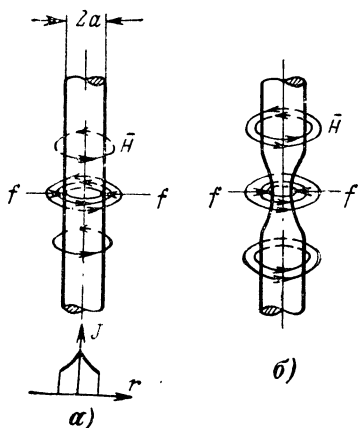


Рис. 5-32. Силы собственного магнитного поля.

a — сжатие электронной плазмы в твердом проводящем цилиндре; b — сжатие плазменного шнура (пинч-эффект).

При большом значении тока это давление может привести к уменьшению поперечных размеров цилиндра [пинч-эффект в плазме или проводящей жидкости (см. рис. 5-32, б)]. При работе с высокотемпературной плазмой это явление используется для ее отделения от стенок сосуда с целью теплоизоляции.

Возникающее при больших токах сжатие электронной плазмы в твердом теле и газовой плазмы делает среду не-

линейной. В такой среде возможно преобразование постоянного тока в переменный: в полупроводнике излучение когерентных оптических колебаний, в газовой плазме излучение жестких гамма-лучей.

Если проводник с током находится в поле, создаваемом другим источником, то в результате взаимодействия тока с внешним полем проводник перемещается. Рассмотрим взаимодействие двух параллельных проводов с током. Если провода расположены параллельно оси x_3 и находятся друг от друга на расстоянии d , измеряемом по оси x_1 , и в них текут токи $I_{(1)}$ и $I_{(2)}$, то сила, действующая на провод с током $I_{(1)}$, на основании формулы (5-8-2) с учетом (5-2-3) определяется выражением

$$\mathbf{F} = I_{(1)} \mu_a \left[\mathbf{I} \mathbf{H}_{(2)} \right]$$

$$\text{или} \quad F = \pm \frac{\mu_a l}{2\pi} \frac{I_{(1)} I_{(2)}}{d} \text{ [н]}, \quad (5-8-9)$$

где l — длина провода (направление l совпадает с направлением тока);

$H_{(2)}$ — напряженность магнитного поля, создаваемого током $I_{(2)}$ на поверхности провода с током $I_{(1)}$.

Вследствие симметрии выражения (5-8-9) относительно токов $I_{(1)}$ и $I_{(2)}$ сила, действующая на второй провод, и сила взаимодействия между проводами определяется этим же выражением. При этом знак плюс указывает на сближение проводов при одинаково направленных токах, а знак минус — отталкивание проводов с противоположно направленными токами.

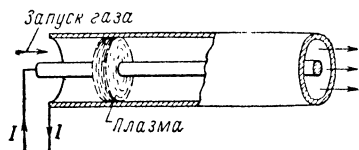


Рис. 5-33. Схема плазменного реактивного двигателя.

Согласно формуле (5-8-9) контур, по которому протекает ток, растягивается. На этом явлении основано действие плазменного реактивного двигателя (рис. 5-33). Здесь расширяющийся контур тока образован coaxialными металлическими цилиндрами. К их левым концам присоединен источник тока. Цилиндры замыкаются плазменным сгустком (плазмоидом), движущимся к их другим концам, откуда он выбрасывается в вакуум. Уравнение движения плазменного сгустка.

$$\rho_n \frac{dv}{dt} = \mu_a [JH] - \text{grad } p_r; \quad (5-8-10)$$

здесь ρ_n — плотность плазмы [кг/м^3];

v — скорость сгустка [м/сек];

J и H — плотность тока и напряженность магнитного поля на поверхности плазменного сгустка.

Определим давлением p_m [н/м^2], которое испытывает внутренняя поверхность катушки с током. Если витки намотаны практически вплотную и $l \gg D$ (рис. 5-15), то можно считать, что все магнитное поле сосредоточено внутри катушки. Поэтому на основе формул (5-8-1) и (5-3-12) давление

$$p_m = \frac{\mu_a H^2}{2} = \mu_a \frac{\omega'^2 I^2}{2}, \quad (5-8-11)$$

где ω' — количество витков на единицу длины катушки.

Силу взаимодействия двух concentрически параллельных проводниковых витков с радиусом R (рис. 5-34, а) можно определить на основании формулы (5-8-2)

$$F = \pm 2\pi R I_{(1)} \mu_a H_{\rho(2)};$$

здесь $I_{(1)}$ — ток в первом витке;

$H_{\rho(2)}$ — напряженность магнитного поля на поверхности первого витка, создаваемого протекающим во вто-

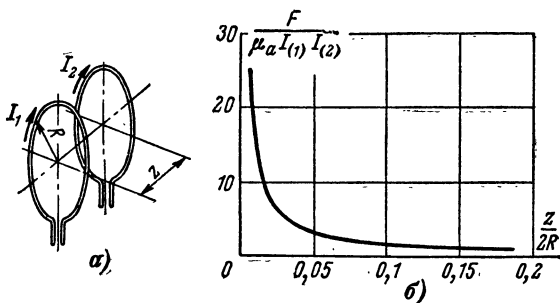


Рис. 5-34. Взаимодействие круглых витков с током.

а — схема расположения витков; б — график зависимости величины $\frac{F}{\mu_a I_{(1)} I_{(2)}}$ от отношения $\left(\frac{z}{2R}\right)$.

ром витке током $I_{(2)}$; поле это описывается выражениями (5-3-6) при подстановке в них $\rho = R$.

При $z \ll R$ можно полагать, что

$$H_{\rho(2)} \approx \frac{I_{(2)}}{2\pi R} \cdot \frac{z}{2R} \left[-K + \frac{2R^2}{z^2} N \right] \approx \frac{I_{(2)}}{2\pi R} \cdot \frac{R}{z}.$$

Вследствие этого

$$F \approx \pm \mu_a I_{(1)} I_{(2)} \frac{R}{z} [\text{н}]. \quad (5-8-12)$$

Знак плюс перед правой частью этого выражения указывает, что при одинаковом направлении токов в витках они стремятся сблизиться, а знак минус указывает на «расталкивание» витков при разнонаправленных токах.

На рис. 5-34, б приведен график зависимости величины $\frac{F}{\mu_a I_{(1)} I_{(2)}}$ от отношения $\frac{z}{2R}$.

Из этого графика видно, что при $\frac{z}{2R} \leq 0,05$ наблюдается быстрое уменьшение взаимодействия между витками.

Силы внешнего магнитного поля. Рассмотрим силовое воздействие магнитного поля, в которое помещен плазменный цилиндр. Как было показано в § 5-7, при этом в плазме возникает кольцевой ток. Очевидно, этот ток и внешнее магнитное поле создадут силу, которая, будучи направлена перпендикулярно оси цилиндра, вызовет сжатие его поперечного сечения; в данном случае это сжатие называют θ -пинч-эффектом. Величина давления при этом может быть определена по формуле (5-8-1), если считать, что магнитное поле внутри плазмы на основании выражения (5-7-12) практически отсутствует.

Явление сжатия плазменного цилиндра продольным магнитным полем может быть использовано для локализации плазменного сгустка. Это осуществляют с помощью «магнитной ловушки» в виде цилиндрических катушек, по которым течет постоянный ток (рис. 5-35). В местах с большим числом ампер-витков на единицу длины происходит сильное сжатие плазменного сгустка и, следовательно, локализация его в пространстве.

Свободно подвешенный в магнитном поле проводник или магнетик приходит во вращательное движение около оси, совпадающей с направлением внешнего магнитного поля (рис. 5-36). Это явление, называемое гиромагнитным эффектом, вызывается взаимодействием магнитных моментов атомов с внешним магнитным полем и количественно определяется соотношением

$$B = \frac{\chi_m H}{c_{gm} \gamma} [\text{дж} \cdot \text{сек} / \text{м}^3]; \quad (5-8-13)$$

здесь B — момент количества движения единицы объема;
 c_{gm} — гиромагнитный коэффициент (безразмерный);
 γ — гиромагнитное отношение [см. формулу (2-9-1a)].

При равномерном вращении в магнитном поле тело намагничивается (эффект Барнета). Величина намагниченности

$$M = \frac{\chi_m \Omega}{\mu_0 c_{gm} \gamma} [a/m], \quad (5-8-13a)$$

где Ω — угловая скорость вращения тела $[\text{сек}^{-1}]$.

Если проводящий цилиндр (из металла или газовой плазмы), по которому проходит ток величиной I , нахо-

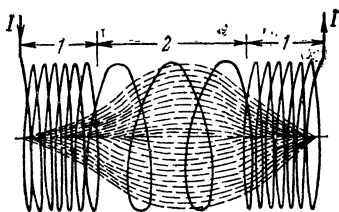


Рис. 5-35. Схема «магнитной ловушки» (эффект сжатия хорошо проводящей плазмы внешним магнитным полем).

1 — катушки с плотной намоткой витков; 2 — катушка с малым числом витков.

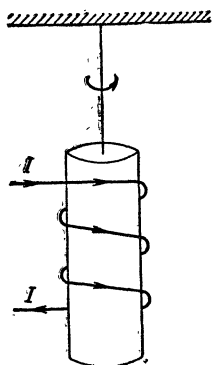


Рис. 5-36. К гиромагнитному эффекту.

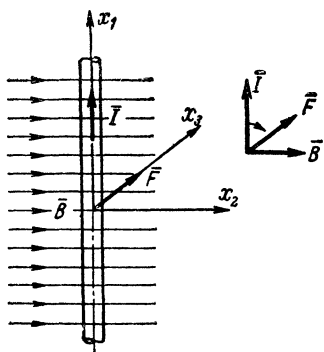


Рис. 5-37. Сила, действующая на проводящий цилиндр с током, находящийся в магнитном поле.

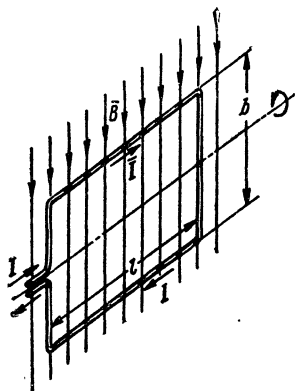


Рис. 5-38. Рамка с током в магнитном поле.

дится в поперечном внешнем магнитном поле [т. е. в поле, силовые линии которого перпендикулярны оси цилиндра (рис. 5-37)], то на него (на цилиндр) в соответст-

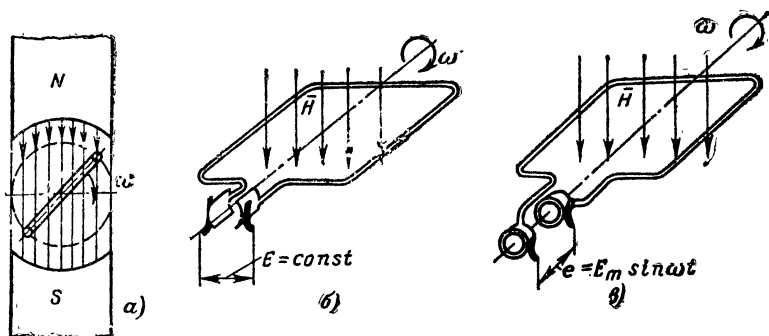


Рис. 5-39. Элементарные схемы электрических машин.

а — вращающаяся рамка в постоянном магнитном поле; *б* — вращающаяся рамка с коллектором; *в* — вращающаяся рамка с контактными кольцами.

вии с формулой (5-8-2) действует сила

$$F = \mu_a I [H] [л], \quad (5-8-14)$$

здесь l — длина цилиндра.

Момент вращения проволоочной рамки с током I , находящейся в магнитном поле (рис. 5-38), на основании выражения (5-8-14) определяется формулой

$$M_{\text{мех}} = Fb = \mu_a S_0 IH [\text{дж}], \quad (5-8-15)$$

здесь $S_0 = lb$ — площадь рамки.

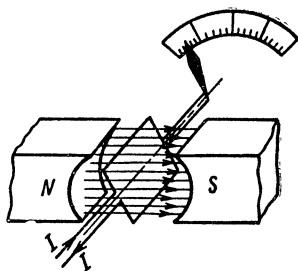


Рис. 5-40. Схема магнито-электрического электроизмерительного прибора.

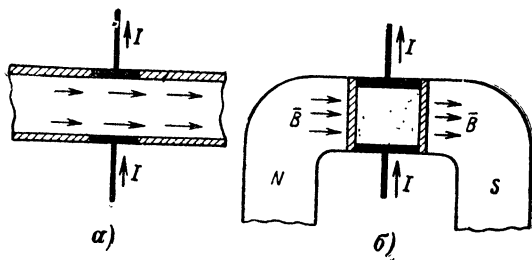


Рис. 5-41. Схема магнитогидродинамического насоса для расплавленного металла.

а — продольный разрез; *б* — поперечный разрез.

На вращении рамки с током, помещенной в магнитное поле (рис. 5-39), основано устройство электродвигателей постоянного тока. В серийном двигателе магнитное поле создается электромагнитом, обмотка которого соединена последовательно с вращающейся обмоткой. Вращающий момент такого электродвигателя пропорционален квадрату величины тока; он достигает наибольшего значения в момент включения.

Действие электроизмерительных приборов постоянного тока также основано на вращении рамки в магнитном поле (рис. 5-40). Угол поворота рамки в однородном магнитном поле, уравновешенной силой пружины, пропорционален току, текущему в рамке.

На явлении смещения помещенной во внешнее магнитное поле проводящей жидкости, по которой протекает ток, основано устройство насосов для перекачки расплавленных металлов (рис. 5-41).

5-9. ПЕРЕДАЧА ЭНЕРГИИ СТАЦИОНАРНЫМ ПОЛЕМ

Из уравнений Максвелла для стационарного поля (5-1-1) следует, что его магнитное поле соленоидально (магнитные силовые линии замкнуты), а электричес-

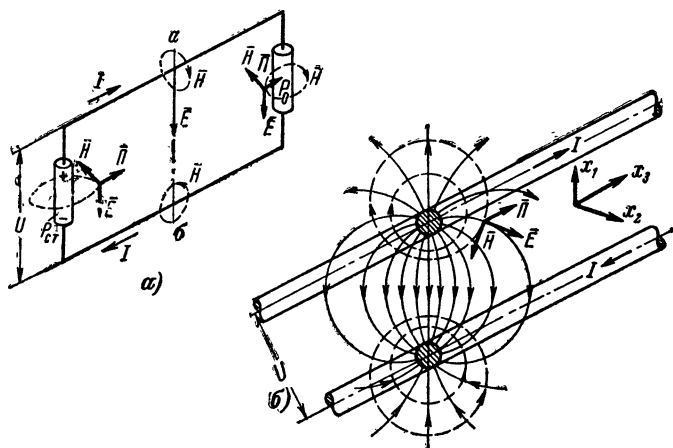


Рис. 5-42. Передача электромагнитной энергии постоянным током.

a — схема; b — структура поля в сечении ab .

кое — потенциально (электрические силовые линии опираются на заряды). Электромагнитное поле такой структуры, передающее энергию в определенном направлении, может быть получено с помощью идущих в этом направлении двух проводов, заряды по которым движутся в противоположных направлениях. Электрические силовые линии опираются на эти заряды (рис. 5-42).

Теорема Умова—Пойнтинга (1-6-3) для стационарного поля (где $\partial W/\partial t=0$) имеет следующий вид:

$$\oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{S} = P^{\text{сг}} - \int_V \mathbf{J}\mathbf{E} dV. \quad (5-9-1)$$

Левая часть этого выражения применительно к рис. 5-42 может быть представлена в следующем виде:

$$P_0 = \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{S} = UI [\text{см}]. \quad (5-9-2)$$

Из этой формулы следует, что передаваемую стационарным полем мощность можно определить как произведение разности потенциалов между проводами на ток в проводах.

В случае коаксиальной линии (рис. 5-8) поток мощности движется в кольцевом канале с радиусами a_1 , a_2 , в котором согласно формулам (5-2-10), (5-2-10а) и (5-2-12а)

$$E_r = \frac{U}{r} \frac{1}{\ln \frac{a_2}{a_1}},$$

$$H_\alpha = \frac{I}{2\pi r}.$$

Отсюда следует, что передаваемая мощность

$$P_0 = \int_S E_r H_\alpha dS = \frac{UI}{2\pi \ln \frac{a_2}{a_1}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{r^2} 2\pi r dr = UI [\text{см}],$$

т. е. величина этой мощности определяется произведением UI .

В случае двухпроводной линии «ленточного» типа (рис. 5-31) при $b \gg d$ практически можно считать, что все поле сосредоточено в пространстве между лентами и, следовательно, поток мощности движется только в этом пространстве. Поле в пространстве между лентами можно считать однородным, т. е. $E_1 = U/d$, $H_2 = I/b$; следовательно, передаваемая мощность

$$P_0 = \oint_S E_1 H_2 dS = E_1 H_2 db = UI [\text{см}],$$

т. е. также определяется произведением UI .

В этих расчетах мы не учитывали потери энергии в проводах, предполагая, что их проводимость $\sigma \rightarrow \infty$

и поэтому на поверхности проводов $E_r = 0$. В действительности же (см. рис. 5-43) у поверхности проводника вектор \mathbf{E} имеет нормальную и тангенциальную составляющие, вследствие чего вектор Пойнтинга у этой поверхности

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \mathbf{e}_z E_n H_r - \mathbf{e}_r E_r H_r. \quad (5-9-3)$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы представляет вектор, направленный вдоль оси проводов

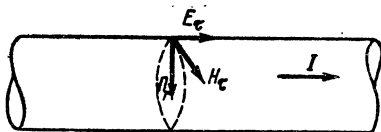


Рис. 5-43. Составляющие поля у поверхности прямолинейного круглого провода с током.

и, следовательно, определяющий энергию, переносимую вдоль проводника от источника к нагрузке. Второе слагаемое — вектор, направленный внутрь проводника; следовательно, он определяет энергию, поглощаемую проводником. Полная поглощаемая мощность каждым проводом на длине l равна:

$$P'_0 = \int_S E_r H_r dS = \int_S \frac{J}{\sigma} H_r dS \text{ [вт]}, \quad (5-9-4)$$

где S — поверхность провода длиной l .

Согласно формуле (5-2-4) в случае проводов круглого сечения и достаточно большом расстоянии между ними напряженность магнитного поля у поверхности провода $H_{r2} = I/2\pi a$. Так как плотность тока $J = I/\pi a^2$, то на основании формулы (5-9-4) поглощаемая обоими проводами всей линии мощность

$$P'_0 = 2 \frac{I^2 l}{\sigma \pi a^2} = I^2 R_{\Pi}, \quad (5-9-5)$$

где R_{Π} — сопротивление обоих проводов линии длиной l , определяемое по формуле (5-6-9).

Выражение (5-9-5) представляет закон Джоуля—Ленца [см. выражение (5-6-5)]. Следовательно, выделение тепла током есть результат проникновения в проводник электромагнитного поля из внешнего пространства.

Векторы **Е**, **Н** и **П** в любой точке линии передачи направлены так, что энергия распространяется вдоль проводов от источника к нагрузке; при этом, как мы уже говорили, передача энергии осуществляется в пространстве, окружающем провода, а не внутри проводов. Однако плотность энергии — наибольшая в непосредственной близости к поверхности проводов, где напряженность электрического и магнитного полей наибольшая. У нагрузки вектор Пойнтинга направлен внутрь ее, т. е. электромагнитная энергия входит в нагрузку, превращаясь в другой вид энергии. У источника энергии вектор **П** направлен во внешнюю среду. Вследствие наличия сопротивления проводов на их поверхности появляется тангенциальная составляющая **Е**; поэтому часть энергии проникает внутрь проводов, превращаясь в тепло.

Мощность, отдаваемая источником (с учетом потерь в проводах), согласно формуле (5-9-2)

$$P_{01} = UI \quad [вт]. \quad (5-9-6)$$

Напряжение U [в] измеряется у источника энергии. Мощность, поглощаемая в проводах, определяется формулой (5-9-5), вследствие этого полезная мощность в нагрузке

$$P_{02} = UI - I^2 R_{\pi}, \quad (5-9-7)$$

а к. п. д. линии передачи постоянного тока

$$\eta = \frac{P_{02}}{P_{01}} = 1 - \frac{IR_{\pi}}{U}, \quad (5-9-8)$$

т. е. он возрастает при увеличении U между проводами.

5-10. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Электрической цепью называется соединение пассивных и активных элементов, образующих замкнутый путь электрическому току. К пассивным элементам электрической цепи относятся устройства, которые могут запасать и расходовать электромагнитную энергию (конденсаторы, катушки, резисторы и т. п.). К активным элементам электрической цепи относятся источники электромагнитной энергии.

В состав электрической цепи входят также вспомогательные элементы: устройства, замыкающие, размыкающие цепь и переключающие отдельные ее участки; устройства эти могут быть как чисто механические, так

и электрически управляемые, основанные на использовании нелинейных элементов (управляемые электрические клапаны) или анизотропии (управляемые невзаимные устройства).

При исследовании цепей пользуются интегральными понятиями напряжения и тока, а цепь характеризует ее интегральными параметрами: сопротивлением, индуктивностью и емкостью. При этом выделяющий энергию активный элемент можно рассматривать как отрицательное сопротивление ($R < 0$), а пассивный элемент, поглощающий электромагнитную энергию, — как положительное сопротивление ($R > 0$).

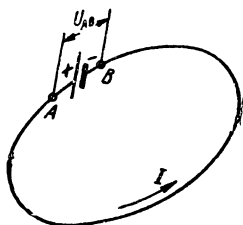


Рис. 5-44. Схема простейшей электрической цепи.

Уравнения, описывающие электромагнитные процессы в линейных цепях постоянного тока, выводятся из точных уравнений электромагнитного поля (5-1-1) и поэтому тоже являются точными.

Строго говоря, во всякой электрической цепи постоянного тока всегда присутствуют емкость и индуктивность. Однако в установившемся режиме они не влияют на величину постоянного тока. По этой причине емкость и индуктивность не учитываются в уравнениях, определяющих ток и поглощаемую мощность в цепи постоянного тока.

Всякий активный элемент цепи постоянного тока, т. е. источник энергии, характеризуется величиной э. д. с. и внутренним сопротивлением; последнее будем обозначать R_1 . Любой пассивный элемент цепи постоянного тока, т. е. приемник энергии, характеризуется сопротивлением нагрузки; его будем обозначать R_2 .

Простейшая цепь постоянного тока представляет замкнутый на источник проводник (рис. 5-44), размеры поперечного сечения которого много меньше его длины; ток в таком проводнике определяется выражением (1-3-4)

$$I = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S},$$

где S — поперечное сечение проводника.

Если проводник окружен непроводящей средой, то поток \mathbf{J} через поверхность проводника равен нулю

и вследствие непрерывности линий этого потока через любое поперечное сечение проводника проходит одно и то же число силовых линий, т. е. в любом сечении проводника в любой момент времени $I = \text{const}$.

Движение зарядов в проводниках вызывается действием электрического поля. При этом совершается работа и эквивалентное этой работе количество энергии выделяется в виде джоулева тепла. Эти потери должны возмещаться за счет других видов энергии неэлектрического происхождения. Поэтому, для того чтобы в проводнике возник ток, необходимо создать в нем электрическое поле, т. е. присоединить его к стороннему источнику э. д. с. Места присоединения источника э. д. с. к цепи называют электродами или зажимами. На рис. 5-44 они обозначены буквами A и B .

Поле сторонних источников постоянного тока проявляется обычно в тонком слое, разграничивающем области с различными физическими свойствами. В результате действия стороннего электрического поля напряженностью $E^{\text{ст}}$ происходит перемещение зарядов, которые возбуждают в окружающем пространстве электрическое поле с напряженностью E .

При наличии стороннего поля плотность тока определяется обобщенным законом Ома в дифференциальной форме

$$J = \sigma (E + E^{\text{ст}}). \quad (5-10-1)$$

Если проводник разомкнут, то ток отсутствует, $J = 0$ и, следовательно,

$$E^{\text{ст}} = -E. \quad (5-10-2)$$

Интегрирование по проходящему через источник пути AB дает:

$$\int_A^B E^{\text{ст}} dl = - \int_A^B E dl.$$

Левая часть этого равенства, т. е. линейный интеграл от сторонней напряженности поля внутри источника,

$$E = \int_A^B E^{\text{ст}} dl \quad (5-10-3)$$

— э. д. с., определяемая работой по перемещению единичного заряда в замкнутой электрической цепи. Она

равна разности потенциалов на зажимах источника, когда проводник разомкнут. При этом на зажимах накапливаются заряды.

При присоединении цепи к источнику э. д. с. возникшее движение зарядов уменьшает заряды на электродах и, следовательно, разность потенциалов между ними. Однако сторонняя напряженность поля $E^{ст}$, действующая в направлении, противоположном полю E , создаваемому зарядами на электродах, компенсирует это уменьшение. Через короткий промежуток времени устанавливается динамическое равновесие: количество зарядов, уходящих от зажимов в единицу времени и приходящих к ним, делается одинаковым. То же можно сказать и относительно любого объема проводника, т. е. распределение заряда в проводнике стационарно

$$I = \frac{dq}{dt} = \text{const.}$$

Создаваемое непрерывно меняющимися на электродах зарядами стационарное поле напряженностью E имеет такой же характер, как и статическое поле, которое создается неподвижными зарядами (см. § 4-1).

В проводнике, где сторонние источники отсутствуют, поле потенциально и интегрирование по пути вне стороннего источника дает:

$$\int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B = U_{AB}. \quad (5-10-4)$$

Разность потенциалов U_{AB} называется падением напряжения или сокращенно напряжением на зажимах цепи. Согласно формуле (5-6-4)

$$U_{AB} = I \int_L \frac{dl}{\sigma S} = IR. \quad (5-10-5)$$

Последнее выражение представляет закон Ома в интегральной форме в применении к части электрической цепи. Интегрируя выражение (5-10-1) по всему замкнутому контуру, включая и источник, получим обобщенный закон Ома в интегральной форме:

$$\oint_L (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ст}) d\mathbf{l} = I \oint_L \frac{dl}{\sigma S} = IR$$

или

$$E_{\text{э.д.с.}} = IR; \quad (5-10-6)$$

здесь R — общее сопротивление проводника и источника.

Разветвленная электрическая цепь постоянного тока — это соединение нескольких сопротивлений и источников э. д. с., образующих замкнутый путь для тока. Точку цепи, в которой сходится не менее трех ее участков,

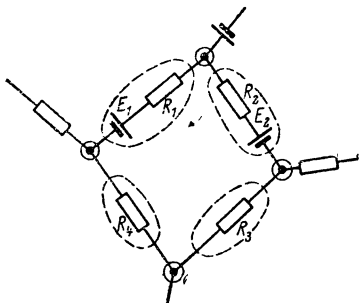


Рис. 5-45. Схема разветвленной электрической цепи. Кружками из сплошных линий обозначены узлы, а пунктирными линиями — ветви цепи.

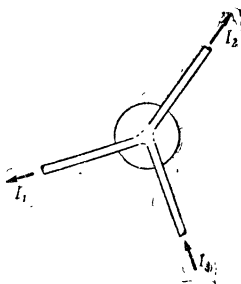


Рис. 5-46. К формулировке первого закона Кирхгофа.

называют узлом, а соединяющий два соседних узла участок цепи — ветвью (рис. 5-45).

Уравнение (5-6-1) $\text{div } \mathbf{J} = 0$, представляющее первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме, позволяет с применением теоремы Остроградского — Гаусса (Д-3-30), получить выражение

$$\int_V \text{div } \mathbf{J} dV = \oint_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = 0, \quad (5-10-7)$$

представляющее тот же закон Кирхгофа в интегральной форме. Применительно к любому узлу электрической цепи (рис. 5-46) последнее выражение переписывается в виде

$$\sum_{i=1}^m \int_{S_i} \mathbf{J}_i d\mathbf{S}_i = 0;$$

здесь S_i — поперечное сечение i -го проводника, входящего в узел;

\mathbf{J}_i — плотность тока в нем;

m — число ветвей, образующих узел.

Так как

$$\int_{S_i} \mathbf{J}_i d\mathbf{S}_i = I_i, \text{ то} \\ \sum_{i=1}^m I_i = 0. \quad (5-10-8)$$

Эта формула выражает первый закон Кирхгофа (закон токов), гласящий: *алгебраическая сумма токов в ветвях, сходящихся к одному и тому же узлу, равна нулю*. При этом величины направленных к узлу токов записываются со знаком плюс, от узла — со знаком минус (или наоборот).

Вычисляя выражение

$$\oint_L (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}) d\mathbf{l}$$

для любого замкнутого контура, содержащего несколько сопротивлений и источников э. д. с. и учитывая при этом выражения (5-10-3) и (5-10-5), получаем:

$$\sum_{i=1}^k E_i = \sum_{i=1}^n I_i R_i; \quad (5-10-9)$$

здесь E_i — э. д. с.; k — число источников э. д. с.; n — число ветвей, входящих в контур.

Формула эта выражает второй закон Кирхгофа (закон напряжений), гласящий: *алгебраическая сумма действующих в контуре э. д. с. равна алгебраической сумме падений напряжений на всех входящих в этот контур сопротивлениях*. Если направление обхода контура совпадает с направлением тока, то $I_i R_i$ берется со знаком плюс; в противном случае — знак минус. Э. д. с. E_i берется со знаком плюс, если направление обхода совпадает с направлением вектора напряженности стороннего поля $\mathbf{E}^{\text{ст}}$, т. е. если при обходе контура мы переходим от отрицательного зажима источника к положительному.

Последовательное соединение элементов электрической цепи — это такое соединение, при котором через все элементы цепи проходит один и тот же ток. Если электрическая цепь состоит из нескольких последовательно соединенных проводников сопротивлениями R_1, R_2, \dots, R_n (рис. 5-47), то на основании формулы (5-10-9)

$$I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = E;$$

следовательно, общее сопротивление R последовательно соединенных сопротивлений равно их сумме

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (5-10-10)$$

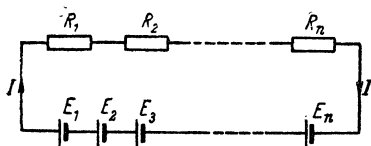


Рис. 5-47. Схема последовательной электрической цепи.

Параллельное соединение элементов электрической цепи — это такое соединение, при котором все элементы находятся под одним и тем же напряжением. На основа-

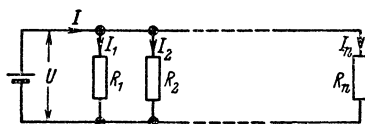


Рис. 5-48. Схема параллельной электрической цепи.

нии формулы (5-10-8) в электрической цепи, состоящей из нескольких параллельно соединенных сопротивлений (рис. 5-48),

$$-I + \sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (5-10-11)$$

или

$$I = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (5-10-11a)$$

Падение напряжения на каждом из них одинаково, т. е.

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = \dots = I_n R_n = U = IR,$$

где R — общее (эквивалентное) сопротивление цепи.

Отсюда величина тока в i -м проводнике

$$I_i = \frac{R}{R_i} I. \quad (5-10-12)$$

Из выражений (5-10-12) и (5-10-11) находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}; \\ g &= \sum_{i=1}^n g_i, \end{aligned} \right\} \quad (5-10-13)$$

т. е. общая проводимость электрической цепи, состоящей из параллельно соединенных сопротивлений, равна сумме их проводимостей.

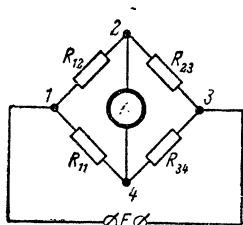


Рис. 5-49. Пример смешанного соединения (мостовая схема).

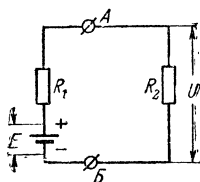


Рис. 5-50. Обобщенная схема электрической цепи постоянного тока.

R_1 — внутреннее сопротивление источника э. д. с.;
 $A-B$ — внешняя цепь;
 E — э. д. с.; U — напряжение на нагрузке.

Смешанное соединение — последовательное и параллельное соединение нескольких элементов электрической цепи. Важным практическим примером такого соединения является мостовая схема (рис. 5-49). Ее используют, в частности, для измерительных целей. С помощью мостовой схемы можно определить неизвестное сопротивление, например R_{34} при известных R_{14} , R_{12} , R_{23} . При равенстве нулю разности потенциалов между точками 2—4, т. е. при отсутствии тока в этой ветви,

$$R_{34} = R_{14} \frac{R_{23}}{R_{12}}. \quad (5-10-14)$$

В самом деле, разность потенциалов между этими точками будет равна нулю, если $I_1 R_{12} = I_2 R_{14}$ и $I_1 R_{23} = I_2 R_{34}$. Разделив первое равенство на второе, мы получим формулу (5-10-14). При измерении сопротивления добиваются нулевого положения стрелки гальванометра, изменяя отношение R_{23}/R_{12} .

Обобщенная схема электрической цепи изображена на рис. 5-50. Внешним участком электрической цепи, или сокращенно внешней цепью, называется участок, состоящий из сопротивлений нагрузок, а внутренним — участок, содержащий источники э. д. с. Напряжение внешнего участка цепи и ток в нем определяются нижеследующими формулами, полученными на основании выражений (5-10-5), (5-10-9) и (5-10-10)

$$U = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad (5-10-15)$$

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}. \quad (5-10-16)$$

Мощность во всей цепи

$$P_0 = \frac{E^2}{R_1 + R_2} \quad (5-10-17)$$

и во внешнем участке

$$P_{02} = E^2 \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2}. \quad (5-10-18)$$

Отсюда к. п. д. цепи постоянного тока

$$\eta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (5-10-19)$$

Максимальная мощность будет выделяться в цепи постоянного тока при равенстве внешнего сопротивления внутреннему, т. е. когда $R_2 = R_1$. Это условие называется условием согласованной нагрузкой. При этом

$$P_{\text{макс}} = \frac{E^2}{4R_2}; \quad (5-10-20)$$

$$\eta = 0,5.$$

Генератором напряжения называют источник э. д. с., внутреннее сопротивление которого значительно меньше внешнего, т. е. $R_1 \ll R_2$. При этом согласно формуле (5-10-15) напряжение внешней цепи приближенно равно э. д. с. и практически не зависит от протекающего в цепи тока, т. е. $U \approx E$.

Генератором тока называют источник э. д. с., внутреннее сопротивление R_1 которого значительно больше внешнего R_2 . При этом согласно формуле (5-10-16) величина тока в цепи $I \approx E/R_1$, т. е. практически не зависит от напряжения на сопротивлении нагрузки.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

6-1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Начиная изучать линейные электромагнитные процессы методом теории поля, мы пользовались дифференциальными характеристиками поля \mathbf{E} [в/м], \mathbf{H} [а/м] и параметрами среды ϵ_a [ф/м], μ_a [гн/м] и σ [сим/м]. Однако уже в главах 4 и 5 встретились необходимость ввести интегральные характеристики: напряжение U [в] и ток I [а] в электрической цепи, а также ее параметры: емкость C [ф], индуктивность L [гн], проводимость g [сим] или сопротивление R [ом].

В общем случае параметры C , R , L могут быть нелинейными или анизотропными (зависимыми от величины или направления тока) и неоднородными. Они могут зависеть от частоты или быть независимой функцией времени, т. е. электрическая цепь может быть параметрической.

Теория цепей основывается на теории электромагнитного поля, а уравнения, описывающие процессы в цепях — на уравнениях Максвелла. В случае постоянного тока уравнения цепей являются точными и выводятся из точных уравнений для стационарного поля. Уравнения цепей переменного тока (при сравнительно малых частотах) основываются на приближенных уравнениях Максвелла для квазистационарного поля.

Квазистационарное поле, создаваемое синусоидальным переменным током [см. формулы (1-4-13) и (2-1-5)], описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &\approx \sigma \dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \right\} \quad (6-1-1)$$

Эти уравнения являются приближенными, так как в них

отсутствует член $\omega \epsilon_a \dot{E} \ll \sigma E$. Такое упрощение допустимо при относительно низких частотах, когда определяемая выражением (2-1-13) длина волны много больше линейных размеров элементов электрической цепи. При этом возможны два случая: 1) размеры электрической цепи меньше длины волны во всех трех измерениях и 2) размер электрической цепи в одном измерении (например, в направлении оси x_3 (рис. 5-42) больше длины волны. В связи с этим линейные электрические цепи переменного тока делят на цепи с сосредоточенными и цепи с распределенными постоянными.

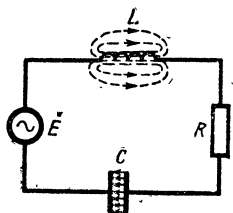


Рис. 6-1. Цепь переменного тока с сосредоточенными постоянными.

Цепь с сосредоточенными постоянными (рис. 6-1) может быть представлена как система физически разделенных емкостей, индуктивностей и сопротивлений; в связи с этим можно считать, что электрическое и магнитное поля такой цепи пространственно разделены: электрическое поле сосредоточено в участках с большой емкостью (в конденсаторах), а магнитное — в участках с большой индуктивностью (в катушках). Следовательно, накопление и поглощение электромагнитной энергии локализовано в отдельных участках цепи. В цепях с сосредоточенными постоянными пренебрегают индуктивностью обкладок конденсатора, межвитковыми емкостями катушек индуктивности, а также емкостями, индуктивностями и сопротивлениями соединительных проводов. Вместе с тем предполагают, что в каждый момент времени значение тока одинаково во всех последовательно соединенных частях цепи с сосредоточенными постоянными; такой ток называется квазистационарным.

В цепи с распределенными постоянными (рис. 6-2) электрические и магнитные поля пространственно не разделены. В катушках индуктивности, строго говоря, кроме магнитного, имеется и электрическое поле, сосредоточенное в межвитковых зазорах, а конденсатор обладает не только электрическим, но и магнитным полем. В такой цепи учитывается емкость, индуктивность и сопротивление соединительных проводов. В связи с этим поглощение и накопление энергии происходят во всех точ-

ках цепи, а значение тока вдоль всех ее последовательно соединенных участков неодинаково.

Цепями с распределенными постоянными являются «длинные линии», т. е. двухпроводные линии (рис. 3-43, г, д, е), отрезки волноводов и двухпроводных линий, образующие резонаторы (контуры).

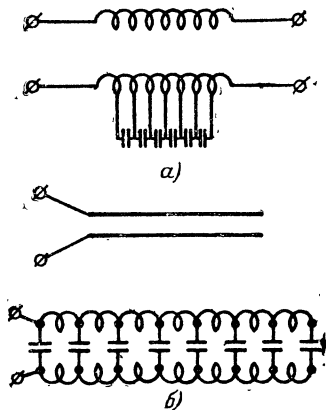


Рис. 6-2. Пассивные элементы цепи переменного тока и их эквивалентные схемы.

a — катушка индуктивности;
 b — конденсатор.

В ряде случаев одну и ту же цепь можно рассматривать при относительно низких частотах (при длинных волнах) как цепь с сосредоточенными постоянными, а при высоких частотах (при коротких волнах) — как цепь с распределенными постоянными. В связи с этим конденсатор, сконструированный для низких частот, при использовании его в цепях высокой частоты становится «длинной линией», если длина его обкладок сравнима с длиной волны; при этом для токов высоких частот он может представлять индуктивное, а не емкостное сопротивление.

Вместе с тем отрезок двухпроводной, короткозамкнутой на конце линии, если длина его $l \geq \lambda/4$, является «длинной линией» и может иметь бесконечно большое реактивное сопротивление.

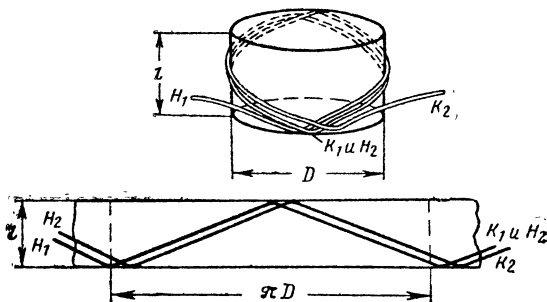


Рис. 6-3. «Беземкостная» намотка катушки индуктивности.

Межвитковая емкость в катушках индуктивности, индуктивность конденсаторных обкладок, а также индуктивность и емкость резисторов являются вредными в том смысле, что они искажают процессы в цепи. Поэтому емкости катушек, индуктивности конденсаторов и резисторов называют паразитными. Уменьшение их величины нередко требует специальных конструктивных приемов; примерами могут служить «безъёмкостная» намотка катушек (рис. 6-3) и бифилярная намотка резисторов (рис. 6-4).

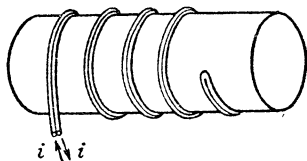


Рис. 6-4. Бифилярная намотка резистора.

Емкости C , индуктивности L и сопротивления R в случае статических и стационарных полей согласно формулам (4-4-2), (5-4-4а) и (5-6-4а) определяются электромагнитными параметрами ϵ_a , μ_a , σ и геометрическими размерами проводников. При переменном токе распределение поля по сечению проводника неоднородно, вследствие чего значения C , L и R отличаются от значений, определяемых на основе упомянутых формул.

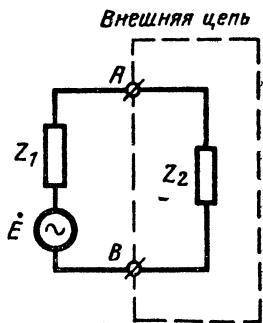


Рис. 6-5. Обобщенная схема, в которой источник обладает внутренним сопротивлением Z_1 .

В общем случае индуктивность и сопротивление провода при переменном токе определяются из уравнений, описывающих распространение электромагнитной волны около этого провода (гл. 8).

Источники э. д. с. в цепях переменного тока характеризуются величинами э. д. с. и собственными параметрами C , L , R .

На рис. 6-5 показана обобщенная схема цепи переменного тока, в которой $Z_1(\omega, C_1, L_1, R_1)$ — внутреннее сопротивление генератора переменного тока, а $Z_2(\omega, C_2, L_2, R_2)$ — сопротивление нагрузки.

Основные свойства линейных цепей (как и линейных сред), вытекающие из линейности описывающих их уравнений, состоят в следующем:

1. В таких цепях существует прямая пропорциональность между током и напряжением (закон Ома).

2. При действии на линейную цепь нескольких внешних э. д. с. ток и напряжение в цепи можно определить путем суперпозиции решений, найденных для каждой э. д. с. в отдельности (принцип суперпозиции — принцип наложения).

Поясним этот принцип на примере. Пусть в некоторой произвольной линейной электрической цепи действу-

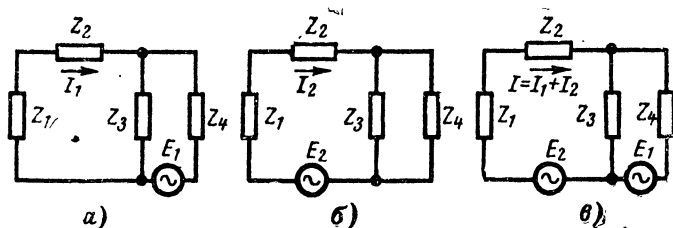


Рис. 6-6. К принципу суперпозиции в электрической цепи.

ет э. д. с. E_1 и при этом в некоторой ветви протекает ток I_1 (рис. 6-6, а). Если источник э. д. с. E_1 удалить и подключить в любом месте этой цепи другой источник э. д. с. E_2 , то в той же ветви возникнет ток I_2 (рис. 6-6, б). При наличии обоих источников э. д. с. в ветви будет протекать ток $I_1 + I_2$ (рис. 6-6, в). Таким образом, действие каждой э. д. с. независимо: создаваемый ею ток остается неизменным независимо от того, действуют в цепи другие э. д. с. или нет.

Применимость принципа суперпозиции для линейных цепей позволяет использовать при их изучении спектральный метод анализа, который основан на замене сложной функции $E(t)$ суммой простых гармонических составляющих, образующих частотный спектр этой функции [см. формулу (Д-7-2)]. При этом ток в цепи определяется как сумма токов каждой гармоники.

3. При любом сложном электрическом воздействии на линейную цепь с постоянными параметрами в ней невозможно возникновение токов, спектр которых содержал бы частоты, отсутствующие в спектре воздействующих э. д. с.

В электроэнергетике используется переменный ток сравнительно низкой частоты: в подавляющем большинстве случаев 50 гц и сравнительно редко несколько сотен

герц. Переменный ток в энергетических устройствах является практически синусоидальным, т. е. с малыми и быстро убывающими с возрастанием номера амплитудами высших гармоник.

В электросигнализации же широко используют несинусоидальные токи, ибо установившийся монохроматический электромагнитный процесс не может нести ин-

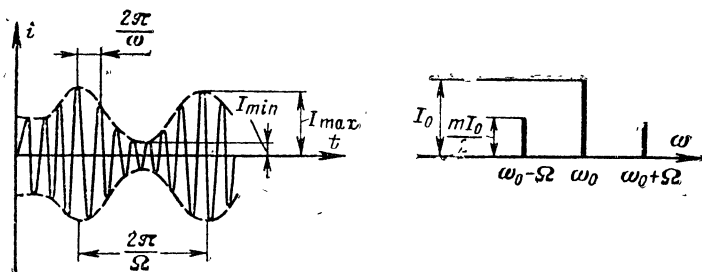


Рис. 6-7. Временная и спектральная функции амплитудно-модулированного переменного тока.

формации. Для создания электрического сигнала необходимо в соответствии с законом этого сигнала (кода информации) изменять амплитуду I_m (рис 6-7), частоту ω или фазу φ переменного тока $i = I_m \sin (\omega t + \varphi)$. Это изменение называется модуляцией. Понятие о различных видах модуляции и соответствующие им временные и спектральные функции тока приведены в § Д-8.

6-2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Учитывая применимость принципа суперпозиции к линейным цепям переменного тока, изучение их будем вести для монохроматических тока, напряжения и э. д. с., выражаемых функциями:

$$\left. \begin{aligned} i &= I_m \cos (\omega t + \varphi_i); \\ u &= U_m \cos (\omega t + \varphi_u); \\ e &= E_m \cos (\omega t + \varphi_e). \end{aligned} \right\} \quad (6-2-1)$$

В технике большей частью оперируют с действующими значениями, которые для синусоидального тока в $\sqrt{2}$ меньше амплитуд [см. выражение (2-1-2)], т. е. $I = I_m / \sqrt{2}$, $U = U_m / \sqrt{2}$ и $E = E_m / \sqrt{2}$.

В комплексном виде (§ Д-5) уравнения (6-2-1) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} &= I e^{j\varphi_i}; \\ \dot{U} &= U e^{j\varphi_u}; \\ \dot{E} &= E e^{j\varphi_e}, \end{aligned} \right\} \quad (6-2-1a)$$

где \dot{I} , \dot{U} , \dot{E} — комплексные действующие значения.

Цепи с сосредоточенными постоянными. Рассмотрим замкнутый контур (рис. 6-8). Пусть в сечении S_1 в момент t_1 течет ток $i_1 = I_m \sin \omega t_1$. Очевидно, что на расстоянии l от S_1 до S_2 электромагнитный процесс запаздывает на время $\tau = l/v$, где v — скорость его распространения в среде. Поэтому в сечении S_2 в тот же момент t_1 ток равен:

$$i_2 = I_m \sin \omega (t_1 - \tau) = I_m \sin (\omega t_1 - \varphi_i),$$

$$\text{где } \varphi_i = \omega \tau = \frac{2\pi}{\lambda} l.$$

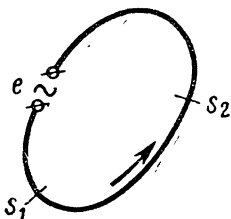


Рис. 6-8. Замкнутый контур с переменным током.

Если $l/\lambda \ll 1$, то $\varphi_i \rightarrow 0$ и, следовательно, можно считать, что мгновенное значение тока во всех точках контура одинаково. Такая система (цепь) называется квазистационарной; в этом случае согласно закону Ома [см.

выражение (1-2-1a)] плотность тока в каждой точке проводника

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}).$$

Подставляя это выражение во второе уравнение Максвелла в интегральной форме (1-3-2)

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

получаем:

$$\oint_L \frac{\mathbf{J}}{\sigma} d\mathbf{l} - \oint_L \mathbf{E}^{\text{ст}} d\mathbf{l} = i \oint_L \frac{d\mathbf{l}}{\sigma S} - e = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (6-2-2)$$

Если пронизывающий контур магнитный поток создается только током i самой цепи и ферромагнитные материалы в контуре отсутствуют, то согласно формуле (5-4-3) $\Phi = Li$. Далее, учитывая выражения (5-6-4a),

(5-10-3) и принимая во внимание, что рассматриваемая система квазистационарна, т. е. процессы в ней являются функцией только времени (отношение $\partial i/\partial t$ можно заменить на di/dt), из формулы (6-2-2) находим

$$e = iR + L \frac{di}{dt}, \quad (6-2-3)$$

где e — мгновенное значение приложенной э. д. с.; R — сопротивление контура; L — его индуктивность.

Если имеется n контуров, связанных только индуктивно, т. е. через магнитные поля (рис. 6-9), то для каждого k -го контура выражение (6-2-2) имеет вид:

$$i_k R_k - e_k = - \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}; \quad (6-2-4)$$

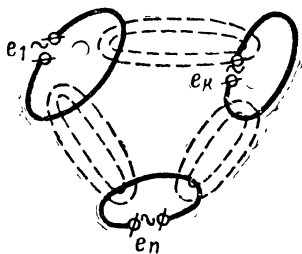


Рис. 6-9. Индуктивно связанные контуры.

здесь магнитный поток $\Phi_k = \sum_{j=1}^n L_{kj} i_j$, пронизывающий k -й контур, возбуждаемый токами, протекающими в этом контуре ($j=k$) и в других контурах ($j \neq k$).

Для этого случая выражение (6-2-4) имеет следующий вид:

$$e_k = i_k R_k + \sum_{j=1}^n L_{kj} \frac{di_j}{dt}. \quad (6-2-5)$$

Если некоторые из контуров содержат конденсаторы, то путь интегрирования в выражении (6-2-2) будет проходить не только через проводник, но и через диэлектрик конденсатора. В этом случае к уравнению (6-2-5) надо добавить интеграл вдоль линии, соединяющей обкладки конденсатора, т. е.

$$\int_{L_C} \mathbf{E} d\mathbf{l} = u_C = \frac{q}{C},$$

где u_C — напряжение на обкладках конденсатора, q — его заряд и C — емкость.

Для этого случая выражение (6-2-5) будет иметь следующий вид:

$$e_k = i_k R_k + \sum_{j=k}^n L_{kj} \frac{di_j}{dt} + \frac{q_k}{C_k}. \quad (6-2-6)$$

Ток в содержащей конденсатор ветви

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}.$$

Отсюда

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_0, \quad (6-2-7)$$

где $u_0 = u_C$ в момент времени $t=0$.

С учетом последнего равенства выражение (6-2-6) приобретает вид:

$$e_k = i_k R_k + \sum_{j=1}^n L_{kj} \frac{di_j}{dt} + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt + u_{0k}. \quad (6-2-8)$$

Итак, если известны сопротивление R , индуктивность L и емкость C замкнутой электрической цепи, то ее расчет можно свести к расчету токов и напряжений в ней. В этом суть метода теории цепей и отличие его от метода теории поля. Уравнение (6-2-8) полностью определяет электромагнитный процесс в цепи, но дает не его пространственное распределение, а временную зависимость.

Если индуктивная связь между контурами отсутствует, то уравнение (6-2-8) принимает вид:

$$e_k = i_k R_k + L_{kk} \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt + u_{0k}, \quad (6-2-8a)$$

в котором L_{kk} — собственная индуктивность k -го контура.

В случае одного контура последнее уравнение имеет следующий вид:

$$e = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_0. \quad (6-2-9)$$

Отсюда следует:

напряжение на сопротивлении

$$u_R = iR, \quad (6-2-9a)$$

т. е. пропорционально току;
напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad (6-2-9б)$$

т. е. пропорционально производной тока по времени,
иначе говоря скорости изменения тока;

напряжение на емкости

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt, \quad (6-2-9в)$$

т. е. пропорционально интегралу тока по времени (заряду).

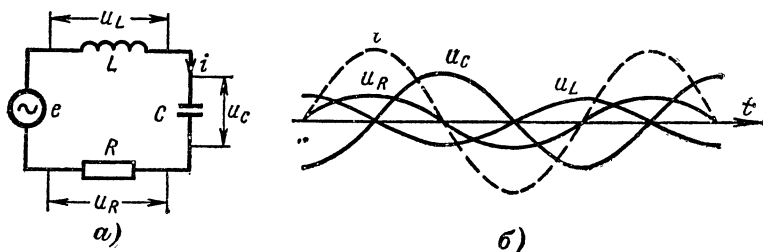


Рис. 6-10. Эквивалентная схема контура (а) и кривые напряжений и тока в нем (б).

На рис. 6-10 приведена эквивалентная схема контура и график изменения напряжений u_R , u_L , u_C при синусоидальном переменном токе (т. е. когда $i = I_m \sin \omega t$). В этом случае

$$\left. \begin{aligned} u_R &= iR = RI_m \sin \omega t = U_{mR} \sin \omega t; \\ u_L &= L \frac{di}{dt} = \omega LI_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= U_{mL} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right); \\ u_C &= \frac{1}{C} \int i dt = \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= U_{mC} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6-2-9г)$$

Из этих формул следует, что $u_L = U_{mL} = \omega LI_m$ при мгновенном значении тока, равном нулю и $di/dt > 0$, а $u_C = U_{mC} = \frac{I_m}{\omega C}$ при мгновенном значении тока, равном ну-

лю и $di/dt < 0$. Мгновенные значения напряжений u_L и u_C равны нулю в моменты, когда $i = I_m$ и $di/dt = 0$.

Цепи с распределенными постоянными. В качестве примера цепи с распределенными постоянными рассмотрим двухпроводную линию (рис. 6-11). Так как длина линии $l \gg \lambda$, то ток в разных ее сечениях в каждый данный момент времени различен, а электрическая и маг-

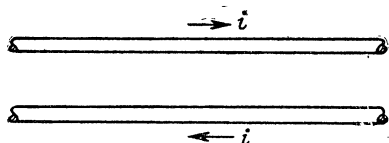


Рис. 6-11. Двухпроводная линия.

нитная энергии непрерывно распределены вдоль линии.

Двухпроводную линию удобно характеризовать параметрами, отнесенными к единице длины (погонные параметры линии): емкость проводов $C_0[\phi/m]$, индуктив-

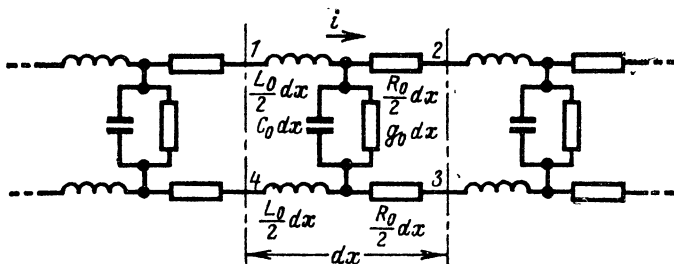


Рис. 6-12. Эквивалентная схема участка двухпроводной линии.

ность проводов $L_0 [гн/м]$, сопротивление проводов $R_0 [ом/м]$ и $g_0 [сим/м]$ — проводимость изоляции проводов. Эквивалентная схема двухпроводной линии приведена на рис. 6-12. Каждый элемент dx такой линии, характеризуется параметрами: $L_0 dx$, $C_0 dx$, $R_0 dx$ и $g_0 dx$.

Найдем уравнение напряжений вдоль линии, полагая, что во всех точках элемента длины dx ток одинаков. Для этого к изображенному на рис. 6-13 контуру применим второе уравнение Максвелла в интегральной форме (1-3-9):

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (6-2-10)$$

Контур L состоит из лежащих на проводниках отрезков 1-2 и 4-3 и отрезков 1-4 и 2-3, соединяющих провода по кратчайшей прямой в поперечных сечениях x и $(x+dx)$. На основании этого левая часть уравнения (6-2-10) может быть представлена в виде суммы интегралов:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} &= \frac{iR_0 dx}{2}; \\ \int_3^4 \mathbf{E} d\mathbf{l} &= \frac{iR_0 dx}{2}; \\ \int_2^3 \mathbf{E} d\mathbf{l} &= u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \\ \int_4^1 \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -u(x),\end{aligned}$$

где $u(x)$ — напряжение между проводами в сечении x .

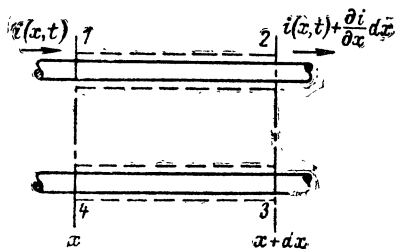


Рис. 6-13. К определению изменения напряжения и тока вдоль двухпроводной линии.

Суммируя эти интегралы, находим:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{\partial u}{\partial x} dx + iR_0 dx. \quad (6-2-11)$$

Магнитный поток через контур L равен:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi_0 dx = iL_0 dx, \quad (6-2-12)$$

где Φ_0 — магнитный поток, приходящийся на единицу длины линии; он складывается из потока, проходящего между проводами, и потока внутри проводов.

Подставляя полученные значения (6-2-11) и (6-2-12) в выражение (6-2-10), находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i = 0, \quad (6-2-13)$$

т. е. вследствие наличия омического сопротивления и индуктивности проводов напряжение вдоль линии изменяется. Отметим, что последнее выражение является приближенным, поскольку оно выведено в предположении, что величина тока вдоль линии одинакова.

Исследуем, как изменяется ток вдоль линии, полагая, что во всех точках элемента длины dx напряжение одинаково. Для этого применим уравнение непрерывности в интегральной форме (1-3-16)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_S J_n dS = 0 \quad (6-2-14)$$

к элементу объема, обозначенного на рис. 6-13 пунктирной линией. Через левый конец провода входит ток $i(x, t)$, через правый конец выходит ток $i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x} dx$.

Различие между этими токами обусловлено тем, что через боковую поверхность провода в направлении к противоположному проводу проходит пропорциональный напряжению ток проводимости, равный $u(x, t) g_0 dx$. Кроме того, на участке dx происходит увеличение или уменьшение заряда в распределенной емкости, что также влияет на различие между входящим и выходящим током.

Первое слагаемое левой части выражения (6-2-14) представляет изменение заряда в единицу времени на участке dx

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \frac{\partial [C_0 dx u(x, t)]}{\partial t} = C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6-2-14a)$$

Второе слагаемое левой части выражения (6-2-14), т. е. интеграл $\oint_S J_n dS$, может быть представлен как сумма интегралов по поперечным сечениям, x , $x+dx$ и боковой поверхности участка провода длиной dx . Учитывая, что

за положительное направление нормали мы приняли направление внешней нормали, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \int_{S(x+dx)} J_n dS &= \int_{S(x+dx)} J_x dS = i(x) + \frac{\partial i}{\partial x} dx; \\ \int_{S(x)} J_n dS &= - \int_{S(x)} J_x dS = -i(x); \\ \int_{S_{\text{бок}}} J_n dS &= u(x, t) g_0 dx. \end{aligned} \right\} \quad (6-2-146)$$

Подставляя (6-2-14a) и (6-2-146) в уравнение (6-2-14), получаем:

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + u g_0 = 0, \quad (6-2-15)$$

т. е. ток изменяется вдоль линии из-за наличия проводимости (утечки) изоляции и емкости проводов. Последнее выражение является приближенным, так как оно выведено в предположении, что напряжение между проводами вдоль всей линии одинаково.

Таким образом, процессы в цепях с сосредоточенными постоянными согласно формуле (6-2-9) описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами в полных производных d/dt по времени

$$e = R_i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Процессы в цепях с распределенными постоянными описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами в частных производных $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$ [формулы (6-2-13), (6-2-15)], так как напряжение и ток меняются во времени, и различны в различных точках цепи в один и тот же момент времени, т. е.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i &= 0; \\ \frac{\partial i}{\partial x} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + g_0 u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6-2-16)$$

Эти уравнения называются телеграфными.

Исследование цепей переменного тока можно значительно упростить при использовании символического ме-

тогда (см. § Д-5). Так, уравнение (6-2-9) для цепи, состоящей из последовательного соединения C , L и R ,

$$e = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

в символической форме для монохроматической э. д. с. будет иметь вид:

$$\dot{E} = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C} \dot{I} = \dot{I}Z. \quad (6-2-17)$$

Здесь \dot{E} , \dot{I} — комплексные действующие значения напряжения и тока [см. формулы (6-2-1a)];

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (6-2-18)$$

— комплексное сопротивление цепи. Это сопротивление может быть выражено следующей формулой:

$$Z = ze^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = R + jX, \quad (6-2-18a)$$

где R — вещественная часть комплекса, называемая действительным сопротивлением или просто сопротивлением, и

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (6-2-19)$$

— мнимая часть комплекса, называемая реактивным сопротивлением:

$$z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (6-2-20)$$

— модуль комплексного сопротивления, называемый кажущимся или полным сопротивлением:

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} \quad (6-2-21)$$

— аргумент комплексного сопротивления, он определяет фазовый сдвиг между током и напряжением.

В табл. 6-1 приведены значения различных сопротивлений и проводимостей цепей переменного тока и их взаимосвязь.

Закон Ома в символической форме имеет вид:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}, \quad (6-2-22)$$

Таблица 6-1

Сопrotивления и проводимости при переменном токе

Названия	Значения
Комплексное сопротивление	$Z = R + jX$
Полное сопротивление	$z = \sqrt{R^2 + X^2}$
Сопротивление (действительное)	R
Реактивное сопротивление	$X = X_L - X_C$
Индуктивное сопротивление	$X_L = \omega L$
Емкостное сопротивление	$X_C = \frac{1}{\omega C}$
Комплексная проводимость	$Y = g + jb$
Полная проводимость	$y = \sqrt{g^2 + b^2}$
Проводимость (действительная)	g
Реактивная проводимость	$b = b_C - b_L$
Индуктивная проводимость	$b_L = \frac{1}{\omega L}$
Емкостная проводимость	$b_C = \omega C$

а падения напряжения на последовательных участках

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_R &= R\dot{I}; \\ \dot{U}_L &= j\omega L\dot{I}; \\ \dot{U}_C &= \frac{j}{\omega C} \dot{I}. \end{aligned} \right\} \quad (6-2-23)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{\dot{U}_R}{\dot{I}}; \\ jX_L &= j\omega L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{I}}; \\ -jX_C &= -j \frac{1}{\omega C} = \frac{\dot{U}_C}{\dot{I}}. \end{aligned} \right\} \quad (6-2-24)$$

Из последних соотношений, так же как и из формул (6-2-9г), очевидно, что напряжение и ток на сопротивлении R совпадают по фазе, напряжение на индуктивности опережает ток на 90° , а на емкости — отстает на 90° .

Если два сопротивления Z_1 и Z_2 соединены последовательно, то аналогично случаю постоянного тока [см. выражение (5-10-10)]

$$Z = Z_1 + Z_2. \quad (6-2-25)$$

Общее сопротивление двух параллельно соединенных со-

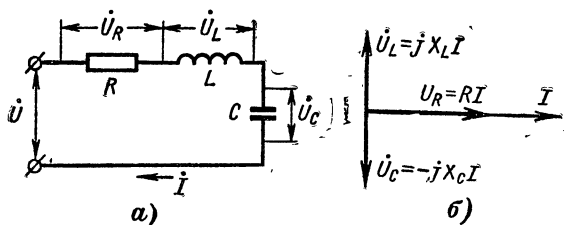


Рис. 6-14. Цепь с последовательным соединением R , L и C (а) и ее диаграмма напряжений (б).

противлений определяется выражением, аналогичным (5-10-13), т. е.

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (6-2-26)$$

Законы Кирхгофа [см. аналогичные формулы (5-10-8) и (5-10-9)] в символической форме можно написать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0; \quad (6-2-27)$$

$$\sum_{k=1}^n I_k Z_k = \sum_{k=1}^m E_k. \quad (6-2-28)$$

Применяя символический метод, следует помнить, что величины токов и напряжений изменяются во времени по синусоидальному или косинусоидальному закону, а сопротивления от времени не зависят. Выражая сопротивления в виде комплексных величин, мы характеризуем сдвиги между напряжением и током в отдельных элементах цепи.

Расчет цепей переменного тока можно упростить, применяя векторные диаграммы. На рис. 6-14 показана диаграмма напряжений и тока последовательной цепи. Согласно формулам (6-2-9г) или (6-2-24) напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током и поэтому оно отложено на диаграмме в направлении вектора тока, который отложен на горизонтальной оси вправо от начала координат; на индуктивности напряжение сдвинуто от-

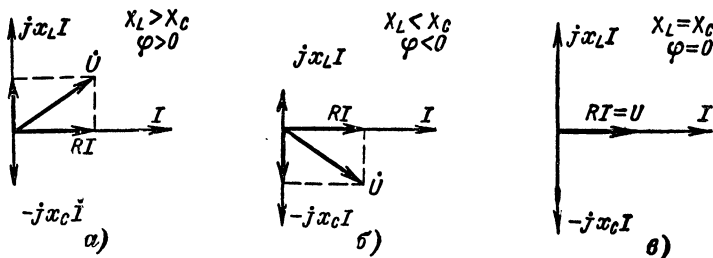


Рис. 6-15. Диаграммы напряжений последовательной цепи при различном соотношении X_L и X_C .

носительно тока на $\pi/2$, а на емкости — на $-\pi/2$, поэтому соответствующие векторы направлены вертикально вверх и вниз.

На рис. 6-15 даны векторные диаграммы напряжений последовательной цепи для различных соотношений X_L и X_C . Когда $(X_L - X_C) > 0$, то угол $\varphi > 0$, при $(X_L - X_C) < 0$ угол $\varphi < 0$, а если $(X_L - X_C) = 0$, угол $\varphi = 0$. В последнем случае ток совпадает по фазе с напряжением несмотря на наличие в цепи реактивных сопротивлений. Такая цепь в целом ведет себя как действительное сопротивление. Этот случай называется резонансом напряжений.

От диаграммы напряжений при последовательном соединении элементов цепи можно перейти к диаграмме сопротивлений. Так как ток во всех участках такой цепи одинаков, диаграмму сопротивлений можно получить, разделив падение напряжения на каждом участке на ток (рис. 6-16).

При параллельном соединении элементов цепи (рис. 6-17, а) приложенное напряжение одинаково для всех элементов, а токи отличаются по величине и по фазе. В этом случае удобно пользоваться диаграммами токов

и проводимостей (рис. 6-17, б и в), причем диаграмма проводимостей получается из диаграммы токов путем деления токов в ветвях на напряжение.

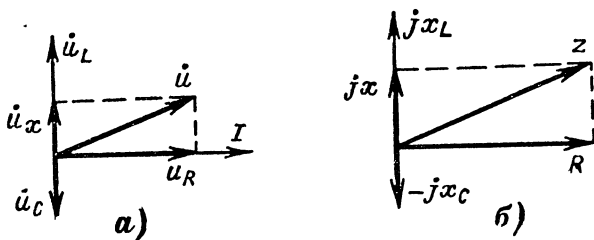


Рис. 6-16. Диаграммы напряжений (а) и сопротивлений (б) последовательной цепи.

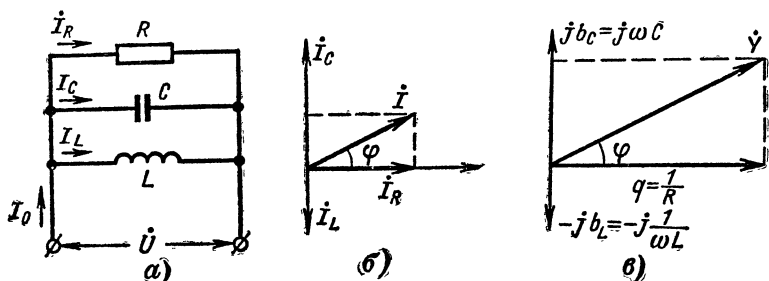


Рис. 6-17. Цепь с параллельным соединением R , L и C (а), диаграммы токов (б) и проводимостей (в) этой цепи.

Телеграфные уравнения (6-2-16) для монохроматического тока в комплексной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} + (j\omega L_0 + R_0) \dot{I} &= 0; \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial x} + (j\omega C_0 + g_0) \dot{U} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6-2-29)$$

6-3. ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

В состав электрических цепей могут входить катушки индуктивности, связанные между собой общим магнитным потоком; при этом текущий в одной катушке ток создает магнитный поток, пронизывающий другие ка-

тушки. Согласно закону электромагнитной индукции [см. формулу (1-3-2)] изменение этого потока приводит к возникновению э.д.с., называемой э.д.с. взаимои н дукции.

Величина э. д. с. взаимои ндукции e_{M2} , создаваемая во второй катушке изменением тока i_1 в первой катушке,

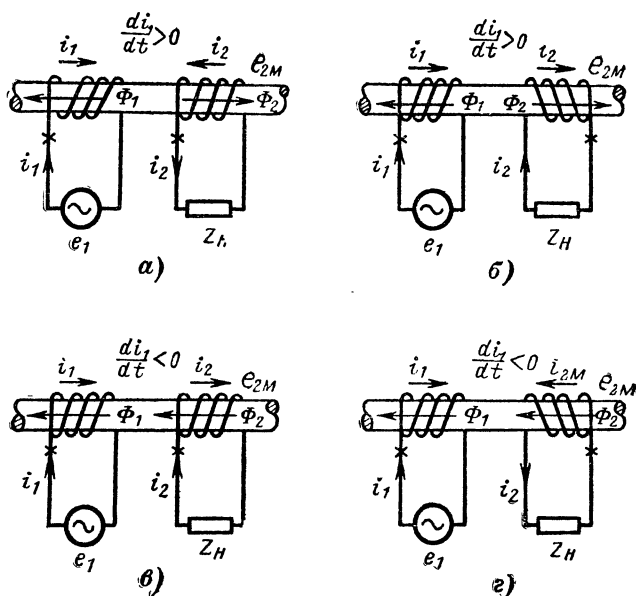


Рис. 6-18. Направления магнитных потоков при различных направлениях токов и включениях катушек.

при условии пропорциональности магнитного потока току определяется выражением

$$e_{M2} = -L_{21} \frac{di_1}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \quad (6-3-1)$$

Направление э. д. с. взаимои ндукции зависит от направлений обмоток катушек и от знака производной. На основании закона Ленца э. д. с. взаимои ндукции должна иметь такое направление, при котором вызываемый ею ток препятствует изменению потока взаимои ндукции (рис. 6-18). Если катушки намотаны на один сердечник в одну сторону и создаваемый первой катушкой поток увеличивается $di_1/dt > 0$, то направление наведенной

э.д.с. e_{M2} будет противоположно вызывающему ее току i_1 (рис. 6-18, а). Если же катушки намотаны в разные стороны и $di_1/dt > 0$, то э. д. с. e_{M2} и ток i_1 по направлению совпадают (рис. 6-18, б).

При $di_1/dt < 0$, т. е. при уменьшении потока взаимной индукции, если катушки намотаны в одну сторону, то e_{M2} совпадает по направлению с i_1 ; если же они намотаны в разные стороны, то направления i_1 и e_{M2} противоположны (рис. 6-18, в и г).

При $i_1 = I_{m1} \sin \omega t$ э. д. с. взаимной индукции

$$\begin{aligned} e_{M2} &= -M \frac{di_1}{dt} = -\omega M I_{m1} \cos \omega t = \\ &= E_{mM2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (6-3-2)$$

Здесь

$$E_{mM2} = \omega M I_{m1}$$

или

$$E_{M2} = \omega M I_1, \quad (6-3-3)$$

т. е. величина наведенной э. д. с. прямо пропорциональна коэффициенту взаимной индукции и частоте и отстает от наводящего тока на 90° . Величина ωM имеет размерность сопротивления и называется реактивным сопротивлением взаимной индукции контуров.

В символической форме уравнение (6-3-2) имеет вид:

$$\dot{E}_{M2} = -jX_M \dot{I}_1, \quad (6-3-4)$$

где

$$X_M = \omega M \quad (6-3-5)$$

— реактивное сопротивление взаимной индукции.

При составлении уравнений для цепей с магнитосвязанными элементами необходимо знать: согласно (в одну сторону) или встречно (в противоположные стороны) направлены магнитные потоки, создаваемые текущим по этому элементу током (рис. 6-19, а) и током, возникшим в результате взаимной индукции. На электрических схемах одноименные зажимы катушек отмечают звездочкой.

Два зажима, принадлежащих двум разным магнитосвязанным элементам цепи, называются одноименными, если при одинаковом направлении токов относительно этих зажимов магнитные потоки складываются. Если на

электрической схеме токи двух магнитосвязанных элементов одинаковым образом ориентированы относительно одноименных зажимов, то имеет место согласное включение, в противном случае — встречное (рис. 6-19, б).

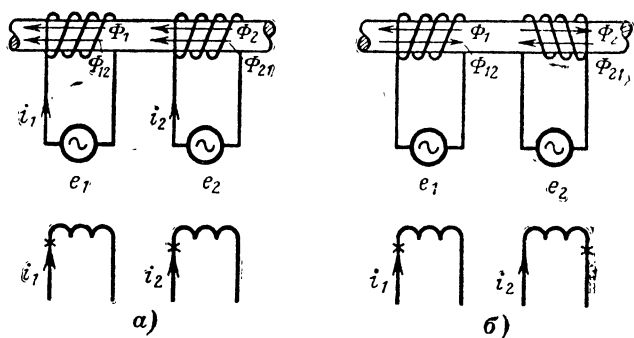


Рис. 6-19. Согласное (а) и встречное (б) включения катушек.

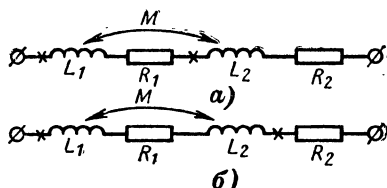


Рис. 6-20. К вычислению общей (эквивалентной) индуктивности последовательно включенных катушек.

а — согласное включение; б — встречное включение.

Если две катушки, обладающие сопротивлениями R_1 и R_2 , индуктивностями L_1 и L_2 включены последовательно (рис. 6-20), то при взаимной индуктивности M на основе (5-4-11) общая эквивалентная индуктивность соединения

$$L = \frac{\Psi_1}{i} + \frac{\Psi_2}{i},$$

где $\Psi_1 = L_1 i \pm M i$ и $\Psi_2 = L_2 i \pm M i$ — потокосцепления первой и второй катушек.

Следовательно,

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M. \quad (6-3-6)$$

В этом выражении знак плюс относится к согласному включению катушек (рис. 6-20, а), а знак минус — к встречному (рис. 6-20, б). Формула (6-3-6) совпадает с формулой (5-5-10), выведенной из уравнения магнитной энергии.

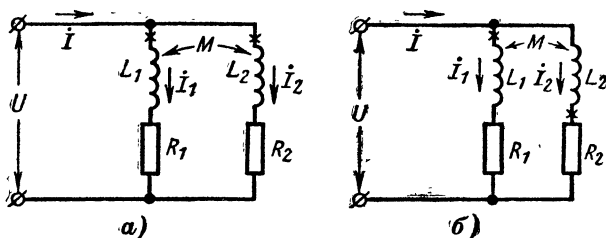


Рис. 6-21. К вычислению общей (эквивалентной) индуктивности параллельно включенных катушек.

а — согласное включение; б — встречное включение.

При согласном параллельном включении катушек и выбранном направлении токов (рис. 6-21, а) на основании первого и второго законов Кирхгофа получаем:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2; \\ \dot{U} &= Z_1 I_1 + Z_M I_2; \\ \dot{U} &= Z_M I_1 + Z_2 I_2. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$\dot{I} = \frac{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U},$$

откуда следует, что комплексное сопротивление рассматриваемой цепи

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}. \quad (6-3-7)$$

Если пренебречь омическим сопротивлением катушек, то общая эквивалентная индуктивность параллельного их соединения при переменном токе выразится формулой

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}. \quad (6-3-7a)$$

При встречном включении катушек (рис. 6-21, б) аналогично получим:

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}. \quad (6-3-76)$$

Рассмотрим теперь два связанных взаимной индуктивностью контура, каждый из которых содержит сопротивление, индуктивность, емкость и источник э. д. с. (рис. 6-22). Если источники дают э. д. с. одинаковой частоты,

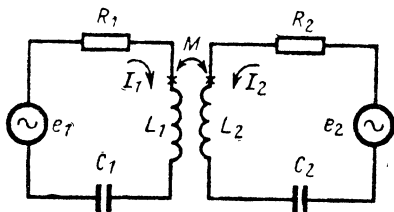


Рис. 6-22. Индуктивно связанные контуры.

то токи в контурах при выбранных нами положительных направлениях создают совпадающие по направлению магнитные потоки. Второй закон Кирхгофа [см. формулу (6-2-28)] для каждого контура выражается следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + M \frac{di_2}{dt}; \\ e_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + M \frac{di_1}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (6-3-8)$$

или в символическом виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2; \\ \dot{E}_2 &= Z_2 \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1, \end{aligned} \right\} \quad (6-3-8a)$$

где $Z_1 = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)$ и $Z_2 = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$

— комплексные сопротивления каждого из контуров;

$Z_M = j\omega M = jX_M$ — сопротивление взаимной индукции.

На рис. 6-23 показана более сложная цепь со взаимной индуктивностью. Согласно законам Кирхгофа уравнения для такой цепи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\ \dot{E}_1 &= \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_M + \dot{I}_3 Z_3; \\ \dot{E}_2 &= \dot{I}_1 Z_M + \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_3 Z_3. \end{aligned}$$

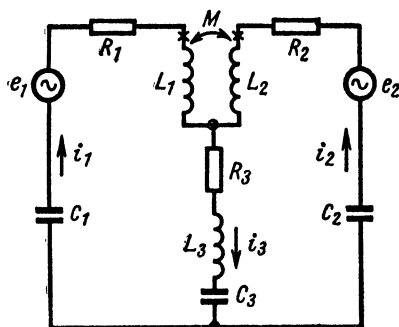


Рис. 6-23. Цепь с взаимной индуктивностью.

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1 (Z_2 + Z_3) - \dot{E}_2 (Z_M + Z_3)}{Z^2}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{E}_2 (Z_1 + Z_3) - \dot{E}_1 (Z_M + Z_3)}{Z^2}; \\ \dot{I}_3 &= \frac{\dot{E}_1 (Z_2 - Z_M) + \dot{E}_2 (Z_1 - Z_M)}{Z^2}; \end{aligned} \right\} \quad (6-3-9)$$

здесь

$$Z^2 = (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - (Z_M + Z_3)^2;$$

$$Z_1 = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right);$$

$$Z_2 = R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right);$$

$$Z_3 = R_3 + j \left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3} \right);$$

$$Z_M = j\omega M.$$

С целью упрощения расчетов электрических цепей схему, содержащую взаимную индуктивность, заменяют эквивалентной схемой. Так, схему, приведенную на рис. 6-24, а, можно заменить эквивалентной схемой (рис.

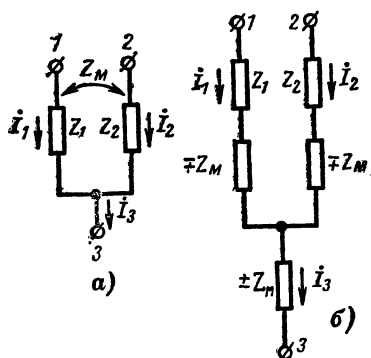


Рис. 6-24. К расчету цепи с взаимной индуктивностью.

6-24, б). Действительно, падения напряжения между узлами 1-3 и 2-3 (рис. 6-24, а) определяются выражениями:

$$\dot{U}_{13} = Z_1 \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_{23} = Z_2 \dot{I}_2 \pm Z_M \dot{I}_1.$$

Верхние знаки перед вторыми членами этих уравнений относятся к согласованному включению, нижние — к встречному. Решая эту систему уравнений с учетом того, что $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$, находим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{13} &= (Z_1 \mp Z_M) \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{23} &= (Z_2 \mp Z_M) \dot{I}_2 \pm Z_M \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{12} &= (Z_1 \mp Z_M) \dot{I}_1 - (Z_2 \mp Z_M) \dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (6-3-10)$$

Эти уравнения справедливы для схемы рис. 6-24, б; следовательно, она является искомой эквивалентной схемой без индуктивной связи.

Схема двух контуров с индуктивной связью (рис. 6-25, а) может быть заменена эквивалентной схемой без индуктивной связи (рис. 6-25, б). Действительно, если соединить вместе нижние концы катушек (рис. 6-25, а), то режим контуров не изменится; поэтому части конту-

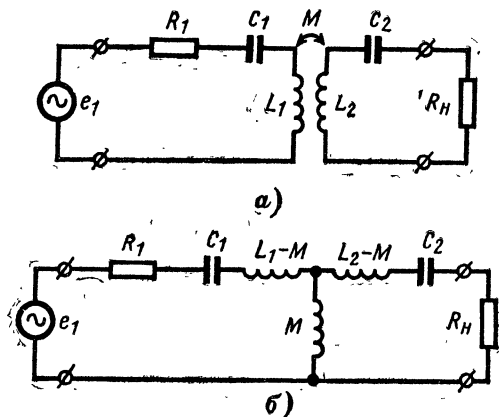


Рис. 6-25. Замена схемы двух контуров с индуктивной связью (а) эквивалентной схемой с кондуктивной связью (б).

ров с элементами L_1 и L_2 можно рассматривать как индуктивно связанные ветви, присоединенные к одному узлу. Заменяя эти ветви эквивалентной схемой (рис. 6-24, б), получаем эквивалентную схему, приведенную на рис. 6-25, б.

6-4. МОЩНОСТЬ И ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Мгновенная мощность в цепи переменного тока определяется как произведение мгновенных значений напряжения $u = U_m \sin \omega t$ и тока $i = I_m \sin (\omega t + \varphi)$, т. е.

$$p = ui = UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t + \varphi); \quad (6-4-1)$$

здесь U , I — действующие значения напряжения и тока.

Из последнего выражения следует, что мгновенные значения мощности периодически изменяются около

среднего значения $UI \cos \varphi$ с двойной частотой (рис. 6-26). Среднее значение мгновенной мощности за период

$$P_0 = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = P \cos \varphi \text{ [вт]}, \quad (6-4-2)$$

где

$$P = UI = \frac{U_m I_m}{2} \quad (6-4-3)$$

— полная или кажущаяся мощность.

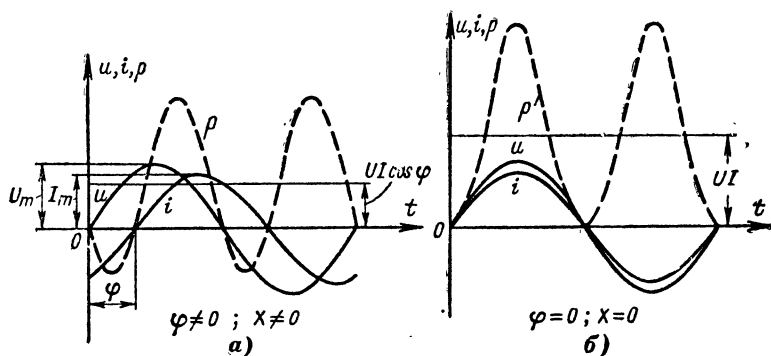


Рис. 6-26. Мощность в цепи переменного тока.

Величина P_0 определяет электрическую энергию, поглощаемую действительными сопротивлениями в цепи, поэтому ее называют действительной мощностью в цепи переменного тока. Она может быть выражена также в следующем виде:

$$P_0 = I^2 R, \quad (6-4-2a)$$

где R — действительное сопротивление цепи.

Графики зависимости мгновенной мощности от времени для случаев $\varphi \neq 0$ и $\varphi = 0$ даны на рис. 6-26. Последний случай может быть, если можно пренебречь реактивным сопротивлением, либо при резонансе, т. е. когда $X_L = X_C$.

На рис. 6-27 показано направление векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в двухпроводной линии с переменным током при $\varphi = 0$

для различных моментов периода. Так как направления обоих этих векторов изменяются одновременно, то вектор Пойнтинга $\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$ своего направления не меняет, т. е. поток мощности движется всегда в направлении от источника к нагрузке.

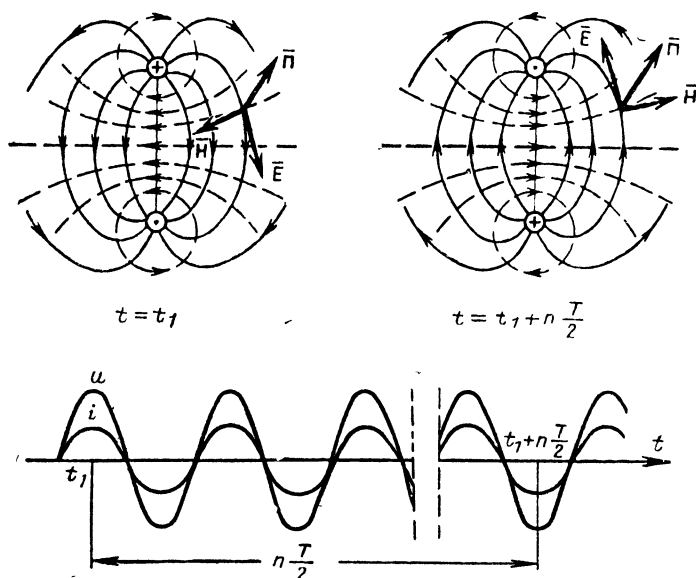


Рис. 6-27. Структура электромагнитного поля при переменном токе в линии ($\varphi=0$).

На рис. 6-28 и 6-29 приведены кривые мгновенной мощности для случаев: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (цепь состоит из индуктивного сопротивления) и $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ (цепь состоит из емкостного сопротивления). В обоих случаях средняя мощность равна нулю, а мгновенная — пульсирует около нулевого значения с двойной частотой. Физически это означает, что каждую четверть периода поток мощности меняет направление на обратное: в течение одной четверти периода электромагнитная энергия переходит из источника в индуктивность или в емкость, а в следующую четверть периода возвращается полностью в источник.

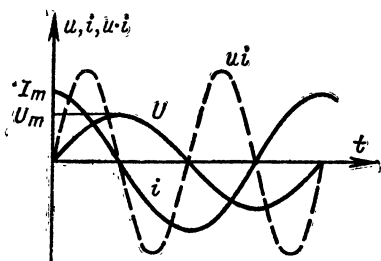


Рис. 6-28. Мгновенная мощность в цепи переменного тока при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

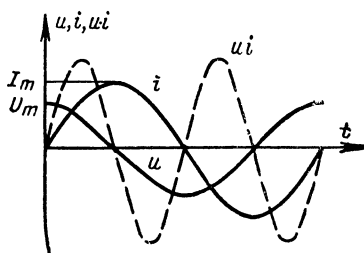
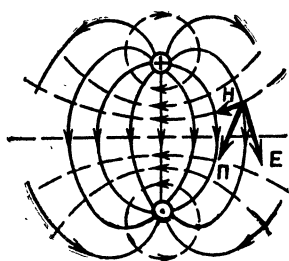
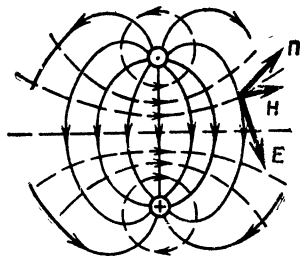


Рис. 6-29. Мгновенная мощность в цепи переменного тока при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.



$$t = t_1$$



$$t = t_1 + n \frac{T}{4}$$

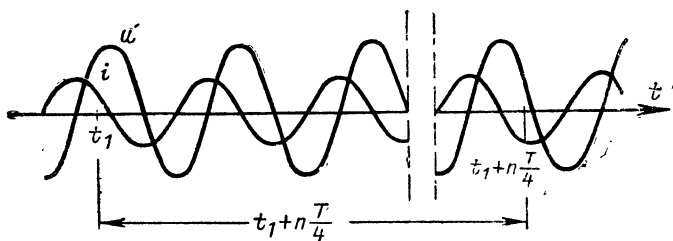


Рис. 6-30. Структура электромагнитного поля при переменном токе в линии ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).

На рис. 6-30 показано направление векторов **E** и **H** в двухпроводной линии переменного тока для случаев $\varphi = +\frac{\pi}{2}$. Направления векторов **E** и **H** изменяются не одновременно, в результате чего каждую четверть периода изменяется направление вектора **П** (он направлен от источника к нагрузке или наоборот).

Комплексная мощность

$$\dot{P} = \dot{U} \dot{I}^* = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P_0 + jP_r; \quad (6-4-4)$$

здесь P_0 — действительная мощность, определяемая по формуле (6-4-2);

$$P_r = P \sin \varphi \quad (6-4-5)$$

— реактивная мощность.

Модуль комплексной мощности, т. е. полная или кажущаяся мощность, определяемая по формуле (6-4-3), может быть представлен в следующем виде:

$$P = \sqrt{P_0^2 + P_r^2} = UI. \quad (6-4-6)$$

Размерность полной, действительной и реактивной мощностей одинакова, однако единицу измерения мощности в применении к полной мощности называют вольт-ампер [va], в применении к реактивной мощности — реактивный вольт-ампер [var].

Отношение

$$P_0/P = \cos \varphi \quad (6-4-7)$$

называется коэффициентом мощности («косинус φ »).

На основе формул (2-2-9) и (2-2-10) баланс мощностей в цепи переменного тока выражается уравнением действительных мощностей

$$\oint_S \operatorname{Re} \dot{\mathbf{P}} dS + P_0 + P_0^{\text{ст}} = 0 \quad (6-4-8)$$

и уравнением реактивных мощностей

$$\oint_S \operatorname{Im} \dot{\mathbf{P}} dS + P_r + P_r^{\text{ст}} = 0. \quad (6-4-9)$$

Первый член уравнения (6-4-8) определяет энергию, расходуемую на излучение через окружающую цепь поверхность, направленное от цепи во внешнее пространство. В большинстве практических случаев излучением при ча-

стотах ниже 100 кгц можно пренебрегать. Если среда, окружающая цепь, не обладает потерями, то поглощение энергии происходит лишь в действительном сопротивлении цепи и на основании формулы (5-9-4) определяется потоком вектора Π_0 через боковую поверхность проводников и полезной нагрузки направленным внутрь последних. Вследствие этого второй член правой части выражения (6-4-8) равен.

$$P_0 = \oint_{S_{\text{бок}}} \Pi_0 dS = UI \cos \varphi$$

и уравнение (6-4-8) принимает следующий вид:

$$-P_0^{\text{ст}} \approx P_0 = I^2 R, \quad (6-4-8a)$$

т. е. отдаваемая источником мощность $P_0^{\text{ст}}$ поглощается только действительным сопротивлением цепи, состоящим из полезной нагрузки и соединительных проводов.

Первый член уравнения (6-4-9) определяет реактивную мощность излучения через поверхность, окружающую цепь. В электрических цепях этой мощностью можно пренебречь; при этом уравнение (6-4-9) принимает вид:

$$P_r \approx -P_r^{\text{ст}}.$$

Поскольку на основании формул (4-7-4a) и (5-4-2) с учетом (2-1-2) реактивная мощность в цепи переменного тока

$$P_r = \omega \int_V (\epsilon_a E^2 - \mu_a H^2) dV = \omega C U^2 - \omega L I^2,$$

то, следовательно,

$$\omega L I^2 - \omega C U^2 = P_r^{\text{ст}}, \quad (6-4-10)$$

т. е. реактивная мощность источника равна сумме реактивных мощностей, индуктивности и емкости, входящих в состав цепи.

На основе формулы (1-6-3) баланс мгновенных мощностей в цепи переменного тока выражается равенством

$$\frac{\partial W}{\partial t} + i^2 R = i u.$$

Так как согласно формулам (4-7-4a) и (5-4-2)

$$W = \frac{C u^2}{2} + \frac{L i^2}{2}, \quad (6-4-11)$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} \right] + i^2 R = ui.$$

При этом величина $i^2 R$ всегда положительна, а величины ui и $\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} \right]$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, т. е. в цепи переменного тока происходит обмен энергией между реактивными элементами и источником. Так как u и i сдвинуты по фазе, то производные $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Li^2}{2} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Cu^2}{2} \right)$ имеют разный знак, т. е. обмен энергией происходит и между реактивными элементами. Если в любой момент времени $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} \right) = 0$ (электрический резонанс), то реактивные элементы обмениваются энергией друг с другом, не вступая в обмен энергией с источником. При резонансе энергия источника расходуется на компенсацию энергии, поглощаемой действительным сопротивлением.

При сверхвысоких частотах в некоторых конструкциях цепей с распределенными постоянными излучение энергии может иметь величину, сравнимую с полезной мощностью, поглощаемой в самой цепи. В этих случаях первыми слагаемыми в уравнениях (6-4-8), (6-4-9), разумеется, пренебрегать нельзя.

На основании принципа суперпозиции и формулы (6-4-2а) при переменном несинусоидальном токе действительная мощность

$$P_0 = R (I_1^2 + I_2^2 + \dots) = R \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2, \quad (6-4-12)$$

здесь I_k — действующее значение тока k -й гармоники.

Действующее значение несинусоидального тока

$$I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}. \quad (6-4-13)$$

В квазистационарном поле осуществим индукционный нагрев. Для индукционного нагрева хорошо проводящее тело зносится в магнитное поле катушки с переменным током (рис. 6-31, а и 7-6). При этом в теле возникает ток, протекающий преимущественно в поверхностном слое. В результате этого происходит поверх-

ностный нагрев тела. На основании формулы (2-7-27) расходуемая на нагрев мощность

$$P_0 = \int_S H_d^2 \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}} dS;$$

здесь H_d — в первом приближении применительно к рис. 6-31, а определяется выражением (5-3-12).

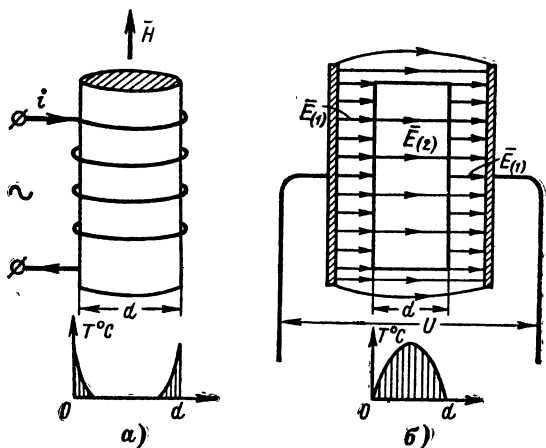


Рис. 6-31. Схемы индукционного нагрева хорошо проводящего тела (а) и тела из диэлектрика с потерями (б).

Тело, характеризующее свойствами диэлектрика с потерями, для индукционного нагрева помещается в электрическое переменное поле конденсатора (рис. 6-31, б). В этом случае можно достигнуть практически равномерного нагрева всего объема тела. Однако из-за естественного (или искусственного) охлаждения наружной поверхности тела внутренние слои его могут нагреваться более интенсивно, чем наружные. На основании формул (2-2-5) и (2-2-8б) мощность, расходуемая на нагрев диэлектрического тела,

$$P_0 = \omega \epsilon_0 \int_V \epsilon'' E_d^2 dV,$$

где E_d — напряженность поля в теле, определяемая выражением

$$E_d \approx \frac{U}{d \left(1 + \epsilon \frac{d_1}{d} \right)},$$

d_1 — суммарный воздушный зазор;
 ε'' — мнимая проницаемость, равная согласно формуле (2-1-6)

$$\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} = \varepsilon \operatorname{tg} \delta_\varepsilon.$$

Индукционный нагрев широко используется в практике, так как он имеет высокий к. п. д., а при выборе соответствующей частоты поля позволяет осуществить селективный нагрев неоднородного тела или локализованный нагрев части тела.

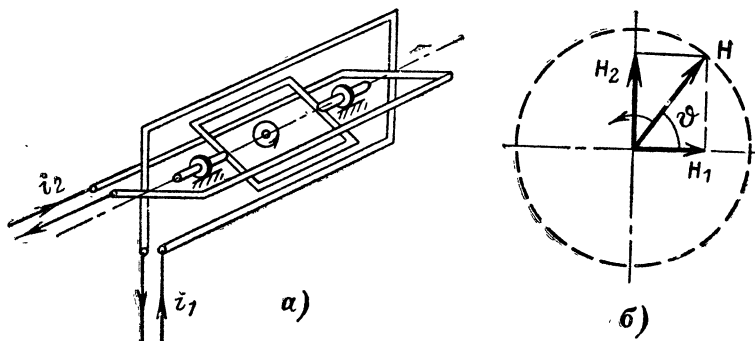


Рис. 6-32. Принципиальная схема двухфазного асинхронного электродвигателя (а) и векторная диаграмма вращающегося магнитного поля в нем (б).

$$i_1 = I_m \cos \omega t; \quad i_2 = I_m \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Пондеромоторные силы в цепях переменного тока в случае гармонического квазистационарного поля определяются выражениями (5-8-4) — (5-8-9), (5-8-11) и (5-8-12), в которых I — действующее значение тока.

Среднее значение момента вращения проволочной рамки с переменным током, помещенной во внешнее магнитное поле, определяется формулой

$$M_0 \text{ мех} = \mu_a S \frac{2}{\pi} I_m H [\text{дж}], \quad (6-4-14)$$

отличающейся от выражения (5-8-15) множителем $\frac{2}{\pi}$.

Синхронный мотор состоит из рамки (обмотки) с контактными кольцами (рис. 5-39, в) и системы, создающей постоянное магнитное поле. Угловая скорость вращения рамки при неподвижной магнитной системе (или магнитной системы при неподвижной рамке), очевидно, равна угловой частоте переменного тока.

Вращающееся магнитное поле может быть создано двумя неподвижными рамками, расположенными под углом 90° (рис. 6-32), по которым протекают токи i_1 и i_2 одинаковой амплитуды, и часто-

ты, но сдвинутые по фазе на $\pi/2$. Такая система лежит в основе устройства двухфазного асинхронного мотора. Вектор результирующего магнитного поля \mathbf{H} вращается с угловой скоростью.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\arctg \frac{H_2}{H_1} \right) \approx \frac{d}{dt} \left(\arctg \frac{i_2}{i_1} \right) = \frac{d\omega t}{dt} = \omega,$$

которая равна угловой частоте переменного тока в рамках.

Находящаяся во вращающемся магнитном поле короткозамкнутая рамка в результате взаимодействия этого поля с током, введенным в рамку, приобретает вращающий момент. Величина этого момента согласно формуле (5-8-9) пропорциональна квадрату действующего значения тока в неподвижных рамках. Угловая скорость вращения короткозамкнутой рамки должна быть меньше угловой скорости вращающегося магнитного поля. Только при этом условии в короткозамкнутой рамке наведется ток.

Трехфазный асинхронный мотор состоит из трех неподвижных обмоток, взаимно смещенных в пространстве на угол 120° , токи в которых сдвинуты по фазе на $2\pi/3$.

Асинхронный мотор подобно серийному мотору постоянного тока обладает большим начальным моментом, ибо при включении короткозамкнутая рамка неподвижна, вследствие чего в ней возникает большой ток.

Пондеромоторными силами магнитного поля можно устойчиво уравновесить силу тяжести короткозамкнутого витка, расположенного около другого витка, по которому протекает переменный ток (рис. 6-33). Под действием этих сил при индукционном нагреве расплавленный металл может поддерживаться во взвешенном состоянии, принимая при этом почти сферическую форму.

6-5. ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Электрические цепи можно рассматривать как состоящие из двухполюсников и четырехполюсников. Двухполюсник — термин, обозначающий любую схему, имеющую два доступных вывода (рис. 6-34). Двухполюсник называется линейным и пассивным, если он состоит из линейных элементов и не содержит источников Э. Д. С.

Двухполюсники могут быть включены последовательно (рис. 6-35). При этом $e_1 = u_1 + u_2 + u_3$ и $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$.

Двухполюсники могут быть включены параллельно (рис. 6-36). При этом $i = i_1 + i_2 + i_3$ и $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$.

Большое практическое значение имеют двухполюсники, образованные реактивными элементами, обладающими ничтожно малыми действительными сопротивлениями. К таковым относятся катушка с индуктивностью L , конденсатор с емкостью C , а также последовательное и параллельное соединения их (табл. 6-2).

Двухполюсники могут образовывать цепи, имеющие четыре доступных вывода. Схемы такого рода называют

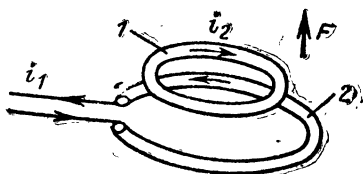


Рис. 6-33. Уравновешивание силы тяжести переменным магнитным полем.

1—уравновешенный (вторичный) виток; 2—неподвижный (первичный) виток.

$$Z = R + jx$$

Рис. 6-34. Двухполюсник.

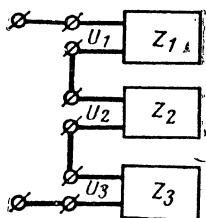


Рис. 6-35. Последовательное соединение двухполюсников.

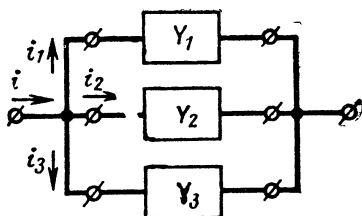


Рис. 6-36. Параллельное соединение двухполюсников.

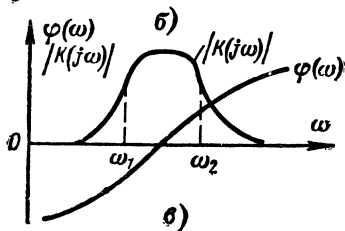
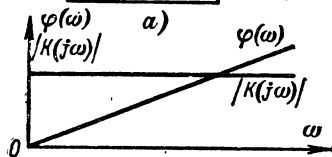
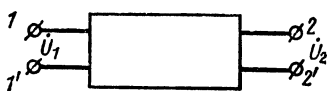

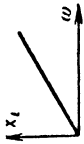






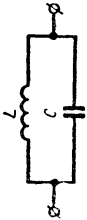
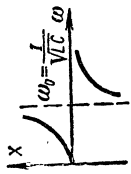
Рис. 6-37. Четырехполюсник (а), амплитудно-частотные и фазовые характеристики неискажающего (б) и реального (в) четырехполюсника.

Таблица 6-2

Простейшие двухполюсники

Название	Схема	Z	$X = F(\omega)$	Характер реактивного сопротивления
Катушка индуктивности		$j\omega L$		Индуктивный
Конденсатор		$-j \frac{1}{\omega C}$		Емкостный

Продолжение табл. 6-2

Название	Схема	Z	$X = F(\omega)$	Характер реактивного сопротивления
Последовательный резонансный контур		$j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$		Индуктивный при $\omega > \omega_0$ Емкостный при $\omega < \omega_0$
Параллельный резонансный контур		$j \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}$		Индуктивный при $\omega < \omega_0$ Емкостный при $\omega > \omega_0$

четыре полюсника (рис. 6-37, а). Условно одна пара зажимов четырехполюсника, обозначенная $1-1'$, называется входными зажимами, а другая $2-2'$ — выходными.

Четырехполюсник, который образован линейными элементами и не содержит источников э. д. с., называют линейным и пассивным.

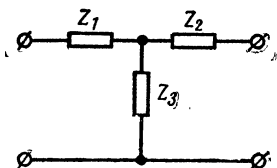


Рис. 6-38. Т-образный четырехполюсник.

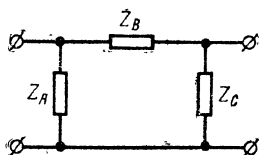


Рис. 6-39. П-образный четырехполюсник.

Простейшие четырехполюсники с Т-образной схемой показаны на рис. 6-38, а с П-образной схемой — на рис. 6-39. Такие четырехполюсники называют соответственно Т-образными и П-образными.

Любой четырехполюсник характеризуется коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}, \quad (6-5-1)$$

выражающим отношение напряжения на выходе \dot{U}_2 к напряжению на входе \dot{U}_1 в зависимости от частоты ω при данных параметрах составляющих четырехполюсник элементов C , L и R . В общем случае коэффициент передачи — комплексное число

$$\dot{K}(j\omega) = |K(j\omega)| e^{-j\varphi}. \quad (6-5-1a)$$

Модуль этого числа выражает амплитудно-частотную характеристику четырехполюсника, а аргумент — его фазо-частотную характеристику $\varphi(\omega)$.

Четырехполюсник не искажает сигнала, если при подаче на вход напряжения $u_1(t)$ на выходе имеем:

$$u_2(t) = Ku_1(t - \tau_0), \quad (6-5-2)$$

т. е. напряжение $u_2(t)$ запаздывает относительно $u_1(t)$ на время τ_0 , а мгновенные значения $u_2(t - \tau_0)$ отличаются от мгновенных значений $u_1(t)$ в K раз.

Пусть напряжение на входе неискажающего четырех-
 полюсника $u_1(t)$ представляет периодический сигнал.
 Тогда согласно формуле (Д-7-2) это напряжение можно
 представить в виде ряда Фурье

$$u_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(n\omega_1 t - \psi_n), \quad (6-5-2a)$$

а напряжение на выходе согласно формуле (6-5-2) в ви-
 де

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} K U_{mn} \cos(n\omega_1(t - \tau_0) - \psi_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} K U_{mn} \cos(n\omega_1 t - \psi_n - \varphi_n), \end{aligned} \quad (6-5-2б)$$

где $\varphi_n = n\omega_1\tau_0$.

Из выражений (6-5-2a) и (6-5-2б) согласно соотноше-
 нию (6-5-1a) следует, что амплитудно-частотная харак-
 теристика неискажающего четырехполюсника

$$|K(j\omega)| = K, \quad (6-5-3)$$

а фазо-частотная характеристика

$$\varphi_n = n\omega_1\tau_0$$

или

$$\varphi = \omega\tau_0 \quad (6-5-3a)$$

линейно изменяется с частотой. Наклон фазово-частот-
 ной характеристики определяется временем запаздыва-
 ния

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \tau_0. \quad (6-5-3б)$$

Общий вид фазово-частотной и амплитудно-частотной
 характеристик неискажающего четырехполюсника при-
 веден на рис. 6-37, б.

В реальном четырехполюснике характеристики, близ-
 кие к идеальным, возможны лишь в ограниченном диа-
 пазоне частот, который называется полосой пропускания
 четырехполюсника (рис. 6-37, в).

Время запаздывания τ_0 определяется параметрами
 цепи и называется ее постоянной времени.

При решении задач теории линейных цепей использу-
 ют следующие теоремы.

Теорема о приведении четырехполюсника к Т- и П-образной схеме. Любой четырехполюсник может быть приведен к эквивалентной ему Т- и П-образной схеме. Четырехполюсник можно характеризовать следующими внешними параметрами: входное сопротивление при замкнутых и разомкнутых выходных зажимах ($Z_{1\kappa.3}$ и $Z_{1x.x}$), выходное сопротивление при замкнутых и разомкнутых входных зажимах ($Z_{2\kappa.3}$ и $Z_{2x.x}$). Очевидно, два четырехполюсника эквивалентны, если они характеризуются одинаковыми внешними параметрами.

В случае приведения четырехполюсника к эквивалентной Т-образной схеме (рис. 6-38) имеем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1\kappa.3} &= Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}; \\ Z_{1x.x} &= Z_1 + Z_3; \\ Z_{2x.x} &= Z_2 + Z_3. \end{aligned} \right\} \quad (6-5-4)$$

Приведя четырехполюсник к П-образной схеме (рис. 6-39), получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} Z_{1\kappa.3} &= \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B}; \\ Z_{1x.x} &= \frac{Z_A (Z_B + Z_C)}{Z_A + Z_B + Z_C}; \\ Z_{2x.x} &= \frac{Z_C (Z_A + Z_B)}{Z_A + Z_B + Z_C}. \end{aligned} \right\} \quad (6-5-5)$$

Решая систему уравнений (6-5-4), находим параметры Т-образной схемы:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{1x.x} - \sqrt{Z_{2x.x} (Z_{1x.x} - Z_{1\kappa.3})}; \\ Z_2 &= Z_{2x.x} - \sqrt{Z_{2x.x} (Z_{1x.x} - Z_{1\kappa.3})}; \\ Z_3 &= \sqrt{Z_{2x.x} (Z_{1x.x} - Z_{1\kappa.3})}. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (6-5-5), находим параметры П-образной схемы:

$$Z_A = \frac{Z_{1\kappa.3} Z_{2x.x}}{Z_{2x.x} - \sqrt{Z_{2x.x} (Z_{1x.x} - Z_{1\kappa.3})}};$$

$$Z_B = \frac{Z_{1К.3} Z_{2Х.Х}}{\sqrt{Z_{2Х.Х} (Z_{1Х.Х} - Z_{1К.3})}};$$

$$Z_C = \frac{Z_{1К.3} Z_{2Х.Х}}{Z_{1Х.Х} - \sqrt{Z_{2Х.Х} (Z_{1Х.Х} - Z_{1К.3})}}.$$

Отметим, что эквивалентные Т- и П-образные схемы являются математическими эквивалентами и не всегда физически осуществимы. Однако результаты любых математических операций над эквивалентами вместо исследуемого четырехполюсника справедливы.

Теорема об эквивалентности Т- и П-образных четырехполюсников. Т-образный четырехполюсник можно заменить эквивалентным П-образным четырехполюсником и наоборот. Действительно, приравнивая попарно соответствующие правые части уравнений (6-5-4) и (6-5-5), находим условия эквивалентности Т- и П-образных четырехполюсников:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}; \\ Z_2 &= \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}; \\ Z_3 &= \frac{Z_C Z_A}{Z_A + Z_B + Z_C}; \end{aligned} \right\} \quad (6-5-6)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_A &= Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}; \\ Z_B &= Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}; \\ Z_C &= Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (6-5-7)$$

Необходимым условием реализуемости Т-схемы является неравенство

$$Z_A + Z_B + Z_C \neq 0,$$

а П-схемы

$$Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 \neq 0.$$

Теорема взаимности, данная в общей формулировке в § 2-1, для электрической цепи формулируется следующим образом: если действующая в ветви i э. д. с. E (рис.

6-40) создает в ветви k ток I_k , то та же э. д. с. при включении в ветвь k создает в ветви i такой же ток I_i , т. е. $I_k = I_i$. Это равенство справедливо, если можно пренебречь внутренним сопротивлением генератора. Теорема эта означает, что в четырехполюснике, не содержащем невзаимных устройств (элементов), основанных на ани-

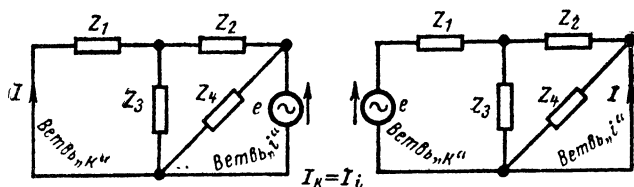


Рис. 6-40. К теореме взаимности.

зотропии сред и цепей (см. § 2-9 и 5-7), передача энергии происходит одинаково в обоих направлениях.

Доказательство теоремы взаимности производится путем простого вычисления величин токов I_k и I_i при

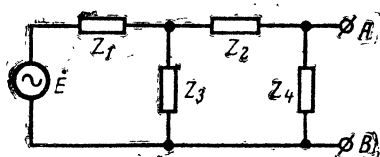


Рис. 6-41. К теореме об эквивалентном генераторе.

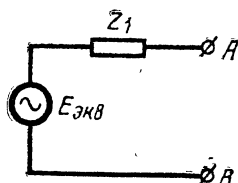


Рис. 6-42. Эквивалентный генератор напряжения.

включении одной и той же э. д. с. E поочередно в i -ю и k -ю ветви (рис. 6-40). Если величины э. д. с., включаемые в i -ю и k -ю ветви, неодинаковы, то

$$\frac{E_i}{I_k} = \frac{E_k}{I_i}.$$

Теоремы Тевенина и Нортонна об эквивалентных генераторах. Любую линейную электрическую цепь, внутри которой действуют некоторые э. д. с. (рис. 6-41), согласно теореме Тевенина можно заменить идеальным, т. е. не имеющим внутреннего сопротивления генератором э. д. с. $E_{\text{экв}}$, и последовательно соединенным с ним сопротивлением Z_1 (рис. 6-42), а согласно теореме Нортонна

такую цепь можно заменить идеальным, т. е. не имеющим внутренней проводимости генератором тока $I_{\text{эКВ}}$, параллельно которому включена проводимость Y_1 (рис. 6-43).

При этом

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{\text{эКВ}} &= U_{\text{х.х}}; \\ Z_1 &= Z_{AB}; \\ I_{\text{эКВ}} &= I_{\text{к.з}}; \\ Y_1 &= Y_{AB} \end{aligned} \right\} \quad (6-5-8)$$

и реальная схема на рис. 6-41 может быть заменена либо схемой на рис. 6-42, либо схемой рис. 6-43. В равенствах (6-5-8) $U_{\text{х.х}}$ и Z_{AB} — на-

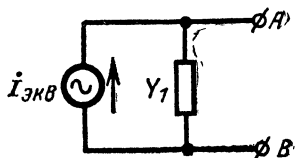


Рис. 6-43. Эквивалентный генератор тока.

пряжение и сопротивление на разомкнутых зажимах A, B реальной схемы, $I_{\text{к.з}}$ — ток, проходящий через зажимы A, B при замыкании их, а Y_{AB} — проводимость реальной схемы, измеренная на разомкнутых зажимах A, B .

Следствием этих теорем является взаимозаменяемость эквивалентных генераторов напряжения и тока, т. е. эквивалентный генератор напряжения можно заменить эквивалентным генератором тока и наоборот. При этом

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{\text{эКВ}} &= I_{\text{эКВ}} Z_1; \\ Z_1 Y_1 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6-5-9)$$

Действительно, приведенные на рис. 6-44 и 6-45 схемы эквивалентны, если протекающие через зажимы A, B токи и напряжения на этих зажимах для этих схем одинаковы. При этом для первой схемы имеем уравнение

$$\dot{E}_{\text{эКВ}} - I Z_1 = \dot{U};$$

для второй

$$\frac{I_{\text{эКВ}}}{Y_1} - \frac{I}{Y_1} = \dot{U}.$$

Из этих выражений получаем формулы (6-5-9).

Теорема о передаче максимальной мощности. Максимальная мощность передается в нагрузку (рис. 6-46)

в том случае, если полные сопротивления генератора и нагрузки являются комплексно-сопряженными, т. е. если $Z_1 = Z_2^*$.

Так как $Z_1 = R_1 + jX_1$ и $Z_2 = R_2 + jX_2$, то отдаваемая генератором мощность будет максимальной, если

$$\left. \begin{aligned} R_2 &= R_1; \\ X_1 &= -X_2. \end{aligned} \right\} \quad (6-5-10)$$

При этом максимальная мощность

$$P_{\text{н макс}} = \frac{E^2}{4R_2},$$

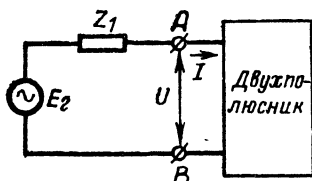


Рис. 6-44. Двухполюсник с эквивалентным генератором напряжения.

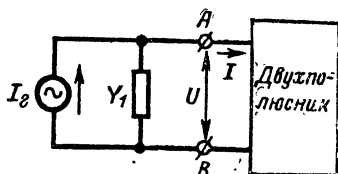


Рис. 6-45. Двухполюсник с эквивалентным генератором тока.

а к. п. д. равен 0,5, т. е. имеют место те же величины, как и в цепи постоянного тока [см. формулу (5-10-20)].

В электроэнергетике режим передачи максимальной мощности невыгоден вследствие значительных потерь энергии. В электросигнализации мощности сигналов весьма малы и приходится специально создавать условия для передачи максимально возможной мощности; малый к. п. д. при этом не имеет практического значения.

В большинстве практических случаев как в энергетике, так и в электросигнализации обычно осуществляется условие резонанса

$$X = X_2 - X_1 = 0, \quad (6-5-11)$$

так как при этом происходит передача наибольшей мощности с наибольшим к. п. д. при заданных, в общем случае не равных друг другу, значениях внутреннего и внешнего сопротивлений.

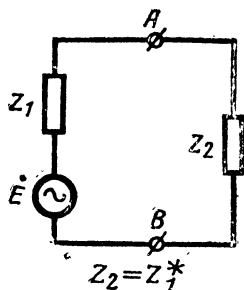


Рис. 6-46. К теореме о передаче максимальной мощности.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ЦЕПИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

7-1. ОСНОВНЫЕ СХЕМЫ ЦЕПЕЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

Задача синтеза цепей переменного тока сводится к определению схемы и ее параметров, при которых получается заданная зависимость тока или напряжения на выходе цепи от тока или напряжения на входе. Разумеется, в основе решения задач синтеза электрических цепей лежит их анализ. Анализ линейной цепи переменного тока в установившемся режиме сводится к определению зависимости амплитуды и фазы тока от амплитуды и частоты приложенного к цепи напряжения (или э. д. с.).

В общем случае любая электрическая цепь переменного тока может быть представлена эквивалентной схемой. Согласно закону Ома при последовательном соединении элементов цепи (рис. 7-1, а) ее эквивалентное комплексное сопротивление

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \frac{\dot{U}}{I}, \quad (7-1-1)$$

а при их параллельном соединении (рис. 7-1, б) эквивалентная комплексная проводимость цепи

$$Y_0 = g_0 + jb_0 = \frac{I}{U}; \quad (7-1-1a)$$

при этом

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{g_0}{g_0^2 + b_0^2}, & g_0 &= \frac{R_0}{R_0^2 + X_0^2}; \\ X_0 &= \frac{b_0}{g_0^2 + b_0^2}, & b_0 &= \frac{X_0}{R_0^2 + X_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7-1-2)$$

Вещественные и мнимые части эквивалентного комплексного сопротивления и эквивалентной комплексной проводимости $R_э(\omega)$, $X_э(\omega)$, $g_э(\omega)$ и $b_э(\omega)$ являются функциями параметров цепи C , R , L и частоты ω .

Анализ цепи может быть сведен к определению ее комплексного сопротивления или комплексной проводимости. При данных параметрах цепи и частоте приложенного к ней напряжения (или тока) реактивное сопротивление или реактивная проводимость могут равняться нулю.

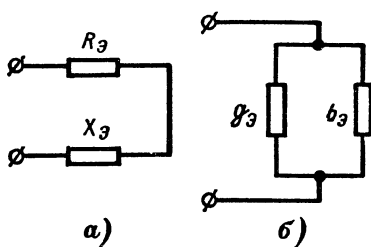


Рис. 7-1. Эквивалентные схемы цепей с сосредоточенными постоянными.

a — последовательная; b — параллельная.

Условие

$$X_э(\omega) = 0 \quad (7-1-3)$$

или

$$b_э(\omega) = 0 \quad (7-1-4)$$

называется условием резонанса.

Частота, при которой выполняются эти условия, называется резонансной частотой ω_r .

Уравнения (7-1-3) и (7-1-4) могут иметь несколько вещественных корней, и, следовательно, цепь может иметь несколько резонансных частот.

Электрические цепи с сосредоточенными постоянными делят на простые и сложные.

Примерами простых схем являются:

1. Последовательное соединение сопротивления, индуктивности и емкости (рис. 7-2): если в схеме на рис.

7-2, в $\sqrt{\frac{L}{C}} > R$, то такое соединение называют последовательным резонансным контуром.

2. Параллельное соединение таких же элементов (рис. 7-3); если в схеме на рис. 7-3, $g > \sqrt{\frac{C}{L}}$, то такое соединение называют параллельным резонансным контуром.

Примерами сложных схем являются двух- и многоконтурные схемы, в которых контуры связаны взаимо-

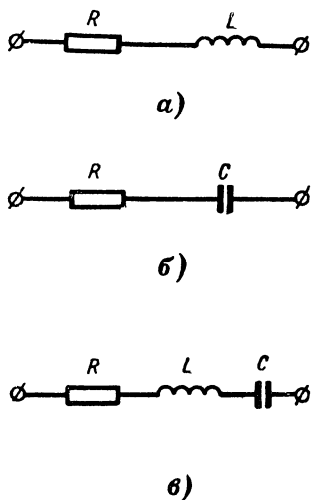


Рис. 7-2. Простые схемы с последовательным соединением элементов.

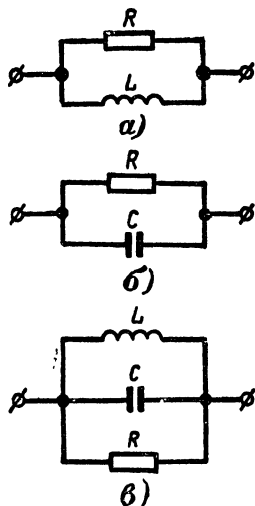


Рис. 7-3. Простые схемы с параллельным соединением элементов.

индукцией (рис. 7-4, *а*), с помощью емкости (рис. 7-4, *б*) или сопротивления.

Примеры практического использования простых и сложных схем приведены на рис. 7-5.

Резонансный волномер (рис. 7-5, *а*) состоит из резонансного контура, в котором $\sqrt{\frac{L}{C}} > (50 \div 100)R$, причем сопротивлением контура является сопротивление провода катушки индуктивности. В контур вводят электрический сигнал, частоту которого нужно измерить. Изменяя емкость конденсатора, можно изменять резонансную частоту контура; при совпадении с ней частоты сиг-

нала получается максимальное отклонение стрелки индикатора.

В генераторе с самовозбуждением (рис. 7-5, б) контур, у которого $\sqrt{\frac{L}{C}} \gg R$, выделяет заданную частоту.

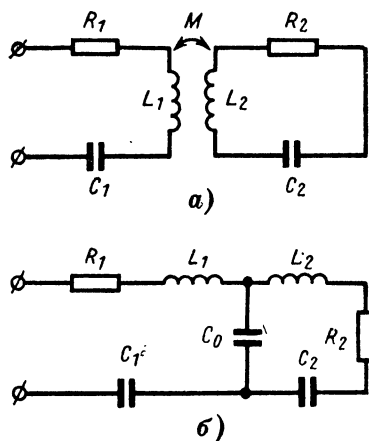


Рис. 7-4. Сложные двухконтурные схемы с индуктивной (а) и с емкостной (б) связью.

На рис. 7-5, в и г приведены схемы промежуточных контуров, которые рассчитываются на пропускание сравнительно широкой полосы частот и поэтому у них

$$\sqrt{\frac{L}{C}} < 10R.$$

На рис. 7-5, д приведена принципиальная схема индукционной печи, которая является сложной двухконтурной схемой.

Теория линейных цепей с сосредоточенными постоянными содержит ряд методов для решения конкретных задач. Простые цепи можно исследовать с помощью дифференциальных уравнений. В установившемся режиме исследование упрощается при использовании символического метода, так как в этом случае дифференциальные уравнения заменяются алгебраическими.

К универсальным методам анализа сложных цепей относятся: метод контурных токов, метод узловых напряжений и основанный на них метод пассивного четырех-полюсника.

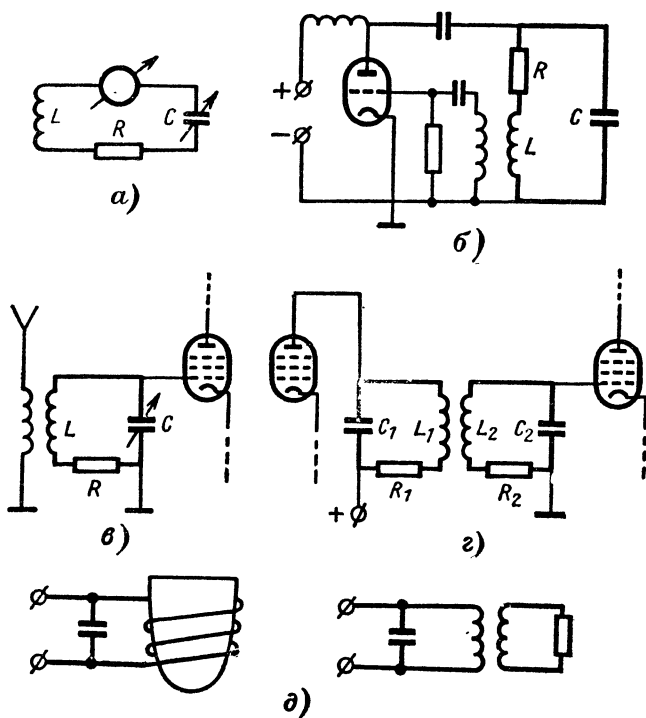


Рис. 7-5. Примеры практического применения резонансных контуров.

a — резонансный волномер ($\sqrt{\frac{L}{C}} \gg R$); *б* — генератор с самовозбуждением ($\sqrt{\frac{L}{C}} \gg R$); *в* — входной контур радиоприемника; *г* — промежуточный контур электронного усилителя; *д* — принципиальная схема индукционной печи и ее эквивалентная схема, в которой второй контур образован индуктивностью и сопротивлением нагреваемого материала.

7-2. ПРОСТЫЕ ЦЕПИ

Последовательный контур (рис. 7-6, *a*) представляет электрическую цепь, состоящую из катушки индуктивности L , конденсатора C и резистора R , соединенных пос-

ледовательно относительно зажимов, к которым подключен источник э. д. с. или другие элементы схемы. Электромагнитный процесс в последовательном контуре согласно (6-2-9) описывается линейным дифференциальным уравнением

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt, \quad (7-2-1)$$

где u — переменное напряжение, приложенное к зажимам контура. Если это напряжение изменяется по гармоническому закону $u = U_m \cos \omega t$, то решение уравнения (7-2-1) имеет вид:

$$i = \frac{U_m}{z} \cos(\omega t - \varphi),$$

где

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

и

$$\varphi = \arctg \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right].$$

Применяя символический метод (см. § Д-5), уравнение (7-2-1) можно написать в следующем виде:

$$\dot{U} = \dot{I}Z, \quad (7-2-2)$$

где

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX.$$

Если обозначить

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad (7-2-3)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (7-2-4)$$

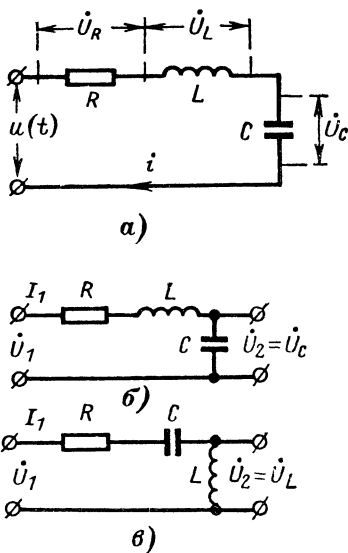


Рис. 7-6. Последовательный контур (а) и его представление в виде четырехполюсника с емкостным (б) и индуктивным (в) выходом.

$$Q = \frac{Z_0}{R}, \quad (7-2-5)$$

то

$$Z = R \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = ze^{j\varphi}; \quad (7-2-6)$$

$$\varphi = \arctg Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (7-2-6a)$$

Величина ω_0 называется собственной частотой идеального контура, т. е. контура, у которого $R=0$, Z_0 — характеристическим (волновым) сопротивлением контура и Q — добротностью контура.

Комплексное действующее значение тока в контуре

$$I = \frac{\dot{U}}{Z} = Ie^{-j\varphi}; \quad (7-2-2a)$$

в этом выражении

$$I = I(\omega) = \frac{U}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}. \quad (7-2-7)$$

При резонансе $X=0$,

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (7-2-7a)$$

т. е. резонансная частота последовательного контура равна собственной частоте идеального контура.

При резонансе ток в контуре достигает максимального значения

$$I_r = \frac{U}{R}. \quad (7-2-8)$$

Комплексные действующие значения напряжений на элементах контура при резонансе получим из формул (7-2-2) с учетом соотношений (7-2-8), (7-2-3) и (7-2-4).

На действительном сопротивлении

$$U_{Rr} = I_r R = U; \quad (7-2-9a)$$

на индуктивном сопротивлении

$$\dot{U}_{Lr} = I_r j \omega_0 L = U \frac{Z_0}{R} e^{j\pi/2}; \quad (7-2-9б)$$

на емкостном сопротивлении

$$\dot{U}_{Cr} = I_r \frac{1}{j \omega_0 C} = U \frac{Z_0}{R} e^{-j\pi/2}. \quad (7-2-9в)$$

Действующие значения напряжений на реактивных сопротивлениях одинаковы; согласно выражению (7-2-5)

$$U_{Lr} = U_{Cr} = U \frac{Z_0}{R} = UQ, \quad (7-2-9г)$$

а фазы напряжений отличаются от фазы тока на $\pi/2$ или $-\pi/2$.

В контурах радиотехнической аппаратуры характеристическое сопротивление Z_0 в большинстве случаев

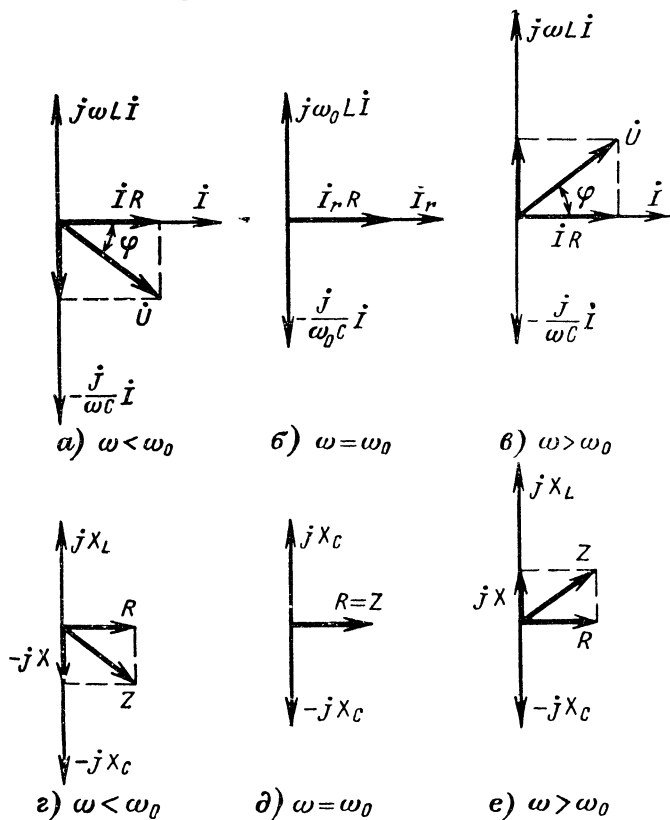


Рис. 7-7. Векторные диаграммы напряжений (а—в) и сопротивлений (г—е) последовательного контура при различных отношениях ω/ω_0 .

значительно больше сопротивления R и, следовательно, напряжения на индуктивности и емкости при резонансе значительно больше приложенного к контуру напряжения. По этой причине резонанс в последовательном контуре называют резонансом напряжений.

На рис. 7-7 приведены векторные диаграммы напряжений для последовательного контура и диаграммы сопротивлений, которые получаются из диаграмм напряжений делением на величину тока. Из этих диаграмм следует, что на частотах, меньших резонансной, сопротивление контура имеет емкостный характер; на резонансной частоте контур представляет собой действительное сопротивление, а на частотах, больших резонансных, имеет индуктивный характер.

Добротность контура Q определяется выражением (3-6-18):

$$Q = \frac{\omega_r W_r}{P_0}. \quad (7-2-10)$$

Согласно определению цепей с сосредоточенными постоянными (см. § 6-1) считаем, что электрическое и магнитное поля пространственно разделены: электрическое поле сосредоточено в конденсаторе, а магнитное — в катушке индуктивности. Запасенная в контуре энергия при резонансе согласно (6-4-11) определяется выражением

$$W_r = \frac{Li_r^2}{2} + \frac{Cu_{Cr}^2}{2}.$$

Если мгновенное значение тока в последовательном контуре при резонансе $i_r = I_{mr} \sin \omega_0 t$, то согласно соотношению (7-2-9в) мгновенное значение напряжения на конденсаторе

$$u_{Cr} = I_{mr} Z_0 \sin \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) = I_{mr} Z_0 \cos \omega_0 t.$$

Таким образом,

$$W_r = \frac{LI_{mr}^2}{2} \sin^2 \omega_0 t + \frac{LI_{mr}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t = LI_r^2 = \text{const},$$

т. е. запас энергии в реактивных элементах контура при резонансе не зависит от времени. Происходит лишь перераспределение во времени энергии между емкостью и индуктивностью (рис. 7-8); обмена же энергией генера-

тора с реактивными элементами не происходит. Мощность, усредненная за период, при резонансе

$$P_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i_r^2 R dt = \frac{I_{mr}^2 R}{T} \int_0^T \sin^2 \omega_0 t dt = \frac{I_{mr}^2 R}{2} = I_r^2 R.$$

Подставляя последние два выражения в (7-2-10), получим введенное выше выражение (7-2-5):

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{Z_0}{R}.$$

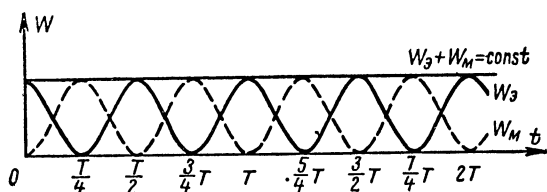


Рис. 7-8. Перераспределение энергии контура между его элементами во времени.

С учетом внутреннего сопротивления генератора R_i добротность цепи

$$Q_i = \frac{Z_0}{R + R_i} = \frac{Q}{1 + \frac{R_i}{R}}.$$

Очевидно, что для более полного проявления резонансных явлений в последовательном контуре необходимо, чтобы $R_i \ll R$.

Определяемая выражением (7-2-7) функция $I(\omega)$ называется амплитудно-частотной характеристикой контура. Ее графическое изображение (рис. 7-9) называется резонансной кривой контура. Уравнение приведенной резонансной кривой определяет зависимость отношения I/I_r (I_r — значение тока при резонансе) от частоты (см. § 3-6) и имеет вид:

$$n = \frac{I(\omega)}{I_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}. \quad (7-2-11)$$

Функция $\varphi(\omega)$, определяемая выражением (7-2-6а), называется фазо-частотной или сокращенно фазовой характеристикой контура

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[Q \left(-\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]. \quad (7-2-11a)$$

Наклон фазовой характеристики в любой точке

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} Q \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega^2} \right),$$

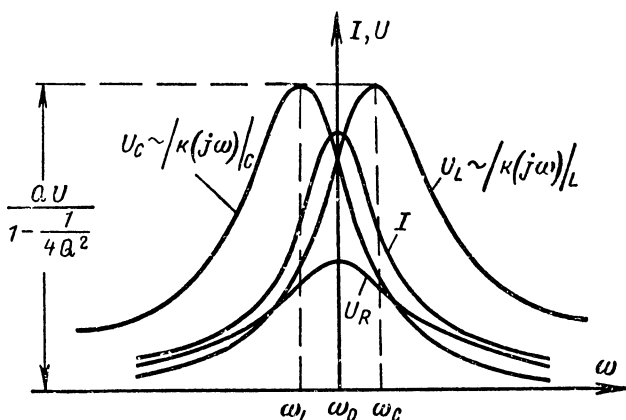


Рис. 7-9. Резонансные кривые тока и напряжения последовательного контура.

а в точке резонанса ($\omega = \omega_0$)

$$\left. \frac{d\varphi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R} = \tau_0.$$

Величина τ_0 имеет размерность времени и называется постоянной времени контура.

На рис. 7-10 изображены приведенные резонансные кривые и фазовые характеристики последовательного контура при различных значениях добротности; из этого рисунка видно, что с увеличением добротности резонансные кривые становятся более острыми, а фазовые характеристики в области, близкой к резонансу — более крутыми.

Если электрический сигнал (см. § Д-8), спектр которого может быть представлен суммой конечного числа синусоид,

$$u = \sum_{k=0}^{k=p} U_{mk} \sin(\omega_n \pm k\Omega) t,$$

причем $2p\Omega \ll \omega_n$, вводится в контур, настроенный на несущую частоту сигнала, то представляется важным опре-

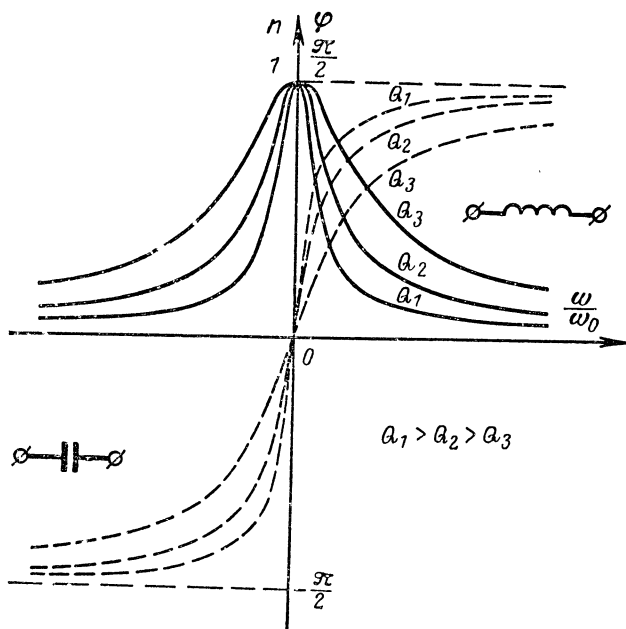


Рис. 7-10. Приведенные резонансные и фазовые кривые контуров с различными добротностями.

делить ток или напряжение, возбуждаемое в контуре гармониками сигнала, т. е. при частотах $\omega = \omega_n \pm k\Omega$. Так как ширина спектра много меньше резонансной частоты, то $p\Omega = \Delta\omega \ll \omega_n = \omega_0$ и $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. При этом справедливо приближение

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0},$$

вследствие чего уравнение (7-2-11) приведенной резонансной кривой принимает вид [см. формулу (3-6-33)]:

$$n \approx \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad (7-2-12)$$

а уравнение (7-2-11a) фазовой характеристики

$$\varphi \approx \arctg a; \quad (7-2-12a)$$

здесь

$$a = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (7-2-12б)$$

— обобщенная расстройка.

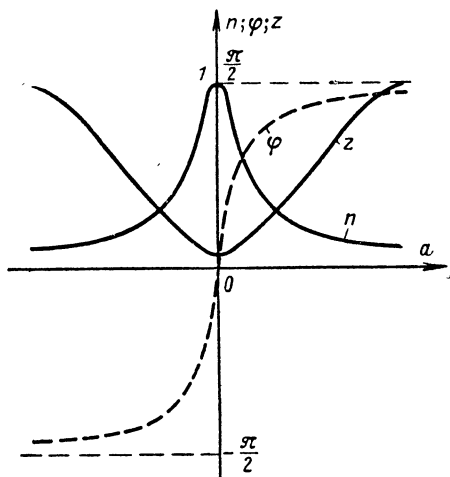


Рис. 7-11. Частотные характеристики последовательного контура.

Формулу (7-2-6), выражающую комплексное сопротивление, можно написать также в следующем виде:

$$Z \approx R(1 + ja). \quad (7-2-13)$$

На рис. 7-11 приведены кривые зависимости величин n , φ и z от обобщенной расстройки a для частот, близких к резонансной. Из этого рисунка видно, что при малых расстройках контура его фазовая характеристика линейна; диапазон частот, в котором она сохраняет линейность, можно увеличить, уменьшая добротность контура.

Рассмотрим последовательный контур как четырех-
полюсник, выходным напряжением которого является на-
пряжение на одном из реактивных элементов. Его коэф-
фициент передачи [см. выражение (6-5-1)] при $\dot{U}_2 = \dot{U}_C$
(рис. 7-6, б)

$$K(j\omega)_C = \frac{\dot{U}_C}{\dot{U}_1} = \frac{1/j\omega C}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)},$$

а с учетом соотношений (7-2-3) — (7-2-5)

$$K(j\omega)_C = \frac{Q \frac{\omega_0}{\omega}}{j \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}. \quad (7-2-14)$$

Согласно этому выражению амплитудно-частотная и фа-
зо-частотная характеристики контура:

$$|K(j\omega)_C| = \frac{Q \frac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}; \quad (7-2-14a)$$

$$\varphi_C = \arctg Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + \frac{\pi}{2}. \quad (7-2-14б)$$

Если $\dot{U}_2 = \dot{U}_L$ (рис. 7-6, в), то

$$K(j\omega)_L = \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}_1} = \frac{jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{\left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}; \quad (7-2-15)$$

$$|K(j\omega)_L| = \frac{Q \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}; \quad (7-2-15a)$$

$$\varphi_L = \arctg Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - \frac{\pi}{2}. \quad (7-2-15б)$$

Из выражений (7-2-14a) и (7-2-15a) находим, что часто-
ты, при которых получаются максимальные напряжения
на реактивных элементах, отличаются от резонансной
частоты, а именно:

$$U_{C \text{ макс}} \text{ при } \omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}};$$

$$U_{L \text{ макс}} \text{ при } \omega_L = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}.$$

Максимальное значение модуля коэффициента передачи

$$|K(j\omega)|_L = |K(j\omega)|_C = \frac{Q}{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

На рис. 7-9 приведены резонансные кривые тока и напряжений последовательного контура и зависимость модулей коэффициентов передачи от частоты. При «малых» расстройках ($\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$) коэффициенты передачи согласно (7-2-14), (7-2-15) и (7-2-126) определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} |K(j\omega)|_C &\approx \frac{Q \frac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{1 + a^2}}; \\ \varphi_C &\approx \arctg a + \pi/2; \end{aligned} \right\} \quad (7-2-16)$$

$$\left. \begin{aligned} |K(j\omega)|_L &\approx \frac{Q \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + a^2}}; \\ \varphi_L &\approx \arctg a - \pi/2. \end{aligned} \right\} \quad (7-2-17)$$

При резонансной частоте ($a=0$)

$$|K(j\omega)_{Cr}| = |K(j\omega)_{Lr}| = Q, \quad (7-2-18)$$

т. е. величина напряжения на выходе (на реактивных элементах) в Q раз больше, чем на входе. Уравнения приведенных резонансных кривых напряжения определяются зависимостью отношения U_2/U_{2r} (U_{2r} — напряжение на выходе при резонансе) от частоты. При $\dot{U}_2 = \dot{U}_C$ приведенная резонансная кривая с учетом выражений (7-2-16) и (7-2-18) определяется уравнением

$$n_C = \frac{U_2}{U_{2r}} = \frac{|K(j\omega)|_C}{|K(j\omega)|_{Cr}} \approx \frac{\omega_0/\omega}{\sqrt{1 + a^2}},$$

а при $\dot{U}_2 = \dot{U}_L$ согласно выражениям (7-2-17) и (7-2-18) уравнением

$$n_L = \frac{U_2}{U_{2r}} = \frac{|K(j\omega)|_L}{|K(j\omega)|_{Lr}} \approx \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Сравнивая эти уравнения с уравнением (7-2-12) для приведенной резонансной кривой тока, находим, что $n_C = n \frac{\omega_0}{\omega}$ и $n_L = n \frac{\omega}{\omega_0}$. На рис. 7-12 показана зависимость n_C , n , n_L от частоты при различных добротностях.

Полосой пропускания контура (см. § 3-6) называют полосу частот от ω_1 до ω_2 , на границах которой величина тока или напряжения составляет $\sqrt{2}/2$ (мощность $1/2$) от их резонансного значения

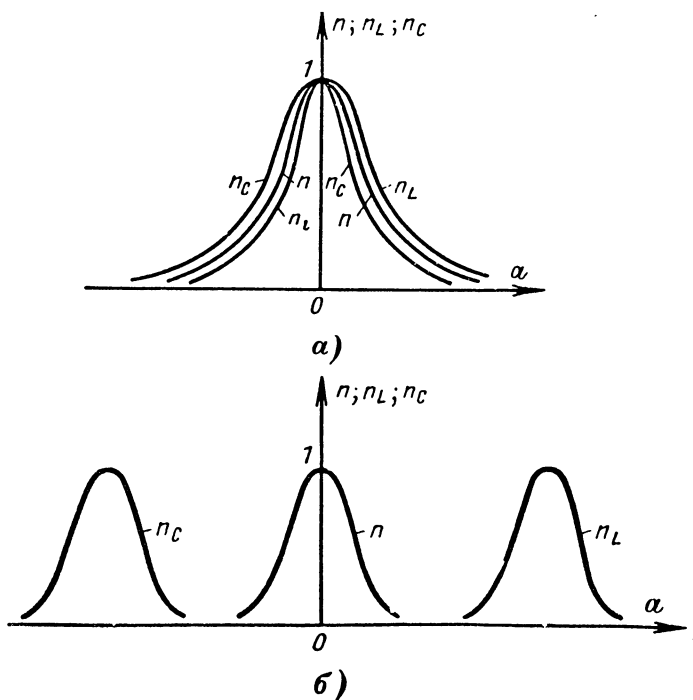


Рис. 7-12. Приведенные резонансные кривые тока и напряжения последовательного контура с большой (а) и малой (б) добротностью.

(рис. 7-13). При этом предполагается, что величина приложенного к контуру напряжения не зависит от частоты. Согласно этому определению на границах полосы пропускания удовлетворяется равенство

$$1/\sqrt{1+a^2} = \sqrt{2}/2.$$

Отсюда с учетом выражения (7-2-126) получим:

$$a = 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} Q = \pm 1 \quad (7-2-19)$$

или

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}, \quad (7-2-20)$$

т. е. ширина полосы пропускания контура обратно пропорциональна его добротности. Если входное напряже-

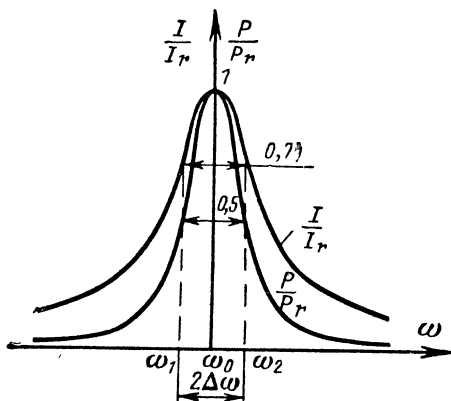


Рис. 7-13. К определению полосы пропускания контура.

ние характеризуется спектром частот, то форма выходного напряжения искажается, поскольку составляющие спектр частоты отличаются от резонансной частоты контура. Возникающее при этом различие амплитудного и фазового спектров входного и выходного напряжений называется линейными амплитудными и фазовыми искажениями (линейными в том смысле, что они являются следствием свойств линейной цепи). Очевидно, искажения будут тем меньше, чем шире поло-

са пропускания контура и уже частотный спектр входного напряжения. Очевидно также, что искажения могут отсутствовать только при идеальной П-образной форме резонансной кривой и идеальной линейности его фазовой характеристики (рис. 7-14), а также при условии, что ширина полосы пропускания не меньше ширины спектра частот входного напряжения (см. § 6-5).

Избирательность — свойство контура пропускать частоты, близкие к его резонансной частоте, и ослаблять

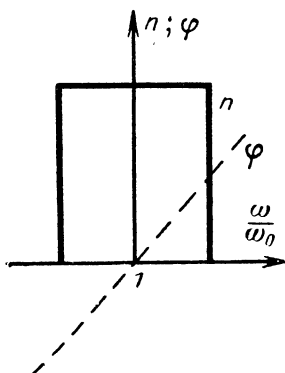


Рис. 7-14. Идеальная частотная и фазовая характеристики «неискажающего» контура.

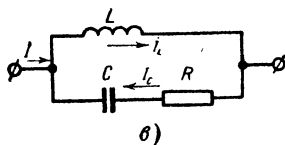
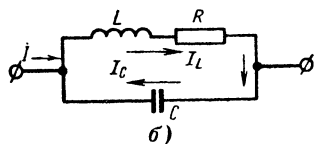
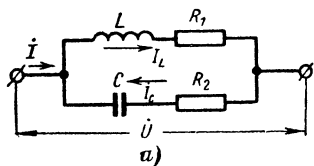


Рис. 7-15. Параллельный контур с сопротивлениями в обеих ветвях (а), с сопротивлением только в индуктивной (б) и только в емкостной (в) ветви.

все остальные. Количественно избирательность контура определяется крутизной амплитудной характеристики на краях полосы пропускания; на основании формулы (7-2-11) с учетом соотношения (7-2-20) избирательность определяется выражением

$$\left| \frac{dn}{d(\Delta\omega)} \right|_{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q}} \approx \left| \frac{d}{d(\Delta\omega)} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2}} \right) \right|_{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q}} = \frac{Q}{\sqrt{2} \omega_0}. \quad (7-2-21)$$

Из выражений (7-2-20) и (7-2-21) следует, что при увеличении добротности контура полоса пропускаемых им частот сужается (уменьшается), а избирательность увеличивается. Таким образом, чтобы не внести искажение в широкополосный сигнал, нужно иметь контур с малой добротностью, однако при этом избирательность его не может быть высокой. Сочетать широкую полосу пропускания с высокой избирательностью возможно лишь с помощью сложных схем.

Параллельный контур состоит из двух ветвей, в одной из которых имеется индуктивность L , а в другой — емкость C ; при этом сопротивление R может быть в обеих ветвях либо только в одной из них (рис. 7-15).

При наличии сопротивлений в обеих ветвях (рис. 7-15а)

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= R_1 + j\omega L; \\ Z_2 &= R_2 - j\frac{1}{\omega C} \end{aligned} \right\} \quad (7-2-22)$$

комплексное эквивалентное сопротивление параллельного контура

$$Z_{\text{э}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = R_{\text{э}} + jX_{\text{э}} = z_{\text{э}} e^{j\varphi}. \quad (7-2-23)$$

и его комплексная эквивалентная проводимость

$$Y_{\text{э}} = \frac{1}{Z_{\text{э}}} = Y_1 + Y_2 = g_{\text{э}} + jb_{\text{э}}. \quad (7-2-24)$$

Если обозначить $R_1 + R_2 = R$ и использовать соотношения

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{и} \quad Q = Z_0/R \quad [\text{см. формулы}$$

(7-2-3), (7-2-4) и (7-2-5)], то выражения (7-2-22) и (7-2-23) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R \left(\frac{R_1}{R} + jQ \frac{\omega}{\omega_0} \right); \\ Z_2 &= R \left(\frac{R_2}{R} - jQ \frac{\omega_0}{\omega} \right); \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} R_3=R &= \frac{\left(\frac{R_1 R_2}{R^2} + Q^2\right) + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \left(\frac{R_2 \omega}{R \omega_0} - \frac{R_1 \omega_0}{R \omega}\right)}{\left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]} ; \\ X_3=R &= \frac{\left[\left(\frac{R_2}{R} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{R_1}{R} \frac{\omega_0}{\omega}\right) - \left(\frac{R_1 R_2}{R^2} + Q^2\right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] Q}{\left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]} . \end{aligned} \right\} (7-2-25)$$

Так как при резонансе $X_3=0$, то на основе четвертой формулы (7-2-25) резонансная частота параллельного контура с потерями определяется из уравнения

$$\left(\frac{R_2}{R} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{R_1}{R} \frac{\omega_0}{\omega}\right) - \left(\frac{R_1 R_2}{R^2} + Q^2\right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 0,$$

откуда

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{R_1}{Z_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_2}{Z_0}\right)^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{1}{Q_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{Q_2}\right)^2}} . \quad (7-2-26)$$

Из этого выражения следует, что в отличие от последовательного контура резонансная частота параллельного контура в общем случае определяется не только его реактивными элементами L и C , но и сопротивлениями R_1 и R_2 . Только в частных случаях: $R_1=R_2=0$ (контур без потерь) и $R_1=R_2$ резонансная частота параллельного контура $\omega_r=\omega_0$, т. е. оказывается такой же, как и резонансная частота последовательного контура, состоящего из L , C и R . Только в том случае, когда потери в параллельном контуре малы, т. е. если

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_1}{Z_0} &\ll 1; \\ \frac{R_2}{Z_0} &\ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (7-2-27)$$

и при этом не требуется большой точности расчета, то резонансную частоту можно определять по приближенной формуле

$$\omega_r \approx \omega_0. \quad (7-2-28)$$

Эквивалентное сопротивление параллельного контура при резонансе согласно третьему выражению (7-2-25) с учетом соотношения (7-2-26) равно:

$$Z_{sr} = R_{sr} = R \left(\frac{R_1 R_2}{R^2} + Q^2 \right). \quad (7-2-29)$$

В случае контура с малыми потерями [т. е. если имеет место условие (7-2-27)] или без потерь, т. е. когда $R_1 = 0$ либо $R_2 = 0$,

$$R_{sr} = RQ^2 = \frac{Z_0^2}{R} = \frac{L}{CR}. \quad (7-2-30)$$

При $Q \gg 1$ эквивалентное сопротивление контура $R_{sr} \gg R$, т. е. при резонансе резко увеличивается. Это свойство параллельного резонансного контура позволяет использовать его в качестве частотно-избирательной нагрузки, так как падение напряжения на такой нагрузке создают только те гармонические составляющие тока, частоты которых равны резонансной частоте или близки к ней.

Токи в ветвях параллельного контура (рис. 7-15, а) при резонансе определяются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} I_{Lr} &= \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega_r L)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega_r L}{R_1}}; \\ I_{Cr} &= \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (1/\omega_r C)^2}} e^{j \arctg \frac{1}{R_2 \omega_r C}}; \end{aligned} \right\} \quad (7-2-31)$$

в случае контура с малыми потерями [условия (7-2-27)]

$$\left. \begin{aligned} I_{Lr} &\approx \frac{U}{Z_0} e^{-j\pi/2}; \\ I_{Cr} &\approx \frac{U}{Z_0} e^{j\pi/2}, \end{aligned} \right\} \quad (7-2-32)$$

т. е. токи в ветвях равны по величине, но различаются по фазе на угол π , иначе говоря, текут в противоположных направлениях,

Ток в неразветвленной части цепи

$$I = I_L + I_C = \frac{U}{z_3} e^{-j\varphi} \quad (7-2-33)$$

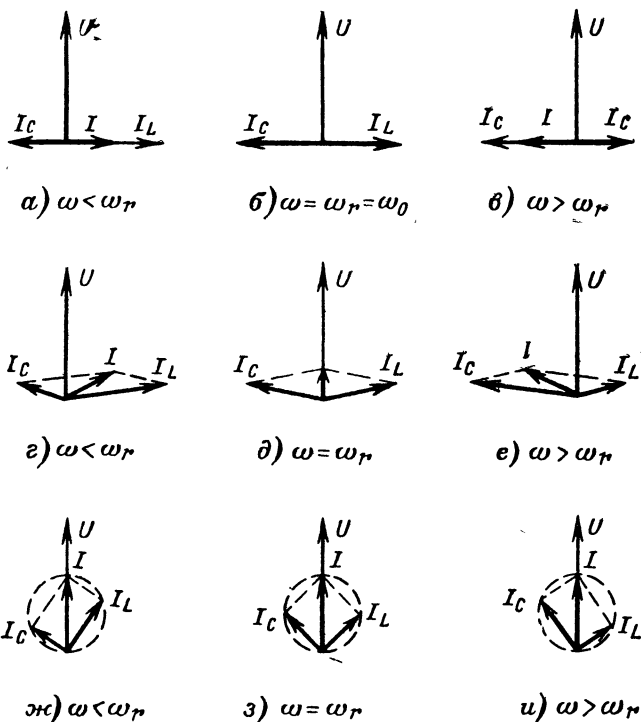


Рис. 7-16. Диаграммы токов в параллельном контуре при разных отношениях ω/ω_r .

а—в — контур без потерь ($R_1 = R_2 = 0$, $Q \rightarrow \infty$); г—е — контур с малыми потерями ($R_1, R_2 \ll \sqrt{L/C}$, $Q \gg 1$); ж—и — контур с большими потерями ($R_1 = R_2 = Z_0$, $Q = 0,5$).

при резонансе с учетом соотношения (7-2-30) равен:

$$I_r = \frac{U}{R_{3r}} = U \frac{R}{Z_0^2}. \quad (7-2-34)$$

Если $R_1 = R_2 = 0$, то $I_r = 0$; это означает, что ток циркулирует только в ветвях контура и является результатом обмена энергией между емкостью и индуктивностью без участия источника внешней э. д. с.

Из сопоставления выражений (7-2-32) и (7-2-34) следует, что если характеристическое сопротивление контура $Z_0 \gg R$, т. е. $Q \gg 1$, то токи в его параллельных ветвях в Q раз больше, чем ток в неразветвленной части цепи. В связи с этим резонанс в параллельном контуре называется резонансом токов.

На рис. 7-16 показаны векторные диаграммы токов в параллельном контуре при различной величине потерь. Если $\omega < \omega_0$, то сопротивление параллельного контура без потерь или с малым поглощением энергии имеет индуктивный характер, а когда $\omega > \omega_0$ — емкостной (в последовательном контуре — наоборот).

На рис. 7-16, ж—и даны векторные диаграммы для контура с $R_1 = R_2 = Z_0$ ($Q = 1/2$). В этом случае ток в неразветвленной части контура больше тока в любой ветви, причем сопротивление контура при любой частоте является действительным и равно Z_0 .

Амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики параллельного контура на основании формул (7-2-23) и (7-2-29) определяют следующие обобщенные выражения:

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{U(\omega)}{U_r} = \frac{z(\omega)}{R_{\Sigma r}} = \frac{\sqrt{R_{\Sigma}^2 + X_{\Sigma}^2}}{R_{\Sigma}}; \\ \varphi &= \arctg \frac{X_{\Sigma}}{R_{\Sigma}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-2-35)$$

Для малых расстройк ($\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$) и если $Q \gg 1$

$$\left. \begin{aligned} n &\approx \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}; \\ \varphi &\approx \arctg a; \\ Z_{\Sigma} &\approx \frac{R_{\Sigma r}}{1 + ja}. \end{aligned} \right\} \quad (7-2-35a)$$

Первые два выражения (7-2-35a) аналогичны выражениям (7-2-12) и (7-2-12a), которые определяют характеристики последовательного контура. На рис. 7-17 приведены кривые, характеризующие зависимость $R_{\Sigma}/R_{\Sigma r}$, $X_{\Sigma}/R_{\Sigma r}$ и $z_{\Sigma}/R_{\Sigma r}$ от обобщенной расстройки a .

Определения полосы пропускания и избирательности, данные выше применительно к последовательному кон-

туру [см. выражения (7-2-20) и (7-2-21)], действительны и для параллельного контура. Разумеется, если резонансный параллельный контур используется как заградительный фильтр, то определяемая по формуле (7-2-20) полоса включает частоты, не пропускаемые контуром.

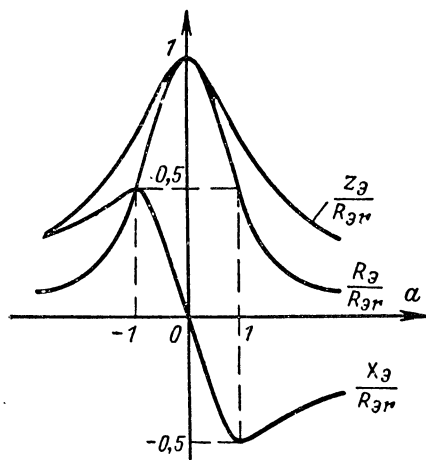


Рис. 7-17. Зависимость z_0/R_{0r} , R_0/R_{0r} и X_0/R_{0r} от обобщенной расстройки для параллельного контура.

Рассмотрим характеристики параллельного контура, присоединенного к генератору с э. д. с. E и внутренним сопротивлением R_i (рис. 7-18). В этом случае ток в неразветвленной части при резонансе определяется выражением

$$I_r = \frac{E}{R_i + R_{0r}} = \frac{E}{R_{0r}} \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_{0r}}} \quad (7-2-36)$$

Напряжение на контуре \dot{U} при этом, очевидно, меньше э. д. с. генератора. Коэффициент передачи, представляющий в данном случае отношение напряжения на контуре к э. д. с. генератора

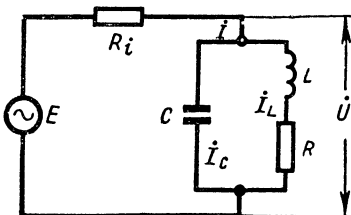


Рис. 7-18. Параллельный контур с питанием от источника э. д. с., обладающего внутренним сопротивлением R_i .

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}}{E} = \frac{Z_3}{R_i + Z_3} \quad (7-2-37)$$

меньше единицы.

В случае малых расстроек ($\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$) и если $Q \gg 1$, последнее выражение на основании соотношений (7-2-23) и (7-2-25) принимает такой вид:

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{-j\varphi'}; \quad (7-2-38)$$

здесь

$$|K(j\omega)| \approx \frac{R_{3r}}{R_{3r} + R_i} \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}}. \quad (7-2-38a)$$

$$\varphi' = \arctg a', \quad (7-2-38б)$$

$$a' = Q' 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \quad (7-2-38в)$$

$$Q' = \frac{R_i}{R_{3r} + R_i} Q = \frac{Q}{1 + \frac{R_{3r}}{R_i}}. \quad (7-2-38г)$$

Величина Q' называется приведенной добротностью; выражает она добротность всей цепи, состоящей из контура и соединенного последовательно с ним внутреннего сопротивления генератора R_i . Из последнего соотношения следует, что сопротивление R_i влияет на полосу пропускания и избирательность системы. При этом полоса пропускания определяется выражением

$$2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q'} = \frac{\omega_0}{Q} \left(1 + \frac{R_{3r}}{R_i}\right), \quad (7-2-39)$$

а избирательность

$$\left| \frac{dn}{d(\Delta\omega)} \right|_{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q'}} = \frac{Q'}{\sqrt{2} \omega_0} = \frac{Q}{\sqrt{2} \omega_0} \left(\frac{1}{1 + \frac{R_{3r}}{R_i}} \right). \quad (7-2-40)$$

С увеличением отношения R_{3r}/R_i полоса пропускания увеличивается, а избирательность системы уменьшается. Так как при резонансе ($a'=0$) согласно формуле (7-2-38a) модуль коэффициента передачи

$$|K(j\omega_r)| = \frac{R_{3r}}{R_{3r} + R_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_{3r}}}, \quad (7-2-41)$$

то увеличение избирательности ведет к снижению напряжения на контуре. Таким образом, *повышение избира-*

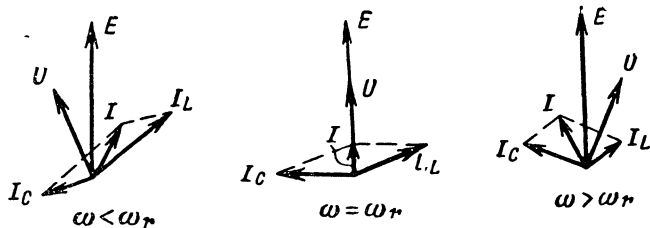


Рис. 7-19. Векторные диаграммы контура по схеме на рис. 7-18 при различных отношениях ω/ω_r .

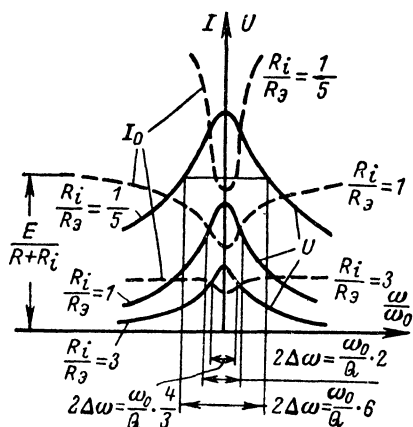


Рис. 7-20 Резонансные кривые контура по схеме на рис. 7-18 ($R_3 = R_{3r}$).

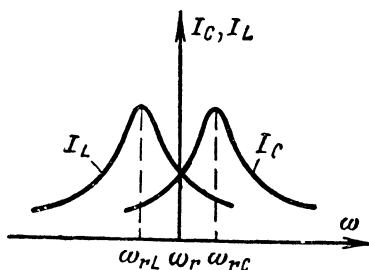


Рис. 7-21. Кривые зависимости токов от частоты в индуктивной и емкостной ветвях контура по схеме на рис. 7-18.

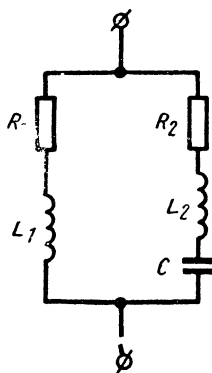


Рис. 7-22. Параллельный контур с индуктивностями в каждой ветви.

тельности контура достигается ценой уменьшения коэффициента передачи, т. е. напряжение, снимаемое с контура, обладающего хорошей избирательностью, значительно меньше э. д. с. генератора.

Векторные диаграммы, резонансные кривые напряжения и тока контура по схеме на рис. 7-18 при различных значениях отношения $R_i/R_{\Sigma r}$ приведены на рис. 7-19—7-21.

В радиоэлектронных устройствах применяют иногда параллельные контуры, в которых индуктивность или емкость (а в наиболее общем случае и то и другое) содержатся в обеих ветвях (рис. 7-22). Смысл применения таких контуров состоит в том, что, изменяя соотношение между реактивными сопротивлениями ветвей, можно изменять сопротивление контура, не изменяя его настройки. В этом случае резонансная частота при условии малых потерь в контуре [см. соотношение (7-2-27)] определяется выражением

$$\omega_r \approx \frac{1}{\sqrt{C(L_1 + L_2)}}; \quad (7-2-42)$$

эквивалентное сопротивление контура при резонансе

$$R_{\Sigma r} = \frac{p^2 Z_0^2}{R_1 + R_2}, \quad (7-2-43)$$

где

$$p = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \quad (7-2-44)$$

— коэффициент, характеризующий распределение индуктивностей между ветвями.

Таким образом, эквивалентное сопротивление контура зависит от p , а резонансная частота нет. Заметим, что в отличие от параллельного контура, в котором L и C разнесены по разным ветвям, сопротивление контура по схеме на рис. 7-22, кроме максимума на частоте ω_r , определяемой выражением (7-2-42), имеет минимум на частоте

$$\omega'_r = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} > \omega_r. \quad (7-2-45)$$

На этой частоте возникает резонанс, определяемый параметрами ветви, состоящей из элементов C , L_2 и R_2 (ветвь эту можно рассматривать как последовательный контур с резонансной частотой ω'_r).

RC- и RL-цепи. Так называют четырехполюсники, состоящие из последовательного соединения резистора с конденсатором или с катушкой индуктивности (рис. 7-23).

Если выходным напряжением является напряжение на резисторе RC-цепи (рис. 7-23, а) или напряжение на катушке индуктивности RL-цепи (рис. 7-23, б), то такие

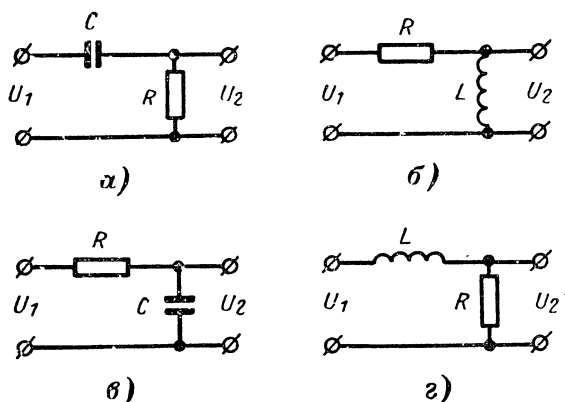


Рис. 7-23. RC-цепи (а, в) и RL-цепи (б, г).

цепи называют дифференцирующими. В этом случае коэффициент передачи [см. выражение (6-5-1)]

$$\left. \begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{j\omega\tau_0}{1 + j\omega\tau_0}; \\ |K(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau_0)^2}}}; \\ \varphi &= -\operatorname{arctg} \frac{1}{\omega\tau_0}, \end{aligned} \right\} \quad (7-2-46)$$

где τ_0 — постоянная времени; для RC-цепи $\tau_0 = RC$ и для RL-цепи $\tau_0 = L/R$.

Амплитудно- и фазо-частотные характеристики RC- и RL-цепей для этих случаев приведены на рис. 7-24, а. Выходное напряжение высокой частоты дифференцирующей цепи (рис. 7-23, а) почти не отличается от входного (при $\omega \rightarrow \infty$ коэффициент передачи $|K(j\omega)| \rightarrow 1$), т. е. она имеет характеристику фильтра

верхних частот (см. § 7-5). При низкой частоте амплитуда и фаза выходного напряжения дифференцирующей цепи резко изменяются с частотой (когда $\omega \rightarrow 0$, коэффициент передачи $|K(j\omega)| \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$) и поэтому при низких частотах дифференцирующие цепи могут служить делителями напряжения и фазовращателями.

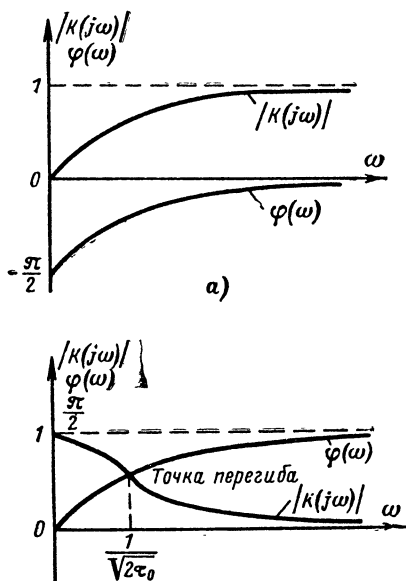


Рис. 7-24. Амплитудно-частотные и фазовые характеристики дифференцирующей (а) и интегрирующей (б) цепи.

Если выходным напряжением является напряжение на конденсаторе RC -цепи (рис. 7-23, в) или напряжение на резисторе RL -цепи (рис. 7-23, г), то такие цепи называют интегрирующими; их коэффициент передачи

$$\left. \begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega\tau_0}; \\ |K(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_0)^2}}; \\ \varphi &= \text{arctg } \omega\tau_0. \end{aligned} \right\} \quad (7-2-47)$$

Амплитудно- и фазо-частотные характеристики цепей для этих случаев приведены на рис. 7-24, б. При низкой частоте выходное напряжение интегрирующей цепи почти не отличается от входного (когда $\omega \rightarrow 0$, то $|K(j\omega)| \rightarrow 1$, $\varphi \rightarrow 0$); следовательно, такие цепи (рис. 7-23, в и г) имеют характеристики фильтра нижних частот, см. § 7-5. При высокой частоте амплитуда и фаза выходного напряжения резко изменяются с частотой (если $\omega \rightarrow \infty$, то $|K(j\omega)| \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \pi/2$). Поэтому при высоких частотах интегрирующие цепи могут служить делителями напряжения и фазовращателями.

7-3. МЕТОДЫ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ

Расчет сложной цепи можно произвести, составив на основе законов Кирхгофа [см. выражения (6-2-27) и (6-2-28)] систему уравнений и решив ее. Очевидно, число уравнений будет равно числу ветвей цепи. При использовании метода контурных токов и узловых напряжений число уравнений уменьшается.

Метод контурных токов. Сущность метода контурных токов заключается в том, что в подлежащей анализу системе выделяют необходимое и достаточное число замкнутых контуров, условно задаются направлениями контурных токов, т. е. токов, замыкающихся в независимых контурах, и составляют на основании второго закона Кирхгофа систему уравнений вида

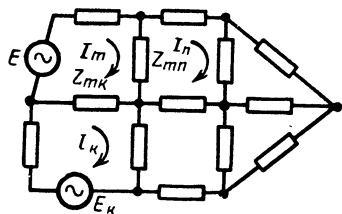


Рис. 7-25. К методу контурных токов.

[illegible]

Каждое из уравнений этой системы записывается в общем виде так:

$$\dot{E}_n = \sum_{m=1}^k I_m Z_{mn};$$

здесь \dot{E}_n — сумма всех действующих в n -м контуре э. д. с. (совпадающие по направлению с направлением контурного тока э. д. с. берут со знаком плюс, не совпадающие — со знаком минус);

I_m — контурный ток в m -м контуре;

Z_{mn} — сопротивление связи m -го и n -го контуров, равное алгебраической сумме всех комплексных сопротивлений общей ветви этих контуров; сопротивление Z_{mn} следует брать со знаком плюс, если контурные токи в общей ветви совпадают по направлению, и со знаком минус, если направления этих токов противоположны.

Сопротивление $j\omega M_{mn}$, обусловленное магнитной связью m -го и n -го контуров, берется со знаком плюс, если направления токов I_m и I_n относительно одноименных зажимов одинаково, и со знаком минус, если противоположно.

Z_{nn} — собственное сопротивление n -го контура, равное алгебраической сумме всех сопротивлений, входящих в контур без учета сопротивлений, обусловленных магнитной связью.

Если э. д. с. действуют только в контурах m и k (рис. 7-25), то левые части всех уравнений (7-3-1), кроме m -го и k -го, равны нулю.

Количество уравнений в системе (7-3-1) соответствует количеству независимых контуров и равно числу ветвей цепи минус число узлов без одного, т. е.

$$k = n - (m - 1),$$

где n — число ветвей и m — число узлов.

Действительно, при замене токов в ветвях контурными токами автоматически выполняется первый закон Кирхгофа; на его основе можно составить m уравнений, из числа которых будет $m-1$ независимых. Эти уравнения наложат $m-1$ условий на n токов. Поэтому число независимых токов уменьшится на $m-1$ и составит $n-m+1$.

При составлении уравнений для контурных токов следует обращать внимание на то, чтобы получаемые урав-

В качестве примера напишем уравнения контурных токов для схемы, приведенной на рис. 6-22:

$$I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} = E_1;$$

$$I Z_{21} + I_2 Z_{22} = \dot{E}_2,$$

где

$$Z_{11} = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right);$$

$$Z_{22} = R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right);$$

$$Z_{12} = Z_{21} = j \omega M.$$

Для схемы на рис. 6-23 уравнения контурных токов имеют следующий вид:

$$I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} = \dot{E}_1;$$

$$I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22} = \dot{E}_2,$$

где

$$Z_{11} = R_1 + R_3 + j \omega (L_1 + L_3) - \frac{j}{\omega} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right);$$

$$Z_{22} = R_2 + R_3 + j \omega (L_2 + L_3) - \frac{j}{\omega} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right);$$

$$Z_{12} = Z_{21} = R_3 + j \omega (L_3 + M) + \frac{1}{j \omega C_3}.$$

Уравнения (7-3-1) очень компактно могут быть переписаны в матричной форме (см. § Д-1):

$$\| \dot{E} \| = \| Z \| \| I \|,$$

где

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \| \dot{E} \| = \left\| \begin{array}{c} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \vdots \\ \dot{E}_k \end{array} \right\|, \quad \| Z \| = \left\| \begin{array}{ccc} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1k} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{k1} & Z_{k2} & \dots & Z_{kk} \end{array} \right\|, \quad \| I \| = \left\| \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_k \end{array} \right\|. \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \end{array}$$

Решение матричного уравнения сводится к нахождению матрицы $\| I \|$, которая определяется выражением

$$\| I \| = \| Z \|^{-1} \| \dot{E} \|,$$

где $\|Z\|^{-1}$ — матрица, обратная $\|Z\|$, определение которой [см. (Д-1-5)] сводится к вычислениям, аналогичным (7-3-2).

Однако если требуется найти только некоторые элементы матрицы, то вычисления упрощаются (см. Д-1-7).

Метод узловых напряжений основан на первом законе Кирхгофа и законе Ома. Этот метод имеет преимущества перед методом контурных токов при расчете таких линейных электрических цепей, в которых

число узлов m , уменьшенное на единицу, меньше числа k независимых контуров ($m-1 < k$), в частности, когда схема содержит ряд параллельных ветвей. Однако этот метод не пригоден для разветвленных цепей со взаимной индуктивностью, так как ток ветви в этом случае зависит не только от э. д. с. находящихся в ней источников и потенциалов тех узлов, к которым ветвь присоединена, но и от токов других ветвей, которые наводят э. д. с. взаимной индукции.

Примем узел с наименьшим потенциалом или заземленный за опорный. Условимся называть узловыми напряжениями — напряжения $u_{10}, u_{20}, \dots, u_{(m-1)0}$ между каждым из прочих $m-1$ узлов и опорным. Зная узловое напряжение, можно найти напряжение между любыми узлами i и k :

$$\dot{U}_{ik} = \dot{U}_{i0} - \dot{U}_{k0} \quad (7-3-3)$$

и ток \dot{I}_{ik} в ветви ik на основании закона Ома (рис. 7-26):

$$\dot{I}_{ik} = \frac{\dot{E}_{ik} + \dot{U}_{ik}}{Z_{ik}} = Y_{ik} (\dot{E}_{ik} + \dot{U}_{ik}), \quad (7-3-4)$$

где Y_{ik} — алгебраическая сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы i и k ;

\dot{E}_{ik} — сумма э. д. с. в ветви ik .

Условимся за положительное направление принимать направление от узла, соответствующего первому индексу, к узлу, соответствующему второму. Тогда, очевидно, $\dot{I}_{ik} = -\dot{I}_{ki}$, $\dot{U}_{ik} = -\dot{U}_{ki}$, а сопротивления и проводимости, как параметры цепи, не характеризуются направлением, соответственно $Z_{ik} = Z_{ki}$, $Y_{ik} = Y_{ki}$.

Применяя первый закон Кирхгофа к каждому из уз-

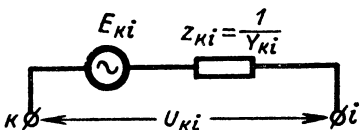


Рис. 7-26. К методу узловых напряжений.

лов, кроме озорного, напомним $m-1$ независимых уравнений:

$$\left. \begin{aligned} & \dot{I}_{12} + \dot{I}_{13} + \dot{I}_{14} + \dots + \dot{I}_{1(m-1)} + \dot{I}_{10} = 0; \\ & \dot{I}_{21} + \dot{I}_{23} + \dot{I}_{24} + \dots + \dot{I}_{2(m-1)} + \dot{I}_{20} = 0; \\ & \dots\dots\dots \\ & \dot{I}_{(m-1)1} + \dot{I}_{(m-1)2} + \dot{I}_{(m-1)3} + \dots + \dot{I}_{(m-1)(m-2)} + \\ & \quad + \dot{I}_{(m-1)0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-5)$$

Подставляя выражение (7-3-4) в уравнения (7-3-5), получаем:

$$\left. \begin{aligned} Y_{12}\dot{U}_{12} + Y_{13}\dot{U}_{13} + \cdots + Y_{1(m-1)}\dot{U}_{1(m-1)} + \\ + Y_{10}\dot{U}_{10} = \dot{I}_1; \\ Y_{21}\dot{U}_{21} + Y_{23}\dot{U}_{23} + \cdots + Y_{2(m-1)}\dot{U}_{2(m-1)} + \\ + Y_{20}\dot{U}_{20} = \dot{I}_2; \\ \\ Y_{(m-1)1}\dot{U}_{(m-1)1} + Y_{(m-1)2}\dot{U}_{(m-1)2} + \cdots + \\ + Y_{(m-1)0}\dot{U}_{(m-1)0} = \dot{I}_{m-1}, \end{aligned} \right\} \quad (7-3-6)$$

где $i_k = \sum_n \dot{E}_{kn} Y_{kn}$ — алгебраическая сумма произведений э. д. с., действующей в ветви на проводимость этой ветви;

n — число ветвей, примыкающих к узлу k , причем слагаемое берется со знаком плюс, если э. д. с. в ветви направлена к рассматриваемому узлу, и минус, когда она направлена от узла.

Подставляя выражение (7-3-3) в уравнения (7-3-6) и обозначая

$$Y_{k1} + Y_{k2} + \dots + Y_{k(k-1)} + \dots + Y_{k(m-1)} + Y_{k0} = Y_{kk}$$

— сумму проводимостей всех ветвей, расходящихся из узла k , получаем:

[illegible]

Каждое из этих уравнений в общем виде запишется так:

$$I_k = \sum_{n=1}^{k-1} (-\dot{U}_{n0} Y_{kn}) + \dot{U}_{k0} Y_{kk} + \sum_{n=k+1}^{n-1} (-\dot{U}_{n0} Y_{kn}); \quad (7-3-8)$$

$$k=1, 2, \dots; n-1.$$

Решение системы уравнений (7-3-8) имеет вид:

$$\dot{U}_{k0} = \frac{D_k}{D},$$

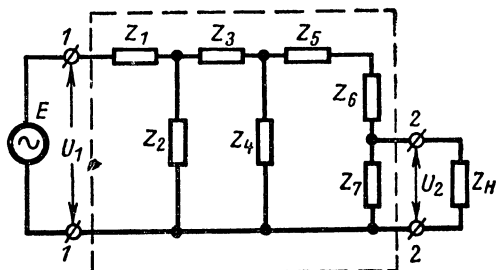
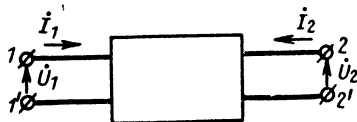


Рис. 7-27. Замена электрической цепи четырехполюсником.

где D — определитель системы; D_k — определитель, который образуется из D путем замены коэффициентов при искомом узлом напряжения на значения токов, притекающих к выделенному узлу.

Рис. 7-28. Направления напряжений и токов в четырехполюснике.



Для метода узловых напряжений характерна наглядность в определении числа уравнений. Если система не разделена на части, связанные лишь посредством взаимной индукции, то число уравнений определяется числом всех узлов, за исключением опорного. Если же система разделена на части, связанные лишь посредством взаимной индукции, то число уравнений дополнительно уменьшается на одно для каждой отделенной части, так как в этом случае возникает дополнительный опорный узел для каждой из этих частей.

Метод пассивного четырехполюсника. Когда сложная электрическая цепь является промежуточным звеном в системе передачи энергии, для ее характеристики достаточно знать соотношения между токами и напряжениями на входных и выходных зажимах цепи, т. е. не содержащую источников энергии сложную электрическую линейную цепь можно заменить линейным пассивным четырехполюсником (рис. 7-27).

Изображая четырехполюсник в виде прямоугольника (рис. 7-28) с парой входных зажимов $1-1'$ и парой выходных зажимов $2-2'$, условимся считать входное напряжение \dot{U}_1 и выходное напряжение \dot{U}_2 направленными от нижнего зажима к верхнему, а направления входного и выходного тока \dot{I}_1 и \dot{I}_2 — совпадающими по направлению с \dot{U}_1 и \dot{U}_2 . (Направления токов и напряжений, вообще говоря, можно выбирать произвольными, но при этом будут меняться знаки в уравнениях.)

Четыре величины \dot{U}_1 , \dot{U}_2 , \dot{I}_1 и \dot{I}_2 могут быть подразделены на известные и неизвестные. Любые две из этих величин могут быть выражены как функции двух других, если параметры цепи известны. Так как число комбинаций из четырех величин по две равно шести, то имеется возможность описать поведение четырехполюсника одной из шести эквивалентных систем уравнений. Наиболее употребительны следующие четыре системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_1(\dot{I}_1, \dot{I}_2); \\ \dot{U}_2 &= Z_2(\dot{I}_1, \dot{I}_2). \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_1(\dot{U}_1, \dot{U}_2); \\ \dot{I}_2 &= Y_2(\dot{U}_1, \dot{U}_2). \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_1(\dot{U}_2, \dot{I}_2); \\ \dot{I}_1 &= A_2(\dot{U}_2, \dot{I}_2). \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_1(\dot{U}_2, \dot{I}_1); \\ \dot{I}_2 &= H_2(\dot{U}_2, \dot{I}_1). \end{aligned} \right\}$$

Для линейных четырехполюсников эти соотношения имеют вид простых алгебраических уравнений первой степени.

Первая система уравнений четырех-
полюсника:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 \end{cases} \quad (7-3-9)$$

представляет собой уравнения контурных токов: первое — для входного контура четырехполюсника, второе — для выходного. Коэффициенты Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} и Z_{22} называются полными сопротивлениями холостого хода.

Если выходные зажимы разомкнуты ($\dot{I}_2=0$), то

$$\begin{cases} Z_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}; \\ Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} \end{cases} \quad (7-3-9a)$$

Если разомкнуты входные зажимы ($\dot{I}_1=0$), то

$$\begin{cases} Z_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0}; \\ Z_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} \end{cases} \quad (7-3-9б)$$

здесь Z_{11} — входное сопротивление при разомкнутых выходных зажимах;

Z_{22} — выходное сопротивление при разомкнутых входных зажимах;

Z_{12} — сопротивление передачи от входа к выходу при разомкнутых входных зажимах; оно определяется как отношение напряжения, появляющегося на входных разомкнутых зажимах при подключении источника к выходным зажимам, к току на выходе.

Z_{21} — сопротивление передачи от выхода к входу при разомкнутых выходных зажимах.

В матричной форме уравнения (7-3-9) имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (7-3-10)$$

Матрица

$$\|Z\| = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

называется матрицей сопротивления или матрицей Z .

Так как на уравнения четырехполюсника никаких ограничений не накладывается, то можно считать, что в самом общем случае четырьмя параметрами характеризуются пассивные и активные невзаимные четырехполюсники. Примерами активных четырехполюсников могут служить цепи, содержащие зависимые источники (электронные лампы или транзисторы с внешними источниками э. д. с.).

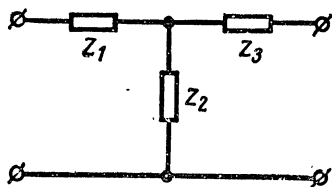


Рис. 7-29. К пояснению терминов «несимметричный» и «симметричный» четырехполюсник.

Если четырехполюсник взаимен и несимметричен, то согласно теореме взаимности (§ 6-5) и определению Z_{12} и Z_{21} [см. выражения (7-3-9а) и (7-3-9б)] эти два сопротивления равны:

$$Z_{12} = Z_{21}; \quad (7-3-9в)$$

вследствие этого взаимный несимметричный четырехполюсник характеризуется тремя параметрами Z_{11} , Z_{12} и Z_{22} .

Если четырехполюсник симметричный, то его входные и выходные зажимы можно взаимно поменять местами без изменения условий передачи. Для симметричного четырехполюсника выполняется условие

$$Z_{11} = Z_{22}. \quad (7-3-9г)$$

Таким образом, взаимный и симметричный четырехполюсник определяется лишь двумя параметрами: Z_{11} и Z_{12} . Четырехполюсник, показанный на рис. 7-29, будет симметричным, если $Z_1 = Z_3$.

Вторая система уравнений четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad (7-3-11)$$

представляет уравнения узловых напряжений. Коэффициенты Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} , Y_{22} называются полными и про-

димостями короткого замыкания. Их можно определить следующим образом. При $\dot{U}_2=0$ (короткое замыкание выхода)

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= \frac{i_1}{\dot{U}_1} \Big|_{u_2=0}; \\ Y_{21} &= \frac{i_2}{\dot{U}_1} \Big|_{u_2=0}; \end{aligned} \right\} \quad (7-3-11a)$$

при $\dot{U}_1=0$ (короткое замыкание входа)

$$\left. \begin{aligned} Y_{12} &= \frac{i_1}{\dot{U}_2} \Big|_{u_1=0}; \\ Y_{22} &= \frac{i_2}{\dot{U}_2} \Big|_{u_1=0}; \end{aligned} \right\} \quad (7-3-11b)$$

здесь Y_{11} — входная проводимость при коротком замыкании выходных зажимов;

Y_{22} — выходная проводимость при коротком замыкании входных зажимов;

Y_{12} — проводимость передачи от входа к выходу при замкнутых входных зажимах;

Y_{21} — проводимость передачи от выхода ко входу при замкнутых выходных зажимах.

В матричной форме уравнения (7-3-11) имеют следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}. \quad (7-3-12)$$

Матрица

$$\|Y\| = \begin{Bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{Bmatrix}$$

называется матрицей проводимости или матрицей Y .

У взаимного четырехполюсника $Y_{12}=Y_{21}$. Если четырехполюсник, кроме того, симметричный, то $Y_{11}=Y_{22}$. Таким образом, взаимный и симметричный четырехполюсник характеризуется только двумя параметрами: Y_{11} , Y_{12} .

Третья система уравнений четырех-

полусни́ка выражает ток и напряжение на входе четырехполюсника через ток и напряжение на его выходе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-13)$$

Здесь коэффициенты A_{11} , A_{12} , A_{21} и A_{22} , называемые общими параметрами четырехполюсника, определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0}; \\ A_{21} &= \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0}; \\ A_{12} &= - \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0}; \\ A_{22} &= - \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-13a)$$

Величины A_{11} и A_{12} являются безразмерными; A_{12} и A_{21} имеют соответственно размерности сопротивления и проводимости. При этом

$$A_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{1}{K(j\omega)}, \quad (7-3-13б)$$

т. е. является величиной, обратной коэффициенту передачи четырехполюсника по напряжению при разомкнутом выходе [см. формулу (6-5-1)];

A_{22} является величиной, обратной коэффициенту передачи четырехполюсника по току при замкнутом выходе;

A_{12} — сопротивление передачи от входа к выходу при замкнутых выходных зажимах;

A_{21} — проводимость передачи от выхода к входу при разомкнутых выходных зажимах.

В матричной форме уравнения (7-3-13) имеют следующий вид:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{vmatrix}. \quad (7-3-14)$$

Матрица

$$\|A\| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

называется матрицей передачи.

Если четырехполюсник взаимен, то, как будет показано ниже [выражение (7-3-186)], между вышеупомянутыми коэффициентами существует следующая зависимость:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = |A| = 1, \quad (7-3-14a)$$

т. е. такой четырехполюсник определяется тремя независимыми параметрами.

Если четырехполюсник, кроме того, симметричный, то

$$A_{11} = A_{22} \quad (7-3-14b)$$

и, следовательно, характеризуется двумя параметрами: A_{11} , A_{12} .

Четвертая система уравнений четырехполюсника имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2, \end{cases} \quad (7-3-15)$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}. \quad (7-3-16)$$

Физический смысл элементов матрицы

$$\|H\| = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

определяется соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \bigg|_{U_2=0}; \\ H_{12} &= \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \bigg|_{I_1=0}; \\ H_{21} &= \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \bigg|_{U_2=0}; \\ H_{22} &= \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \bigg|_{I_1=0}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-15a)$$

Связь между коэффициентами уравнений четырехполюсника. Поскольку все системы уравнений (7-3-10), (7-3-12), (7-3-14) и (7-3-16) могут описывать один и тот же четырехполюсник, то коэффициенты всех этих систем должны находиться в определенной зависимости друг от

друга. Зависимость эта определяется путем преобразования системы из одной формы в другую.

Из сравнения уравнений (7-3-10) и (7-3-12) следует, что матрицы $\|Z\|$ и $\|Y\|$ являются обратными и согласно формуле (Д-1-5а) их элементы связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \frac{Y_{22}}{|Y|}; \\ Z_{12} &= -\frac{Y_{12}}{|Y|}; \\ Z_{21} &= -\frac{Y_{21}}{|Y|}; \\ Z_{22} &= \frac{Y_{11}}{|Y|}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-17)$$

Обратно:

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= \frac{Z_{22}}{|Z|}; \\ Y_{12} &= -\frac{Z_{12}}{|Z|}; \\ Y_{21} &= -\frac{Z_{21}}{|Z|}; \\ Y_{22} &= \frac{Z_{11}}{|Z|}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-17a)$$

Решая уравнения (7-3-13) относительно \dot{U}_1 и \dot{U}_2 , получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{A_{11}}{A_{21}} \dot{I}_1 + \frac{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}{A_{21}} \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= \frac{1}{A_{21}} \dot{I}_1 + \frac{A_{22}}{A_{21}} \dot{I}_2, \end{aligned}$$

сравнивая которую с уравнениями (7-3-9), получаем:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \frac{A_{11}}{A_{21}}; \\ Z_{12} &= \frac{|A|}{A_{21}}; \\ Z_{21} &= \frac{1}{A_{21}}; \\ Z_{22} &= \frac{A_{22}}{A_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-18)$$

Обратно:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{Z_{11}}{Z_{21}}, \\ A_{12} &= -\frac{|Z|}{Z_{21}}, \\ A_{21} &= \frac{1}{Z_{21}}; \\ A_{22} &= \frac{Z_{22}}{Z_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-18a)$$

В формулах (7-3-17) — (7-3-18a) $|Y|$, $|Z|$, $|A|$ — определители соответствующих матриц.

Если четырехполюсник взаимен, то $Z_{12} = Z_{21}$ [см. выражение (7-3-9в)] и, следовательно,

$$A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1. \quad (7-3-18б)$$

Если четырехполюсник симметричен, то $Z_{11} = Z_{22}$ [см. выражение (7-3-9г)] и $A_{11} = A_{22}$.

Решая систему (7-3-13) относительно \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , получаем выражения:

$$\dot{I}_1 = \frac{A_{22}}{A_{12}} \dot{U}_1 + \left(A_{21} - \frac{A_{22} A_{11}}{A_{12}} \right) \dot{U}_2;$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{1}{A_{12}} \dot{U}_1 + \frac{A_{11}}{A_{12}} \dot{U}_2,$$

сравнивая которые с уравнениями (7-3-11), получаем:

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= \frac{A_{22}}{A_{12}}, \\ Y_{12} &= -\frac{|A|}{A_{12}}; \\ Y_{21} &= -\frac{1}{A_{12}}; \\ Y_{22} &= \frac{A_{11}}{A_{22}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-19)$$

Таблица 7-1

Связь между матрицами четырехполюсников

К	От			
	$\begin{vmatrix} Z \\ \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} Y \\ \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} A \\ \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} H \\ \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} Z \\ \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & Y_{22} - Y_{12} \\ Y & -Y_{21} & Y_{11} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 1 & A_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & H_{12} \\ H_{22} & -H_{21} & 1 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} Y \\ \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & Z_{22} - Z_{12} \\ Z & -Z_{21} & Z_{11} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & A_{22} - A_{12} \\ A_{12} & -1 & A_{11} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 - H_{12} \\ H_{11} & H_{21} & H \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} A \\ \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & 1 & Z_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & Y_{22} & 1 \\ -Y_{21} & Y_{11} & Y_{12} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & H_{11} \\ -H_{31} & H_{22} & 1 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} H \\ \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & Z_{12} & Z_{11} \\ Z_{22} & -Z_{21} & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -Y_{12} \\ Y_{11} & Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{21} \\ -1 & A_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} H_{12} \\ H_{11} & H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}$

Обратно:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}; \\ A_{12} &= -\frac{1}{Y_{21}}; \\ A_{21} &= -\frac{|Y|}{Y_{21}}; \\ A_{22} &= -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-19a)$$

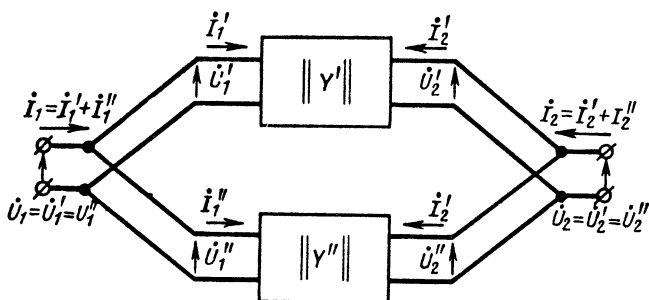


Рис. 7-30. Параллельное соединение четырехполюсников.

Аналогично можно найти и связь между элементами матриц $\|H\|$ и $\|Z\|$, $\|H\|$ и $\|Y\|$, $\|H\|$ и $\|A\|$.

При расчетах четырехполюсников встречается необходимость переходить от одной системы уравнений к другой; табл. 7-1 позволяет легко осуществлять такой переход.

Параллельное соединение четырехполюсников (рис. 7-30). Токи и напряжения имеют направления, указанные на этом рисунке. Здесь имеют место следующие соотношения для напряжений и токов:

$$I_1 = I_1' + I_1''; \quad I_2 = I_2' + I_2''; \quad U_1 = U_1' = U_1''; \quad U_2 = U_2' = U_2''.$$

При анализе схемы параллельного соединения четырехполюсников удобно оперировать проводимостями; при этом каждый из них характеризуется уравнениями

(7-3-12). Для всего соединения в целом

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{Bmatrix} = \|Y'\| \begin{Bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{Bmatrix} + \|Y''\| \begin{Bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{Bmatrix} = \\ &= (\|Y'\| + \|Y''\|) \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} = \|Y\| \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что матрица проводимостей параллельного соединения четырехполюсников равна сумме матриц

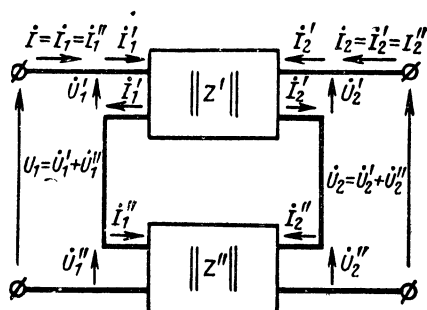


Рис. 7-31. Последовательное соединение четырехполюсников.

[см. формулы (Д-1-2)] проводимостей, входящих в соединение четырехполюсников, т. е.

$$\|Y\| = \|Y'\| + \|Y''\|.$$

Последовательное соединение четырехполюсников (рис. 7-31). Токи и напряжения имеют направления, указанные на этой схеме; характеризуется она следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}'_1 = \dot{I}''_1; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}'_2 = \dot{I}''_2. \end{aligned}$$

На основании этих соотношений, применяя уравнения (7-3-10), аналогично предыдущему получим:

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} = (\|Z'\| + \|Z''\|) \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Bmatrix} = \|Z\| \begin{Bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Bmatrix}.$$

Отсюда следует, что матрица сопротивлений последовательного соединения четырехполюсников равна сумме матриц сопротивлений входящих в соединение четырехполюсников, т. е.

$$\|Z\| = \|Z'\| + \|Z''\|.$$

Каскадное соединение четырехполюсников (рис. 7-32). Этот наиболее важный способ соединения четырех-

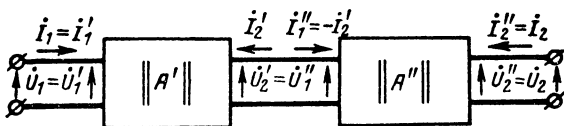


Рис. 7-32. Каскадное соединение четырехполюсников.

полюсников используется при соединении фильтров, электронных усилителей и элементов следящих систем. При таком соединении четырехполюсников

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1, \dot{U}'_2 = \dot{U}''_1, \dot{U}''_2 = \dot{U}_2,$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1, \dot{I}'_2 = -\dot{I}''_1 \text{ и } \dot{I}''_2 = \dot{I}_2.$$

Согласно уравнению (7-3-14) имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{c} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{array} \right\| = \|A'\| \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{array} \right\| = \|A'\| \left\| \begin{array}{c} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_1 \end{array} \right\| = \\ &= \|A'\| \|A''\| \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{array} \right\| = \|A'\| \|A''\| \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{array} \right\| = \|A\| \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что матрица передачи каскадного соединения четырехполюсников равна произведению матриц [см. формулы (Д-1-4а)] передачи входящих в это соединение четырехполюсников, т. е.

$$\|A\| = \|A'\| \|A''\|.$$

Заметим, что перемножать матрицы надо в соответствующем порядке, так как коммутативный закон к произведению матриц не применим [см. выражение (Д-1-4б)].

Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников (рис. 7-33). Это соединение является основ-

ным в устройствах с обратной связью; характеризуется приводимая схема следующими соотношениями:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 = \dot{U}''_2;$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 = \dot{I}''_1; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2.$$

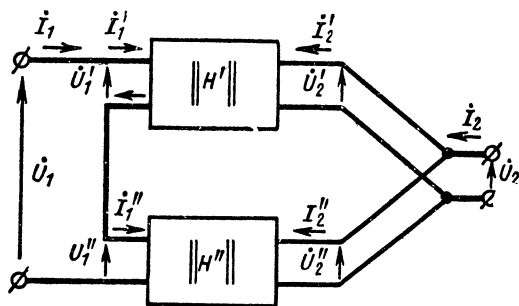


Рис. 7-33. Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников.

Применяя уравнение (7-3-16), получаем:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2'' \end{vmatrix} = \|H'\| \begin{vmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{U}_2' \end{vmatrix} + \\ &+ \|H''\| \begin{vmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{vmatrix} = \{\|H'\| + \|H''\|\} \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица $\|H\|$ последовательно-параллельного соединения равна сумме аналогичных матриц четырехполюсников, входящих в это соединение, т. е.

$$\|H\| = \|H'\| + \|H''\|.$$

Разбивая сложные схемы на простейшие четырехполюсники, для которых известны таблицы матриц, можно быстро получить необходимые результаты.

Матрицы простейших четырехполюсников в виде прямого и перекрещенного соединений, последовательного и параллельного сопротивлений, а также трансформатора с $M = \text{const}$ легко получить непосредственным составлением уравнений этих четырехполюсников.

Прямое соединение (рис. 7-34). Если в приведенной схеме пренебречь сопротивлением, индуктивностью и ем-

костью проводов, то выполняются соотношения $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$, $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$. Сравнивая эти соотношения с системой уравнений (7-3-13), получаем:

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7-3-20)$$

Заметим, что умножение на эту матрицу равносильно умножению на единицу и не зависит от порядка умно-

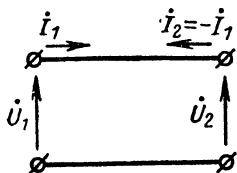


Рис. 7-34. Прямое соединение.

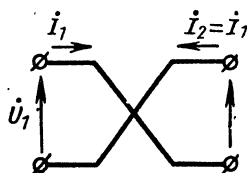


Рис. 7-35. Перекрыщенное соединение.

жения. Матриц $\|Z\|$, $\|Y\|$ и $\|H\|$ для этого соединения не существует.

Перекрыщенное соединение (рис. 7-35). Для этого четырехполюсника выполняются соотношения $\dot{U}_1 = -\dot{U}_2$, $\dot{I}_1 = \dot{I}_2$. На основании уравнений (7-3-13) имеем:

$$\|A\| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (7-3-20a)$$

Умножение на такую матрицу равносильно перемене знаков всех элементов матрицы $\|A\|$ и не зависит от порядка умножения. Матриц $\|Z\|$, $\|Y\|$ и $\|H\|$ для такого соединения не существует.

Последовательное комплексное сопротивление (рис. 7-36). Для этой схемы выполняются соотношения $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + Z\dot{I}_1 = \dot{U}_2 - Z\dot{I}_2$, $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$. Сравнивая эти соотношения с системой уравнений (7-3-13), получаем:

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (7-3-21)$$

по табл. 7-1 находим:

$$\|Y\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \\ -\frac{1}{Z} & \frac{1}{Z} \end{vmatrix}. \quad (7-3-21a)$$

Матриц $\|Z\|$ и $\|H\|$ для этого четырехполюсника не существует.

Параллельное комплексное сопротивление (рис. 7-37). Для этого четырехполюсника можно написать уравнения:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_2/Z - \dot{I}_2.$$

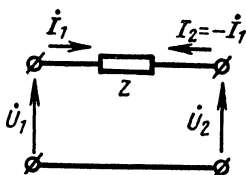


Рис. 7-36. Последовательное комплексное сопротивление

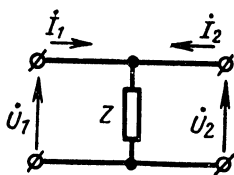


Рис. 7-37. Параллельное комплексное сопротивление.

Сравнивая их с уравнениями (7-3-13), получаем:

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{array} \right\|; \quad (7-3-22)$$

и согласно табл. 7-1

$$\|Z\| = \left\| \begin{array}{cc} Z & Z \\ Z & Z \end{array} \right\|; \quad (7-3-22a)$$

$$\|H\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{Z} \end{array} \right\|. \quad (7-3-22б)$$

Матрицы $\|Y\|$ для такой схемы не существует.

Трансформатор служит для преобразования электрической энергии одного напряжения в электрическую энергию другого напряжения; состоит трансформатор из двух катушек, связанных магнитным полем и неподвижных друг относительно друга. Связь между катушками характеризуется коэффициентом взаимной индукции M .

В технике высоких частот и измерительной технике часто применяют трансформаторы без магнитного сер-

дечника (воздушные трансформаторы). Такие трансформаторы относят к линейным устройствам, так как L и M у них постоянны. Обмотку трансформатора, к которой подключен источник энергии, называют первичной, а обмотку, к которой подключена нагрузка — вторичной.

При встречном включении первичной и вторичной обмоток, т. е. когда направления их витков противоположны, поворота фазы не происходит: напряжение на вторичной обмотке совпадает по фазе с напряжением на первичной. Если пренебречь межвитковой и межобмоточной емкостью, то эквивалентная схема трансформатора будет иметь вид, приведенный на рис. 7-38.

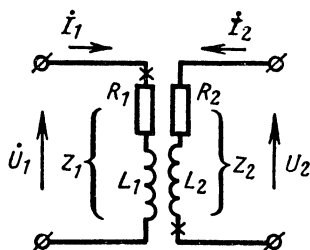


Рис. 7-38. Трансформатор со встречным включением обмоток.

Пусть при разомкнутой вторичной обмотке в первичной протекает ток I'_1 . Составим отношение э. д. с., индуцированной во вторичной обмотке [см. формулу (6-3-3)] и равной $\omega M I'_1$, к напряжению на индуктивности L_1 первичной обмотки, равному $\omega L_1 I'_1$.

$$k_1 = \frac{\omega M I'_1}{\omega L_1 I'_1} = \frac{M}{L_1}.$$

Величина k_1 называется степенью связи первичной обмотки со вторичной.

Если генератор подключить к вторичной обмотке трансформатора, а первичную разомкнуть, то степень связи вторичной обмотки с первичной $k_2 = M/L_2$. Если в обеих обмотках токи протекают одновременно, то наблюдается их взаимное влияние; оно тем сильнее, чем больше произведение $k_1 k_2$.

Коэффициент связи между обмотками

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (7-3-23)$$

Если магнитный поток каждой из обмоток полностью охватывает витки другой обмотки, то $k=1$ и

$$M = \sqrt{L_1 L_2}; \quad (7-3-24)$$

если же часть потока рассеивается, то

$$M = \sqrt{L_1 L_2 (1 - k_{\text{расс}})}; \quad (7-3-25)$$

здесь $k_{\text{расс}}$ — коэффициент рассеяния [см. формулу (5-3-19)].

Исходя из физического смысла элементов матриц сопротивления (7-3-9а) и (7-3-9б), находим матрицу сопротивления трансформатора со встречным включением обмоток:

$$\|Z\| = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_2 \end{vmatrix}; \quad (7-3-26)$$

здесь

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1$$

— комплексное сопротивление первичной обмотки при разомкнутой вторичной;

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2$$

— комплексное сопротивление вторичной обмотки при разомкнутой первичной;

$$Z_{12} = j\omega M$$

— сопротивление взаимной индукции обмоток.

С помощью табл. 7-1 получим:

$$\|Y\| = \frac{1}{|Z|} \begin{vmatrix} Z_2 & -Z_{12} \\ -Z_{12} & Z_1 \end{vmatrix}; \quad (7-3-26а)$$

$$\|H\| = \frac{1}{Z_2} \begin{vmatrix} |Z| & Z_{12} \\ -Z_{12} & 1 \end{vmatrix}; \quad (7-3-26б)$$

$$\|A\| = \frac{1}{Z_{12}} \begin{vmatrix} Z_1 & |Z| \\ 1 & Z_2 \end{vmatrix}. \quad (7-3-26в)$$

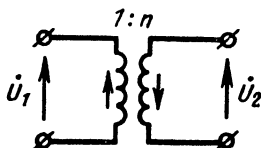
Трансформатор с согласованным включением обмоток (принципиальная схема его соответствует схеме трансформатора с встречным включением обмоток, но с перекрещенными выводами одной из них) характеризуется матрицей $\|A\|$, определяемой выражением (7-3-26в), но с противоположным знаком, так как она равна произведению

$$\|A\|_{\text{встреч}} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Идеальным трансформатором называется трансформатор без потерь и магнитного рассеяния, обмотки которого обладают весьма большими индуктивностями. Схема такого трансформатора с встречным включением обмоток приведена на рис. 7-39. Идеальный трансформатор характеризуется одним параметром

$$n = \frac{U_2}{U_1}, \quad (7-3-27)$$

Рис. 7-39. Идеальный трансформатор со встречным включением обмоток.



который называется коэффициентом трансформации. Так как потери и магнитное рассеяние отсутствуют, то

$$Z_1 = j\omega L_1, \quad Z_2 = j\omega L_2 \text{ и } M = \sqrt{L_1 L_2}.$$

При этом

$$n = \frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}; \quad Z_{12} = j\omega \sqrt{L_1 L_2};$$

$$\frac{Z_1}{Z_{12}} = \frac{1}{n}, \quad \frac{Z_2}{Z_{12}} = n; \quad |Z| = 0;$$

вследствие большой индуктивности обмоток $\frac{1}{Z_{12}} = 0$.

Подставляя эти значения в матрицу (7-3-26в), получаем:

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}. \quad (7-3-28)$$

Согласно табл. 7-1

$$\|H\| = \begin{vmatrix} 0 & 1/n \\ -1/n & 0 \end{vmatrix}. \quad (7-3-28a)$$

Матриц $\|Z\|$ и $\|Y\|$ для такого трансформатора не существует.

Матрицу передачи идеального трансформатора с согласованным соединением обмоток можно определить как произведение матриц (7-3-28) и (7-3-20а).

$$\begin{vmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{n} & 0 \\ 0 & -n \end{vmatrix}. \quad (7-3-28б)$$

Матрицы простейших четырехполюсников сведены в табл. 7-2.

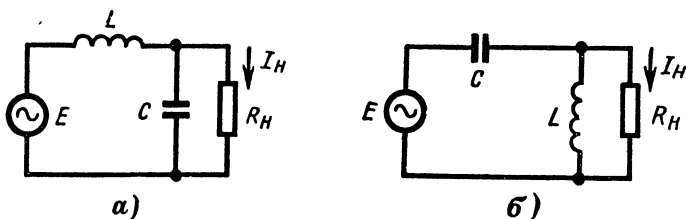




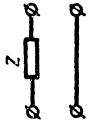
Рис. 7-40. Схемы нагруженных контуров.

Матрицы любого другого четырехполюсника со сложной схемой находятся как суммы или произведения матриц простейших четырехполюсников, соединение которых эквивалентно данному четырехполюснику. В табл. 7-3 приведены матрицы Г-, П- и Т-образных и мостовых четырехполюсников.

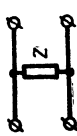


В качестве примера воспользуемся найденными матрицами для определения коэффициента передачи $K(j\omega)$, имеющих практическое применение в радиоэлектронике пассивных четырехполюсников, схемы которых приведены на рис. 7-40. Нагрузка в виде резистора R_H в одном случае подключена параллельно конденсатору, а в другом — параллельно катушке индуктивности. В обобщенном виде эти схемы представлены на рис. 7-41 в виде каскадного соединения двух четырехполюсников, причем в первом случае $Z_1 = j\omega L$, $Z_2 = -j/\omega C$, $Z_3 = Z_H$, а во втором $Z_1 = -j/\omega C$, $Z_2 = j\omega L$, $Z_3 = Z_H$. Согласно формуле (7-3-136) коэффициент передачи $K(j\omega) = 1/A_{11}$, где A_{11} — элемент матрицы передачи каскадного соединения двух четырехполюсников, представляющих изучаемую схему, а именно: Г-образный четырехполюсник со входом типа Т (табл. 7-3, схема 1) и четырехполюсник, представляющий параллельное комплексное сопротивление (табл.

Таблица 7-2

Матрицы простейших четырехполюсников

№ схем	Схема	Наименование схемы	$\ A \ $	$\ Z \ $	$\ Y \ $	$\ H \ $
1		Прямое соединение	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	—	—	—
2		Перекрешенное соединение	$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	—	—	—
3		Последовательное включение сопротивления	$\begin{vmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	—	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ Z & -Z \end{vmatrix}$	—

Продолжение табл. 7-2

№ схемы	Схема	Наименование схемы	$\ A \ $	$\ Z \ $	$\ Y \ $	$\ H \ $
4		Параллельное включение сопротивления	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -Z & \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{vmatrix}$	—	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -Z & \end{vmatrix}$
5		Трансформатор с встречным включением обмоток	$\begin{vmatrix} 1 & Z_1 Z_1 & Z_2 - Z_{12}^2 \\ -Z_{12} & 1 & Z_2 \\ Z_{12} & Z_2 & Z_2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & Z_2 - Z_{12} \\ -Z_{12} & Z_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & Z_{13} \\ -Z_{12} & 1 \end{vmatrix}$
6		Идеальный трансформатор с встречным включением обмоток	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ n & n \\ 0 & \end{vmatrix}$	—	—	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -n & 0 \end{vmatrix}$

7-2, схема 4). Так как матрица каскадно соединенных четырехполюсников равна произведению их матриц передачи, то из выражения

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{array} \right\|,$$

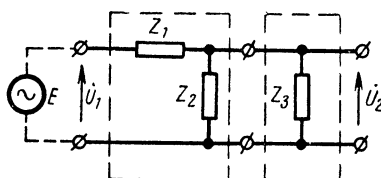


Рис. 7-41. Обобщенная схема, состоящая из каскадного соединения двух четырехполюсников.

составленного на основании упомянутых таблиц, находим:

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1}{Z_3};$$

следовательно,

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1}{Z_3}}. \quad (7-3-29)$$

Если нагрузка R_H присоединена параллельно конденсатору (рис. 7-40, а), то

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_2} &= -\omega^2 LC = -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2; \\ \frac{Z_1}{Z_3} &= \frac{j\omega L}{R_H} = j \frac{Z_0}{R_H} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, при таком подключении нагрузки

$$\left. \begin{aligned} |K(j\omega)| &= \frac{R_H}{Z_0} \frac{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_H}{Z_0}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}; \\ \varphi &= + \arctg \frac{Z_0/R_H}{\omega_0/\omega - \omega/\omega_0}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-30)$$

Матрицы основных

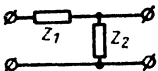
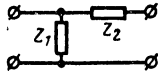
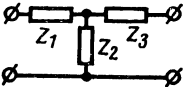
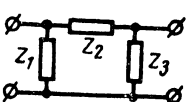
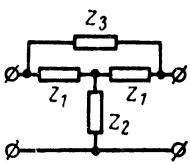
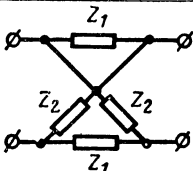
Шифр схемы	Схема четырехполюсника	Наименование четырёх- полюсника	$\ A \ $
1		Г-образный с входом типа Т	$\left\ \begin{array}{c} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} \end{array} \right\ $
2		Г-образный с входом типа П	$\left\ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{Z_1} \end{array} \right\ $
3		Т-образный несиммет- ричный	$\left\ \begin{array}{c} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} \end{array} \right\ $
4		П-образный несиммет- ричный	$\left\ \begin{array}{c} 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3} + \frac{Z_2}{Z_1 Z_3} \end{array} \right\ $
5		Перекрытый симметрич- ный	$\frac{1}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_3)} \times \left\ \begin{array}{c} Z_1(Z_1 + Z_3) + Z_2(2Z_1 + Z_3) \\ 2Z_1 + Z_3 \end{array} \right\ $
6		Симметрич- ный мо- стовой	$\frac{1}{Z_2 - Z_1} \left\ \begin{array}{c} Z_1 + Z_2 \\ 2 \end{array} \right\ $

Таблица 7-3

типов четырехполюсников

	$\parallel z \parallel$
$\begin{array}{c} Z_1 \\ 1 \end{array} \parallel$	$\parallel \begin{array}{cc} Z_2+Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{array} \parallel$
$\begin{array}{c} Z_2 \\ 1+\frac{Z_2}{Z_1} \end{array} \parallel$	$\parallel \begin{array}{cc} Z_1 & Z_1 \\ Z_1 & Z_1+Z_2 \end{array} \parallel$
$\begin{array}{c} Z_1+Z_3+\frac{Z_1Z_3}{Z_2} \\ 1+\frac{Z_3}{Z_2} \end{array} \parallel$	$\parallel \begin{array}{cc} Z_1+Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2+Z_3 \end{array} \parallel$
$\begin{array}{c} Z_2 \\ 1+\frac{Z_2}{Z_1} \end{array} \parallel$	$\frac{Z_1}{Z_1+Z_2+Z_3} \parallel \begin{array}{cc} Z_3Z_2+Z_3 & Z_3 \\ Z_3(Z_1+Z_2) & Z_1 \end{array} \parallel$
$\begin{array}{c} Z_1Z_3(Z_1+2Z_2) \\ Z_1(Z_1+Z_3)+Z_2(2Z_1+Z_3) \end{array} \parallel$	$\frac{1}{2Z_1+Z_3} \parallel \begin{array}{cc} Z_1(Z_1+Z_3)+Z_2(2Z_1+Z_3) & Z_1^2+Z_2(2Z_1+Z_3) \\ Z_1^2+Z_2(2Z_1+Z_3) & Z_1(Z_1+Z_3)+Z_2(2Z_1+Z_3) \end{array} \parallel$
$\begin{array}{c} 2Z_1 \ Z_2 \\ Z_1+Z_2 \end{array} \parallel$	$\frac{1}{2} \parallel \begin{array}{cc} Z_1+Z_2 & Z_2-Z_1 \\ Z_2-Z_1 & Z_1+Z_2 \end{array} \parallel$

Шифр схемы	$\ \gamma \ $
1	$\frac{1}{Z_1} \left\ \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & \frac{Z_1+Z_2}{Z_2} \end{array} \right\ $
2	$\frac{1}{Z_2} \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1} & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right\ $
3	$\frac{1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} \left\ \begin{array}{cc} Z_2 + Z_3 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{array} \right\ $
4	$\frac{1}{Z_2} \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1} & -1 \\ -1 & \frac{Z_2+Z_3}{Z_3} \end{array} \right\ $
5	$\frac{1}{Z_1 Z_3 (Z_1 + 2Z_2)} \times$ $\times \left\ \begin{array}{cc} Z_1 (Z_1 + Z_3) + Z_2 (2Z_1 + Z_3) & -[Z_1^2 + Z_2 (2Z_1 + Z_3)] \\ -[Z_1^2 + Z_2 (2Z_1 + Z_3)] & Z_1 (Z_1 + Z_3) + Z_2 (2Z_1 + Z_3) \end{array} \right\ $
6	$\frac{1}{2Z_1 Z_2} \left\ \begin{array}{cc} Z_1 + Z_2 & Z_1 - Z_2 \\ Z_1 - Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{array} \right\ $

$$\| H \|$$

$$\left\| \begin{array}{cc} Z_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z_2} \end{array} \right\|$$

$$\frac{1}{Z_1+Z_2} \left\| \begin{array}{cc} Z_1 Z_2 & Z_1 \\ -Z_1 & 1 \end{array} \right\|$$

$$\frac{1}{Z_2+Z_3} \left\| \begin{array}{cc} Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 & Z_2 \\ -Z_2 & 1 \end{array} \right\|$$

$$\frac{Z_1}{Z_1+Z_2} \left\| \begin{array}{cc} Z_2 & 1 \\ -1 & \frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_1 Z_3} \end{array} \right\|$$

$$\frac{1}{Z_3(Z_1+Z_4)+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)} \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{cc} Z_4(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3) & Z_1 Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4) \\ -[Z_1 Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)] & Z_1 + Z_3 + Z_4 \end{array} \right\|$$

$$\frac{1}{Z_1+Z_2} \left\| \begin{array}{cc} 2Z_1 Z_2 & Z_2 - Z_1 \\ Z_1 - Z_2 & 2 \end{array} \right\|$$

Максимальное значение модуля коэффициента передачи

$$|K(j\omega)|_{\max} = \frac{R_H}{Z_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{Z_0}{R_H} \right)^2}} \quad (7-3-31)$$

можно найти из уравнения

$$\frac{d}{d\omega} |K(j\omega)| = 0;$$

это значение имеет место при частоте

$$\omega'_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{Z_0}{R_H} \right)^2}, \quad (7-3-32)$$

если $\frac{1}{2} \left(\frac{Z_0}{R_H} \right)^2 < 1$ или $Z_0 < \sqrt{2} R_H$.

В другом случае, если нагрузка R_H подключена параллельно катушке индуктивности (рис. 7-40, б), то в выражении (7-3-29)

$$\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{1}{\omega^2 LC} = -\left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2;$$

$$\frac{Z_1}{Z_3} = -j \frac{1}{\omega CR_H} = -j \frac{Z_0}{R_H} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} |K(j\omega)| &= \frac{R_H}{Z_0} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_H}{Z_0} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}; \\ \varphi &= -\arctg \frac{Z_0/R_H}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-30a)$$

Максимальное значение $|K(j\omega)|_{\max}$ и в этом случае определяется формулой (7-3-31), но имеет место при частоте

$$\omega''_r = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{Z_0}{R_H} \right)^2}}. \quad (7-3-32a)$$

При частоте $\omega = \omega_0$ модуль коэффициента передачи обеих схем одинаков и равен:

$$|K(j\omega_0)| = \frac{R_H}{Z_0}, \quad (7-3-33)$$

но аргументы различны: в первой схеме $\varphi = +\pi/2$, во второй $\varphi = -\pi/2$.

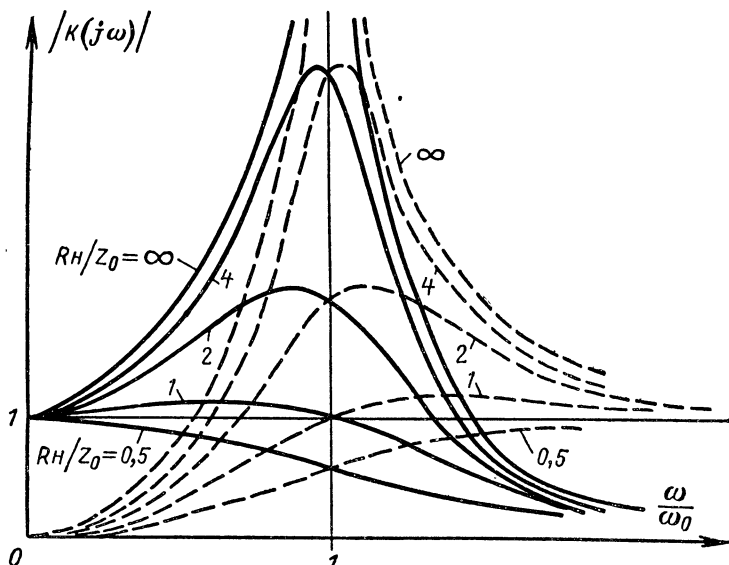


Рис. 7-42. Кривые зависимости модуля коэффициента передачи нагруженного контура (сплошные линии относятся к схеме по рис. 7-40, а, пунктирные — к схеме по рис. 7-40, б).

Подчеркнем, что при частоте $\omega = \omega_0$ величина тока в нагрузке от ее сопротивления R_H не зависит и определяется выражением

$$I_H = |K(j\omega)| \frac{E}{R_H} = \frac{E}{Z_0}. \quad (7-3-34)$$

Это объясняется тем, что при $\omega = \omega_0$ имеет место резонанс напряжения в цепи, состоящей из последовательного соединения L и C .

На рис. 7-42 даны кривые $|K(j\omega)|$ при различных отношениях R_H/Z_0 . Как следует из формул (7-3-30) и

(7-3-30а), при большой величине этого отношения напряжения на конденсаторе и индуктивности могут значительно превышать э. д. с.

Характеристическими параметрами четырехполюсника являются: постоянные передачи (в случае невзаимного четырехполюсника они различны для двух возможных направлений передачи, характеристические (волновые) сопротивления со стороны входных и выходных зажимов и коэффициент трансформации.

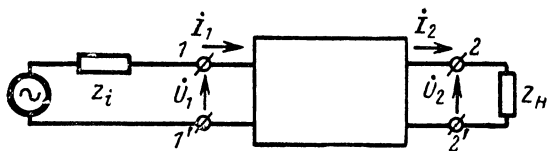


Рис. 7-43. Соединение четырехполюсника с генератором э. д. с. и нагрузкой.

Рассмотрим четырехполюсник, к входным зажимам которого подключен генератор э. д. с. с внутренним комплексным сопротивлением Z_i , а к выходным — нагрузка Z_n (рис. 7-43). Зададимся направлением токов, показанным на рисунке; тогда знаки вторых слагаемых в правых частях уравнений (7-3-13) изменятся и эти уравнения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-35)$$

Входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов $1-1'$ определится выражением

$$Z_{\text{вх}1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2}.$$

Так как $Z_n = \dot{U}_2/\dot{I}_2$, то

$$Z_{\text{вх}1} = \frac{A_{11}Z_n + A_{12}}{A_{21}Z_n + A_{22}}. \quad (7-3-36)$$

Входное сопротивление со стороны зажимов $2-2'$ найдем, подключив источник к этим зажимам, при передаче

энергии в обратном направлении. При этом уравнения (7-3-35) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}I_2; \\ -\dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}I_2. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-35a)$$

Так как $Z_i = \dot{U}_i / \dot{I}_i$, следовательно,

$$Z_{\text{вх}2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{A_{22}\dot{U}_1 + A_{12}I_1}{A_{11}\dot{I}_1 + A_{21}\dot{U}_1} = \frac{A_{22}Z_i + A_{12}}{A_{21}Z_i + A_{11}}. \quad (7-3-37)$$

Если $Z_{\text{вх}1} = Z_i$ и $Z_{\text{вх}2} = Z_{\text{н}}$, то, обозначив $Z_{\text{вх}1} = Z_i = Z_{01}$ и $Z_{\text{вх}2} = Z_{\text{н}} = Z_{02}$, согласно формулам (7-3-36) и (7-3-37) получим:

$$\begin{aligned} Z_{01} &= \frac{A_{11}Z_{02} + A_{12}}{A_{21}Z_{02} + A_{22}}; \\ Z_{02} &= \frac{A_{22}Z_{01} + A_{12}}{A_{21}Z_{01} + A_{11}}, \end{aligned}$$

или

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; \quad (7-3-38)$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{A_{12}A_{22}}{A_{11}A_{21}}}. \quad (7-3-39)$$

Сопротивления Z_{01} и Z_{02} называются характеристическими (волновыми) сопротивлениями четырехполюсника соответственно со стороны входной и выходной пары зажимов. Соотношения (7-3-38) и (7-3-39) верны как для взаимного, так и невзаимного четырехполюсника.

Условия, при которых четырехполюсник предполагается нагруженным со стороны входа и выхода на соответствующие характеристические сопротивления, называют условиями согласованной нагрузки или согласованного включения.

При разомкнутых зажимах 2—2' ($Z_{\text{н}} = \infty$) согласно формуле (7-3-36) сопротивление холостого хода со стороны зажимов 1—1'

$$Z_{1\text{х.х}} = Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}}, \quad (7-3-40)$$

а сопротивление короткого замыкания ($Z_{\text{н}} = 0$)

$$Z_{1\text{к.з}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}. \quad (7-3-40a)$$

Отсюда согласно соотношению (7-3-38)

$$Z_{01} = \sqrt{Z_{1x.x} Z_{1k.3}}, \quad (7-3-38a)$$

т. е. входное характеристическое сопротивление равно среднему геометрическому из входных сопротивлений при коротком замыкании и холостом ходе.

Аналогично согласно соотношению (7-3-37)

$$\left. \begin{aligned} Z_{2x.x} = Z_{22} &= \frac{A_{22}}{A_{12}}; \\ Z_{2k.3} &= \frac{A_{12}}{A_{11}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-41)$$

Отсюда согласно формуле (7-3-39)

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{2x.x} Z_{2k.3}}. \quad (7-3-39a)$$

Таким образом, можно определить экспериментально входное и выходное характеристические сопротивления.

Четырехполюсник, нагруженный на сопротивление, равное характеристическому для данной пары зажимов, имеет входное сопротивление со стороны другой пары, равное своему характеристическому, т. е. если $Z_H = Z_{02}$, то $Z_{вх1} = Z_{01}$ и, наоборот, если $Z_i = Z_{01}$, то $Z_{вх2} = Z_{02}$. Действительно, согласно (7-3-36) при $Z_H = Z_{02}$ имеем:

$$Z_{вх1} = \frac{A_{11}Z_{02} + A_{12}}{A_{21}Z_{02} + A_{22}} = Z_{01} \frac{A_{11}Z_{02} + A_{12}}{A_{21}Z_{01}Z_{02} + A_{22}Z_{01}}.$$

Подставляя соотношения (7-3-38) и (7-3-39), получаем: $Z_{вх1} = Z_{01}$.

Если четырехполюсник нагрузить на сопротивление Z_{01} со стороны зажимов 1—1', то аналогично можно получить со стороны зажимов 2—2' величину входного сопротивления, равную Z_{02} . Согласно соотношениям (7-3-38) и (7-3-39) величина

$$\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = n = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}}$$

и представляет собой коэффициент трансформации.

Согласно этим же соотношениям (7-3-38) и (7-3-39) при согласованном включении

$$Z_{вх1} = Z_{01} = n^2 Z_{02} = n^2 Z_{и},$$

т. е. согласованный четырехполюсник является трансформатором сопротивления.

Если четырехполюсник симметричный, то $A_{11}=A_{22}$ [см. выражение (7-3-146)] и согласно соотношениям (7-3-38) и (7-3-39)

$$Z_{01}=Z_{02}= \left. \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \right\} \quad (7-3-42)$$

$$n=1;$$

следовательно, согласованный симметричный четырехполюсник не трансформирует сопротивления; в этом случае $Z_{вх}=Z_0=Z_{н.}$

При согласованном каскадном соединении четырехполюсников сопротивление генератора равно входному характеристическому сопротивлению первого четырехполюсника, сопротивление нагрузки — выходному характеристическому сопротивлению последнего четырехполюсника, а характеристическое выходное сопротивление каждого предыдущего четырехполюсника равно входному характеристическому сопротивлению каждого последующего.

При согласованном включении передачу четырехполюсника удобно характеризовать постоянной передачи четырехполюсника, которую по аналогии с постоянной распространения для направляющих систем обозначим k_0 . В общем случае постоянная распространения является безразмерной комплексной величиной

$$k_0=\beta - j\alpha,$$

где α — постоянная затухания, характеризующая степень изменения амплитуды тока или напряжения при прохождении через четырехполюсник;

β — фазовая постоянная, характеризующая сдвиг фазы выходного тока или напряжения по отношению к входному.

Найдем отношение входного напряжения к выходному и соответствующее отношение токов при согласованном включении. Из соотношения (7-3-35) получим:

$$\dot{U}_1 = \left(A_{11} + A_{12} \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right) \dot{U}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \left(A_{21} \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} + A_{22} \right) \dot{I}_2.$$

Так как $\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_{11} = Z_{02}$, то

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_{02}}; \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = A_{21}Z_{02} + A_{22};$$

с учетом соотношения (7-3-39),

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}} (\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}})^{-1};$$

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} (\sqrt{A_{21}A_{12}} + \sqrt{A_{11}A_{22}})^{-1}.$$

Рассматривая передачу в обратном направлении, согласно уравнениям (7-3-35а) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \left(A_{11} - \frac{A_{12}}{Z_{02}} \right) \dot{U}_2; \\ \dot{I}_1 &= (A_{21}Z_{02} - A_{22}) \dot{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (7-3-43)$$

а с учетом соотношения (7-3-39)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} &= \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} (\sqrt{A_{11}A_{22}} - \sqrt{A_{12}A_{21}}); \\ \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} &= \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}} (\sqrt{A_{11}A_{22}} - \sqrt{A_{12}A_{21}}). \end{aligned} \right\} \quad (7-3-44)$$

Постоянную распространения в прямом направлении \dot{k}_{0+} целесообразно выразить в следующем виде:

$$e^{-j\dot{k}_{0+}} = (\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}})^{-1}$$

или

$$e^{j\dot{k}_{0+}} = (\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}), \quad (7-3-45)$$

а постоянную распространения в обратном направлении \dot{k}_{0-} в виде

$$e^{-j\dot{k}_{0-}} = \sqrt{A_{11}A_{22}} - \sqrt{A_{12}A_{21}}. \quad (7-3-46)$$

Отсюда

$$\dot{k}_{0+} = -j \ln (\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}});$$

$$\dot{k}_{0-} = j \ln (\sqrt{A_{11}A_{22}} - \sqrt{A_{12}A_{21}}) =$$

$$= -j \ln \frac{\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}}{|A|}.$$

Разность между постоянными распространения в прямом и обратном направлении

$$\dot{k}_{0+} - \dot{k}_{0-} = -j \ln (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) = -j \ln |A|.$$

Таким образом, различие между постоянными распространения в прямом и обратном направлениях определяется логарифмом определителя матрицы передачи.

Если четырехполюсник взаимен, то согласно выражению (7-3-14а)

$$|A| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1;$$

в данном случае постоянные распространения в прямом и обратном направлениях равны и определяются выражением

$$\dot{k}_{0+} = \dot{k}_{0-} = \dot{k}_0 = -j \ln (\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}})$$

или

$$\dot{k}_0 = -j \ln (\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{11}A_{22} - 1}).$$

Определяя сумму и разность соотношений (7-3-45) и (7-3-46), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos \dot{k}_0 &= \sqrt{A_{11}A_{22}}; \\ \sin \dot{k}_0 &= -j \sqrt{A_{12}A_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (7-3-47)$$

или

$$\operatorname{tg} \dot{k}_0 = -j \sqrt{\frac{A_{12}A_{21}}{A_{11}A_{22}}}.$$

С учетом формул (7-3-40) и (7-3-40а) получим:

$$\operatorname{tg} \dot{k}_0 = -j \sqrt{\frac{Z_{1к.з}}{Z_{1х.х}}}$$

или с учетом выражений (7-3-41)

$$\operatorname{tg} \dot{k}_0 = -j \sqrt{\frac{Z_{2к.з}}{Z_{2х.х}}}.$$

Напряжение и ток на входе взаимного четырехполюсника на основе уравнений (7-3-35) с учетом соотношений

(7-3-47) можно выразить через ток и напряжение на выходе следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} \left(\dot{U}_2 \cos \dot{k}_0 + j \sqrt{\frac{A_{12}A_{22}}{A_{11}A_{21}}} \dot{I}_2 \sin \dot{k}_0 \right), \\ \dot{I}_1 &= \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}} \left(j \dot{U}_2 \sin \dot{k}_0 + \sqrt{\frac{A_{11}A_{21}}{A_{12}A_{22}}} \dot{I}_2 \cos \dot{k}_0 \right). \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (7-3-38) и (7-3-39), последние два уравнения можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \left(\dot{U}_2 \cos \dot{k}_0 + j \dot{I}_2 Z_{02} \sin \dot{k}_0 \right); \\ \dot{I}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \left(\dot{I}_2 \cos \dot{k}_0 + j \frac{\dot{U}_2}{Z_{02}} \sin \dot{k}_0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (7-3-48)$$

В случае взаимного и симметричного четырехполюсника ($A_{11}=A_{22}$, $Z_{01}=Z_{02}$) согласно соотношениям (7-3-47)

$$\left. \begin{aligned} \cos \dot{k}_0 &= A_{11}; \\ \sin \dot{k}_0 &= -j \sqrt{A_{11}^2 - 1} = -\sqrt{1 - A_{11}^2} = \\ &= -\sqrt{1 - A_{22}^2} \end{aligned} \right\} \quad (7-3-47a)$$

и уравнения (7-3-48) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \cos \dot{k}_0 + j \dot{I}_2 Z_{02} \sin \dot{k}_0; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \cos \dot{k}_0 + j \frac{\dot{U}_2}{Z_{02}} \sin \dot{k}_0. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-49)$$

В случае симметричного четырехполюсника, как следует из выражений (7-3-44) и (7-3-46), коэффициент передачи по напряжению $K(j\omega)$ равен коэффициенту передачи по току:

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = e^{-j\dot{k}_0}$$

или

$$\dot{k}_0 = j \ln K(j\omega) = j \ln \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = j \ln \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1},$$

т. е. постоянная передачи взаимного симметричного четырехполюсника при согласованном включении опреде-

ляется как натуральный логарифм коэффициента передачи по току или напряжению. Так как

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{-j\varphi} = e^{-\alpha} e^{-j\beta}, \quad (7-3-50)$$

то

$$\left. \begin{aligned} |K(j\omega)| &= e^{-\alpha}, \\ \varphi &= \beta. \end{aligned} \right\} \quad (7-3-51)$$

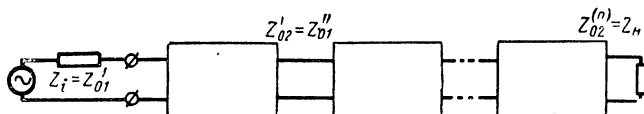


Рис. 7-44. Согласованное включение цепочки четырехполусников.

Следовательно, требования, которые накладываются на коэффициент передачи по напряжению, можно перевести на требования, накладываемые на постоянную передачи k_0 .

Постоянная передачи цепочки n каскадно соединенных симметричных или несимметричных четырехполусников при согласованном включении (рис. 7-44) определяется соотношением

$$K_0 = \sum_{i=1}^n k_{0i}, \quad (7-3-52)$$

т. е. постоянная передачи цепочки равна сумме постоянных передачи составляющих цепочку четырехполусников. Действительно, составляя отношение напряжения на выходе к напряжению на входе цепочки, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}_{n+1}}{\dot{U}_1} &= e^{-jk_0} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_2} \dots \frac{\dot{U}_n}{\dot{U}_{n-1}} \frac{\dot{U}_{n+1}}{\dot{U}_n} = \\ &= e^{-jk_{01}} e^{-jk_{02}} \dots e^{-jk_{0n}}. \end{aligned}$$

Если четырехполусники одинаковы, то

$$\dot{K}_0 = n k_0 = n\beta - jn\alpha, \quad (7-3-52a)$$

т. е. постоянная затухания и сдвиг фаз цепочки, состоящей из n одинаковых четырехполусников, в n раз больше, чем у одного четырехполусника.

Топологический анализ цепей — это связь между электрическими свойствами и структурой, или «топологией», цепей.

Электрические свойства цепи полностью определяются параметрами и схемой соединения ее элементов. При топологическом исследовании каждую ветвь цепи заменяют отрезком, направление которого совпадает с направ-

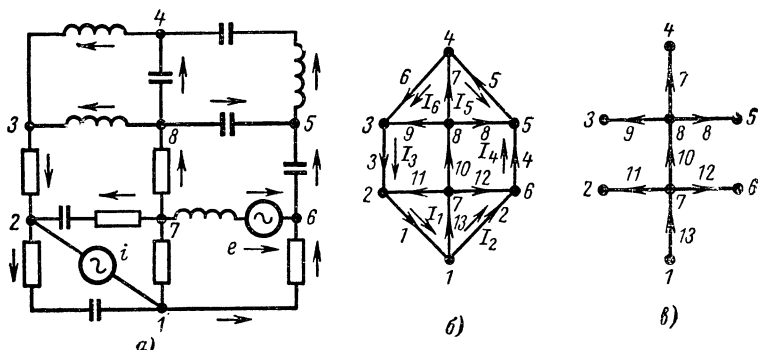


Рис. 7-45. Электрическая схема (а), ее ориентированный граф (б) и дерево (в).

лением тока. При этом идеальный источник тока заменяют разомкнутой ветвью, а источник напряжения — замкнутой. Полученная структура называется **линейным графом**. Так, например, схеме, приведенной на рис. 7-45, а, соответствует граф, показанный на рис. 7-45, б.

В теории графов применяются следующие термины:

Дерево — совокупность разомкнутых ветвей, связывающих все узлы, но не образующих ни одного контура (рис. 7-45, в).

Ветвь дерева — ветвь схемы, входящая в состав дерева. Если схема имеет n узлов, то дерево содержит $n-1$ ветвей. **Главная ветвь дерева** — ветвь, не входящая в дерево и образующая замкнутый контур с его ветвями.

Путь — непрерывная, непересекающаяся последовательность ветвей (в указанном направлении), соединяющая два заданных узла. Узлы, через которые проходит путь, встречаются не более одного раза.

Замкнутая система — совокупность ветвей, образующих замкнутый контур. Замкнутая система содер-

жит одну главную ветвь, остальные ветви являются ветвями дерева (рис. 7-46).

Отсекающая система — совокупность ветвей, при удалении которых граф разделяется на две несвязанные части. Отдельная часть может быть и узлом. Отсекающая система содержит одну ветвь дерева, остальные ветви являются главными его ветвями (рис. 7-47).

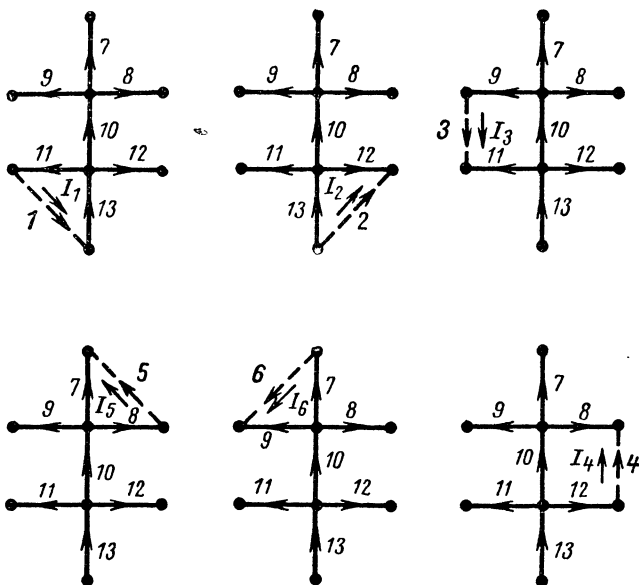


Рис. 7-46. Замкнутые системы электрической схемы, приведенной на рис. 7-45, а.

Для описания графа цепи применяют матрицы нескольких видов; наиболее важные из них — матрицы замкнутых и отсекающих систем. Матрица замкнутых систем составляется из чисел 0, $+1$ и -1 . Строки этой матрицы соответствуют выбранным независимым контурам, а столбцы — ветвям схемы. Элемент матрицы m_{ik} равен ± 1 , если i -й контур содержит k -ую ветвь; при этом плюс ставят в случае, если направление обхода по контуру совпадает с направлением ветви, а минус — если направления не совпадают. Если i -й контур не содержит k -й ветви, то элемент m_{ik} равен нулю. Матрица замкнутых систем называется также матрицей «контур — ветвь» или M -матрицей. При составлении матрицы контуры пронумеруются.

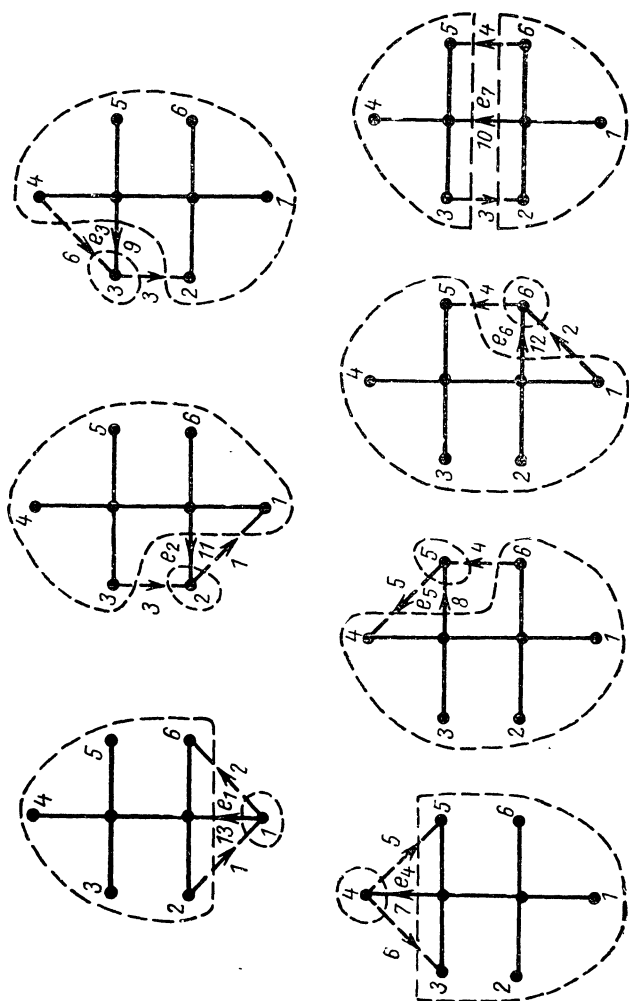


Рис. 7-47. Отсекающие системы электрической схемы, изображенной на рис. 7-45, а.

меровывают так, что их индексы соответствуют индексам главных ветвей. Направления контурных токов выбирают в соответствии с направлениями токов в главных ветвях.

M -матрица графа, показанного на рис. 7-45, б, дана в табл. 7-4.

Таблица 7-4

M -матрица для графа, показанного на рис. 7-45, б

Контурные токи	Токи в ветвях												
	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_8	i_9	i_{10}	i_{11}	i_{12}	i_{13}
I_1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	+1
I_2	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
I_3	0	0	+1	0	0	0	0	0	+1	+1	-1	0	0
I_4	0	0	0	+1	0	0	0	-1	0	-1	0	+1	0
I_5	0	0	0	0	+1	0	-1	+1	0	0	0	0	0
I_6	0	0	0	0	0	+1	+1	0	-1	0	0	0	0

Токи в ветвях определяют через контурные токи путем чтения матрицы по столбцам:

$$i_1 = I_1; \quad i_6 = I_6; \quad i_{11} = I_1 - I_3;$$

$$i_2 = I_2; \quad i_7 = I_6 - I_5; \quad i_{12} = I_4 - I_2;$$

$$i_3 = I_3; \quad i_8 = I_5 - I_4; \quad i_{13} = I_1 - I_2.$$

$$i_4 = I_4; \quad i_9 = I_3 - I_6;$$

$$i_5 = I_5; \quad i_{10} = I_3 - I_4;$$

Связь между токами в ветвях и контурными токами может быть выражена следующим матричным уравнением:

$$\|i_n\| = \|M^t\| \cdot \|I_k\|,$$

где $\|M^t\|$ — транспонированная матрица $\|M\|$ [см. формулу (Д-1-1а)],

$$\|M\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\|i_n\| = \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{13} \end{Bmatrix}, \quad \|I_k\| = \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_6 \end{Bmatrix}$$

Матрица отсекающих систем также составляется из чисел 0, +1 и —1, но строки этой матрицы соответствуют узлам, а столбцы — ветвям. Элемент матрицы q_{ik} равен ± 1 , если к i -му узлу подсоединена k -я ветвь; при этом если стрелка в ветви направлена к узлу, то $q_{ik}=1$, а если стрелка направлена от узла, то $q_{ik}=-1$. Элемент $q_{ik}=0$, если k -я ветвь не присоединена к узлу. Такая матрица называется матрицей «узел—ветвь» или Q -матрицей. Для электрической цепи, показанной на рис. 7-45, а, Q -матрица дана в табл. 7-5.

Таблица 7-5

Q -матрица для электрической цепи по схеме на рис. 7-45, а

Разность потенциалов узловых пар	Напряжения на зажимах ветвей												
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}
e_1	-1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1
e_2	-1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
e_3	0	0	-1	0	0	+1	0	0	+1	0	0	0	0
e_4	0	0	0	0	-1	-1	+1	0	0	0	0	0	0
e_5	0	0	0	+1	-1	0	0	+1	0	0	0	0	0
e_6	0	+1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	+1	0
e_7	0	0	-1	+1	0	0	0	0	0	+1	0	0	0

Соотношения между напряжениями на зажимах ветвей и разностями потенциалов узловых пар находят путем чтения матрицы по столбцам.

$$u_1 = -(e_1 + e_2); \quad u_6 = e_3 - e_4; \quad u_{11} = e_2;$$

$$u_2 = e_1 + e_6; \quad u_7 = e_4; \quad u_{12} = e_6;$$

$$u_3 = e_2 - e_3 - e_7; \quad u_8 = e_5; \quad u_{13} = e_1.$$

$$u_4 = e_5 - e_6 + e_7; \quad u_9 = e_3;$$

$$u_5 = -(e_4 + e_5); \quad u_{10} = e_7;$$

Эти соотношения могут быть выражены с помощью матричного уравнения вида

$$\|u_n\| = \|Q'\| \|e_m\|,$$

где $\|Q'\|$ — транспонированная матрица $\|Q\|$,

$$\|Q\| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\|e_m\| = \begin{vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_7 \end{vmatrix}; \quad \|u_n\| = \begin{vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{13} \end{vmatrix}.$$

Так как линейный граф представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, записанных графически с помощью узлов, ветвей и направлений (стрелок), то уравнения (7-3-9), (7-3-11), (7-3-13) и (7-3-15) для взаимных четырехполюсников также могут быть выражены с помощью графов (рис. 7-48). При этом расположение коэффициентов уравнений определяется той связью, которую они осуществляют между входными и выходными токами и напряжениями.

Если два или большее число четырехполюсников включены каскадно, то граф полной системы находят путем соединения графов отдельных четырехполюсников (рис. 7-49). Элементы матрицы передачи, характеризующие каскадное соединение четырехполюсников, определяются как сумма произведений участков всех возможных путей между соответствующими узлами графов.

Так, например, в случае соединения двух четырехполюсников

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= A'_{11} A''_{11} + A'_{12} A''_{21}; \\ A_{12} &= A'_{11} A''_{12} + A'_{12} A''_{22}; \\ A_{21} &= A'_{21} A''_{11} + A'_{22} A''_{21}; \\ A_{22} &= A'_{21} A''_{12} + A'_{22} A''_{22}; \end{aligned} \right\} \quad (7-3-53)$$

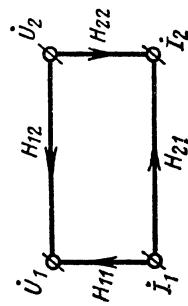
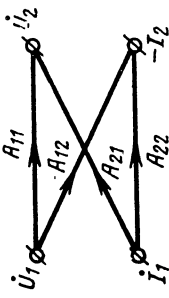
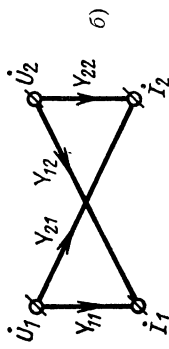
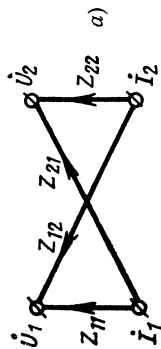


Рис. 7-48. Графы четырех-
полосников.

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2, \\ \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &а) \\ &б) \\ &в) \\ &г) \end{aligned}$$

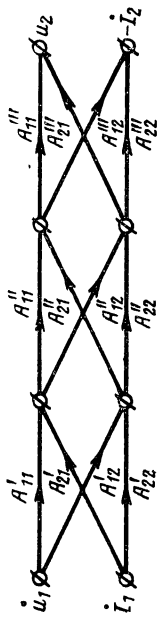


Рис 7-49. Граф каскадного соединения четырехполосников.

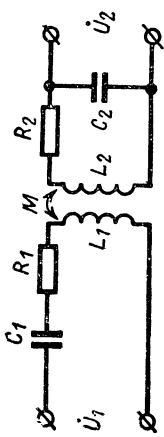


Рис. 7-50. Схема
с трансформаторной
связью.

R_1 — сопротивление катушки L_1 , R_2 — сопротивление катушки L_2 .

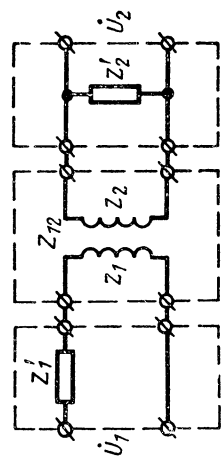


Рис. 7-51. Обобщенная схема
с трансформаторной связью.

в случае соединения трех четырехполюсников элемент A_{11} для всей системы определится выражением

$$A_{11} = A'_{11} A''_{11} A'''_{11} + A'_{11} A''_{12} A'''_{21} + A'_{12} A''_{21} A'''_{11} + A'_{12} A''_{22} A'''_{21}. \quad (7-3-54)$$

Если какой-либо из элементов матриц равен нулю, то соответствующая ему ветвь в графе отсутствует и вычисления упрощаются.

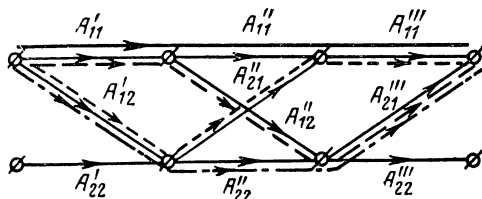


Рис. 7-52. Граф схемы, приведенной на рис. 7-50.

В качестве примера использования метода линейных графов определим коэффициент передачи схемы, приведенной на рис. 7-50. Схему эту можно рассматривать как образуемую тремя каскадно соединенными четырехполюсниками (рис. 7-51). Согласно выражению (7-3-136) коэффициент передачи такой схемы

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{A_{11}},$$

где A_{11} определяется выражением (7-3-54). В рассматриваемом случае согласно табл. 7-2 $A'_{21} = 0$, $A''_{12} = 0$; поэтому линейный граф имеет вид, показанный на рис. 7-52. Согласно той же табл. 7-2 имеем:

для схемы 3: $A'_{11} = 1$; $A'_{12} = Z'_1$;

для схемы 5: $A''_{11} = \frac{Z_1}{Z_{12}}$; $A''_{12} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_{12}^2}{Z_{12}}$;

$$A''_{21} = \frac{1}{Z_{12}}; \quad A''_{22} = \frac{Z_2}{Z_{12}};$$

для схемы 4: $A'''_{11} = 1$; $A'''_{21} = \frac{1}{Z'_2}$.

Подставляя эти значения в выражение (7-3-54), получаем:

$$A_{11} = \frac{Z_1}{Z_{12}} + \frac{Z_1 Z_2 - Z_{12}^2}{Z_{12} Z_2'} + \frac{Z_1'}{Z_{12}} + \frac{Z_1' Z_2}{Z_{12} Z_2'}.$$

Следовательно,

$$K(j\omega) = \frac{1}{A_{11}} = \frac{Z_{12} Z_2'}{(Z_1 + Z_1')(Z_2 + Z_2') - Z_{12}^2}. \quad (7-3-55)$$

7-4. СВЯЗАННЫЕ КОНТУРЫ

Для улучшения согласования сопротивления нагрузки и повышения избирательности системы с одновременным расширением ее полосы пропускания применяют

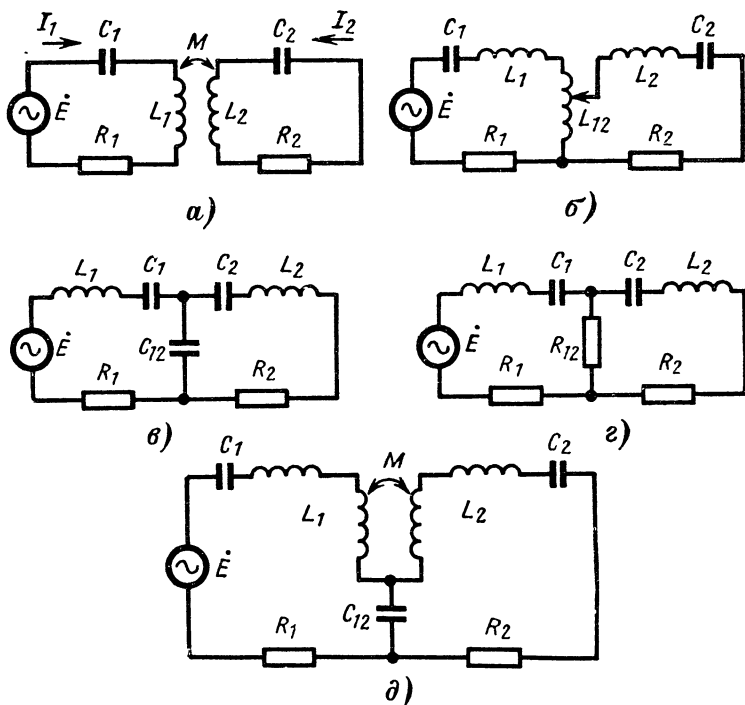


Рис. 7-53. Двухконтурные схемы.

a — магнитная индуктивная связь, $Z_{12} = j\omega M$; *б* — магнитная кондуктивная связь; $Z_{12} = j\omega L_{12}$; *в* — электрическая емкостная связь; $Z_{12} = -j \frac{1}{\omega C_{12}}$; *г* — элек-

трическая резисторная связь, $Z_{12} = R_{12}$; *д* — комбинированная связь,

$$Z_{12} = j \left(\omega M - \frac{1}{\omega C_{12}} \right).$$

схемы, составленные из нескольких контуров. Это позволяет уменьшить искажения сигнала. Наиболее распространены двухконтурные схемы.

Связь между контурами может осуществляться магнитным полем, электрическим полем и общим током. Возможна также комбинированная связь, например электрическим и магнитным полем. Различные способы связи показаны на рис. 7-53.

Наибольшее практическое применение имеют контуры с магнитной (трансформаторной) связью (рис. 7-53, а). На основании формул (6-2-8) электромагнитные процессы в установившемся режиме в контурах такого вида связи описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} e &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt; \\ 0 &= i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt; \end{aligned}$$

в символической форме эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_M = \dot{I}_1 (R_1 + jX_1) + \dot{I}_2 Z_M; \\ 0 &= \dot{I}_1 Z_M + \dot{I}_2 Z_2 = \dot{I}_1 Z_M + \dot{I}_2 (R_2 + jX_2), \end{aligned} \right\} \quad (7-4-1)$$

$$\text{где } X_1 = \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right), \quad X_2 = \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \\ \text{и } Z_M = j\omega M.$$

Во всех этих уравнениях величины с индексами «1» относятся к первому контуру, а с индексами «2» — ко второму. Решая последнюю систему уравнений, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{E} \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2}; \\ \dot{I}_2 &= \dot{E} \frac{-Z_M}{Z_1 Z_2 + \omega^2 M^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7-4-2)$$

Входное сопротивление системы, называемое эквивалентным сопротивлением, определяется выражением

$$Z_9 = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_1} = Z_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2}. \quad (7-4-3)$$

Второе слагаемое в правой части этого выражения называется вносимым сопротивлением.

$$Z_{\text{вн}} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2}. \quad (7-4-4)$$

Преобразуя соотношение (7-4-3), получаем:

$$Z_3 = R_3 + jX_3. \quad (7-4-5)$$

Здесь $R_3 = R_1 + R_{\text{вн1}}$ и $X_3 = X_1 - X_{\text{вн1}}$, причем

$$R_{\text{вн1}} = \frac{\omega^2 M^2}{z_2^2} R_2 \quad (7-4-6)$$

— вносимое действительное сопротивление,

$$X_{\text{вн1}} = \frac{\omega^2 M^2}{z_2^2} X_2 \quad (7-4-7)$$

— вносимое реактивное сопротивление.

Из равенства (7-4-5) следует, что *влияние второго контура увеличивает эквивалентное действительное сопротивление и изменяет эквивалентное реактивное сопротивление системы*. Это объясняется тем, что при наличии связи между контурами часть энергии из первого поступает во второй, где рассеивается его действительным сопротивлением и запасается в его реактивных сопротивлениях; это явление равносильно возрастанию эквивалентного действительного сопротивления и изменению эквивалентного реактивного сопротивления системы.

При емкостном характере сопротивления второго контура ($X_2 < 0$) в первый контур вносится индуктивное сопротивление ($X_{\text{вн}} > 0$); при индуктивном характере сопротивления второго контура ($X_2 > 0$) в первый контур вносится емкостное сопротивление ($X_{\text{вн}} < 0$).

Резонанс в двухконтурной схеме определяется условием $X_3 = 0$; при этом

$$X_1 - X_2 \frac{\omega^2 M^2}{z_2^2} = 0. \quad (7-4-8)$$

Подключенный к первому контуру источник э. д. с. оказывается нагруженным только действительным сопротивлением

$$R_3|_{\omega=\omega_r} = R_1 + R_2 \frac{\omega^2 M^2}{z_2^2} \Big|_{\omega=\omega_r}. \quad (7-4-9)$$

Учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} \omega_{01} &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, & \omega_{02} &= \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \\ Q_2 &= \frac{\omega_{02} L_2}{R_2}, & k &= \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (7-4-10)$$

где ω_{01} — резонансная частота первого контура;
 ω_{02} , Q_2 — соответственно резонансная частота и добротность второго контура;
 k — коэффициент связи [см. выражение (7-3-23)],

преобразуем уравнение (7-4-8) к виду

$$\left(\frac{\omega}{\omega_{01}} - \frac{\omega_{01}}{\omega} \right) - \left(\frac{\omega}{\omega_{02}} - \frac{\omega_{02}}{\omega} \right) \frac{\omega^2}{\omega_{01} \omega_{02}} \frac{k^2 Q_2^2}{\left[1 + Q_2^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{02}} - \frac{\omega_{02}}{\omega} \right)^2 \right]} = 0. \quad (7-4-11)$$

Последнее уравнение в общем случае имеет три вещественных корня; это означает, что двухконтурная схема имеет три резонансных частоты ω_{r1} , ω_{r2} и ω_{r3} , значения которых определяются всеми параметрами схемы, за исключением действительного сопротивления первого контура. Если $\omega_{01} < \omega_{02}$, то $\omega_{r1} < \omega_{01}$, $\omega_{r2} > \omega_{02}$, а $\omega_{01} < \omega_{r3} < \omega_{02}$. При $\omega = \omega_{r1}$ и $\omega = \omega_{r2}$ имеют место максимумы, а при $\omega = \omega_{r3}$ — минимум тока. Резонансная частота ω_{r1} называется наименьшей частотой связи, а ω_{r2} — наибольшей частотой связи.

Если $R_2 \rightarrow 0$ и $Q_2 \rightarrow \infty$, то уравнение (7-4-11) имеет такой вид:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_{01}} - \frac{\omega_{01}}{\omega} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_{02}} - \frac{\omega_{02}}{\omega} \right) - \frac{\omega^2}{\omega_{01} \omega_{02}} k^2 = 0.$$

Решениями этого уравнения являются выражения

$$\omega_{r1,2} = \sqrt{\frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2(1-k^2)} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 4(1-k^2) \left[\frac{\omega_{01} \omega_{02}}{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2} \right]^2} \right\}} \quad (7-4-12)$$

или

$$\frac{\omega_{r1,2}}{\omega_{01}} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}\right)^2}{2(1 - k^2)}} \times \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 4(1 - k^2) \left(\frac{\omega_{02}/\omega_{01}}{1 + \left(\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}\right)^2}\right)^2}}. \quad (7-4-12a)$$

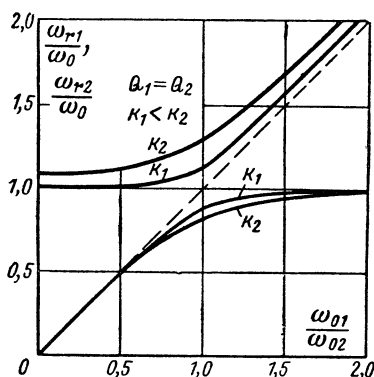


Рис. 7-54. Зависимость резонансных частот (частот связи) двух-контурной схемы от расстройки контуров.

При «малой» расстройке контуров относительно друг друга можно положить:

$$\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 \approx 2\omega_0^2$$

и

$$\omega_{01}\omega_{02} \approx \omega_0^2,$$

где

$$\omega_0 = \frac{\omega_{01} + \omega_{02}}{2};$$

тогда выражения (7-4-12) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{r1} &\approx \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + k}}; \\ \omega_{r2} &\approx \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-4-13)$$

На рис. 7-54 приведены кривые, выражающие зависимость ω_{r1}/ω_0 и ω_{r2}/ω_0 от величины относительной расстройки контуров ω_{01}/ω_{02} при нескольких значениях коэффициента связи.

Уравнения резонансных кривых тока первого и второго контура для случая малых расстроек $\left(\frac{\Delta\omega_1}{\omega_{01}} \ll 1, \frac{\Delta\omega_2}{\omega_{02}} \ll 1\right)$,

$\frac{\omega^2}{\omega_{01}\omega_{02}} \approx 1$) можно получить из уравнений (7-4-2), обозначая

$$\left. \begin{aligned} Q_1 \frac{2\Delta\omega_1}{\omega_{01}} &= a_1; \\ Q_2 \frac{2\Delta\omega_2}{\omega_{02}} &= a_2; \end{aligned} \right\} \quad (7-4-14)$$

здесь $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ — абсолютные расстройки частоты сигнала относительно резонансной частоты первого и второго контура;
 a_1 и a_2 — соответствующие обобщенные расстройки;

$Q_1 = \frac{\omega_0 L_1}{R_1}$ — добротность первого контура.

При этом получим:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &\approx \frac{E}{2R_1} \frac{2\sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{[1-a_1a_2+Q_1Q_2k^2]^2+(a_1+a_2)^2}}; \\ I_2 &\approx \frac{E}{2\sqrt{R_1R_2}} \frac{2\sqrt{Q_1Q_2}k}{\sqrt{[1-a_1a_2+Q_1Q_2k^2]^2+(a_1+a_2)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-4-15)$$

Уравнения приведенных резонансных кривых имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{I_1}{\frac{E}{2R_1}} = \frac{2\sqrt{1+a_1^2}}{\sqrt{[1-a_1a_2+k^2Q_1Q_2]^2+(a_1+a_2)^2}}; \\ n_2 &= \frac{I_2}{\frac{E}{2\sqrt{R_1R_2}}} = \frac{2k\sqrt{Q_1Q_2}}{\sqrt{[1-a_1a_2+k^2Q_1Q_2]^2+(a_1+a_2)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-4-16)$$

В качестве полосового фильтра в радиоприемниках широко применяют двухконтурную схему, у которой $Q_1=Q_2$, $\omega_{01}=\omega_{02}$ и, следовательно, $a_1=a_2$. Применительно к этому случаю выражения (7-4-16) переписываются в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{2\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{[1-a^2+k^2Q^2]^2+4a^2}}; \\ n_2 &= \frac{2kQ}{\sqrt{[1-a^2+k^2Q^2]^2+4a^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-4-17)$$

n_1 и n_2 имеют экстремальные значения, определяемые из уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{da} &= 0; \\ \frac{dn_2}{da} &= 0,\end{aligned}$$

решения которых имеют следующие вещественные корни: для n_1

$$\left. \begin{aligned}a_{I,II} &= \pm \sqrt{\sqrt{k^2 Q^2 (4 + k^2 Q^2)} - 1}; \\ a_{III} &= 0;\end{aligned} \right\} \quad (7-4-18)$$

для n_2

$$\left. \begin{aligned}a_{I,II} &= \pm \sqrt{k^2 Q^2 - 1}; \\ a_{III} &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (7-4-19)$$

Это означает, что каждая резонансная кривая имеет в общем случае два максимума с минимумом между ними.

В частном случае, когда

$$k = k_{кр} = \frac{1}{Q}, \quad (7-4-20)$$

резонансная кривая второго контура имеет один максимум. Связь, определяемая условием (7-4-20), называется критической. Соответственно, слабая связь определяется условием

$$k < k_{кр} = \frac{1}{Q}, \quad (7-4-21)$$

а сильная — условием

$$k > k_{кр} = \frac{1}{Q}. \quad (7-4-21a)$$

При сильной связи резонансная кривая n_2 имеет два максимума («двугорбая»), при слабой — один («одногогорбая»).

Кривые на рис. 7-55, построенные на основании выражений (7-4-13), которые при $k \ll 1$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned}\omega_{r1} &\approx \omega_0 \left(1 - \frac{k}{2}\right); \\ \omega_{r2} &\approx \omega_0 \left(1 + \frac{k}{2}\right),\end{aligned} \right\} \quad (7-4-19a)$$

иллюстрируют возникновение двух частот связи при $k > k_{кр}$; на этих частотах ток I_2 имеет максимумы.

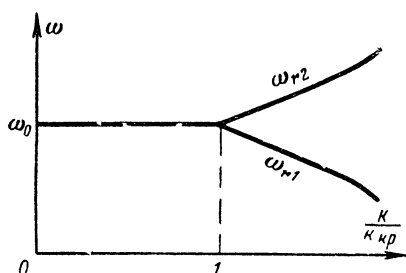


Рис. 7-55. Зависимость резонансных частот от коэффициента связи.

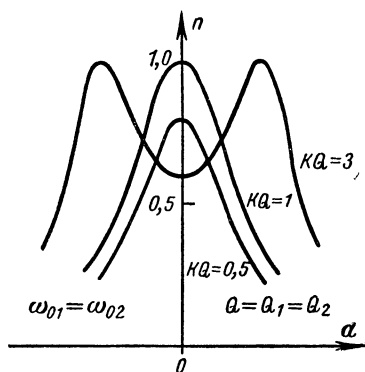


Рис. 7-56. Резонансные кривые двух-контурной схемы при различных значениях kQ .

Резонансная кривая первого контура n_1 становится «одногорбой» при $a_1 = a_{II} = 0$, и согласно первому выражению (7-4-18)

$$k_{кр} \approx 0,49 \frac{1}{Q}. \quad (7-4-20a)$$

При более сильной связи кривая имеет два максимума, а при более слабой — один. На рис. 7-56 и 7-57 представлены резонансные кривые, определяемые выражениями (7-4-17) и соответствующие им фазовые характеристики.

Другой практически важной двухконтурной схемой, применяемой в радиопередаточных устройствах, в индукционных нагревательных и других электроэнергетических устройствах, является схема, у которой $R_1 < R_2$, а $\omega_{01} \approx \omega_{02}$. При этом

$$a_1 \approx 2Q_1 \frac{\Delta\omega}{\omega_0},$$

$$a_2 \approx 2Q_2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

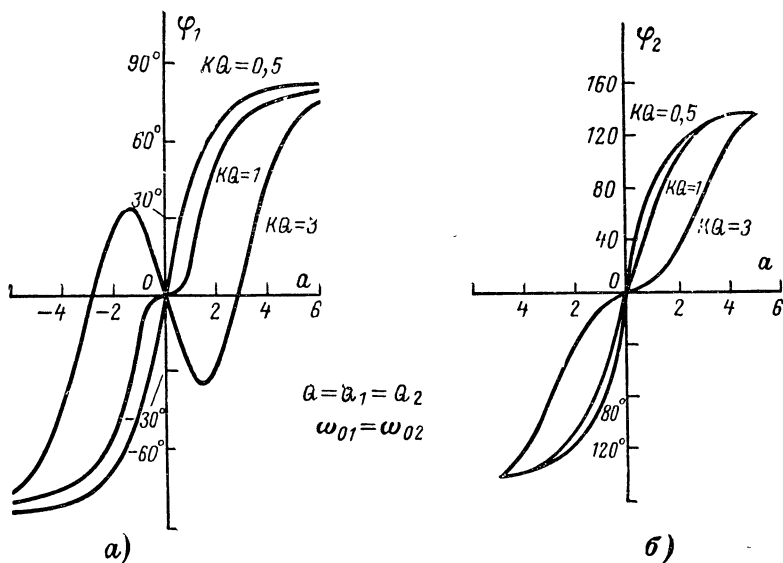


Рис. 7-57. Фазовые характеристики двухконтурной схемы при различных значениях kQ .

В этом случае резонансная кривая n_2 также имеет экстремальные значения; критическая связь, при которой эта кривая становится одногорбой, определяется выражением

$$k_{кр} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{Q_1^2} + \frac{1}{Q_2^2}}. \quad (7-4-20б)$$

При $R_1 \ll R_2$ и $Q_1 \gg Q_2$

$$k_{кр} \approx \frac{1}{Q_2 \sqrt{2}}. \quad (7-4-20в)$$

При $k > k_{кр}$ получаются два максимума, одинаковые по величине при $\omega_{01} = \omega_{02}$. При неравенстве резонансных частот обоих контуров, даже когда $k < k_{кр}$, резонансная кривая имеет двугорбую форму, причем максимумы имеют разную величину.

Коэффициент передачи по напряжению двухконтурной схемы (рис. 7-50) определяется выражением (7-3-55), в котором

$$\left. \begin{aligned} Z_{12} Z'_2 &= \frac{M}{C_2}; \\ Z_{12}^2 &= -\omega^2 L_1 L_2 k^2; \end{aligned} \right\} \quad (7-4-22)$$

при малой расстройке ($\Delta\omega_1 \ll \omega_{01}$, $\Delta\omega_2 \ll \omega_{02}$) согласно выражению (7-2-13)

$$\left. \begin{aligned} Z_1 + Z'_1 &\approx R_1 (1 + ja_1); \\ Z_2 + Z'_2 &\approx R_2 (1 + ja_2). \end{aligned} \right\} \quad (7-4-22a)$$

Подставляя значения (7-4-22) и (7-4-22a) в выражение (7-3-55), после несложных преобразований получаем:

$$K(j\omega) = \frac{kQ_1 Q_2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}}{1 + k^2 Q_1 Q_2 - a_1 a_2 + j(a_1 + a_2)}. \quad (7-4-23)$$

Если оба контура одинаковы, то

$$K(j\omega) = \frac{kQ^2}{1 + k^2 Q^2 - a^2 + 2ja}. \quad (7-4-23a)$$

Амплитудно-частотная характеристика для этого случая определяется выражением

$$|K(j\omega)| = \frac{kQ^2}{\sqrt{[1 - a^2 + k^2 Q^2]^2 + 4a^2}}, \quad (7-4-23б)$$

а фазовая характеристика — выражением

$$\varphi = \arctg \frac{2a}{1 - a^2 + k^2 Q^2}. \quad (7-4-23в)$$

На рис. 7-58 приведены кривые, показывающие зависимость $|K(j\omega)|$ от величины связи. При $k > k_{кр}$ кривые имеют максимумы при значениях a , определяемых выражениями (7-4-19).

Полоса пропускания двухконтурной схемы, приведенные резонансные кривые которой описываются выраже-

ниями (7-4-17), согласно определению (см. § 7-2) находится из условия (при $k \leq k_{кр}$)

$$\frac{1}{2} n_2^2|_{a=0} = n_2^2.$$

Отсюда имеем:

$$|a| = \sqrt{k^2 Q^2 - 1 + \sqrt{2(1 + k^4 Q^4)}}. \quad (7-4-24)$$

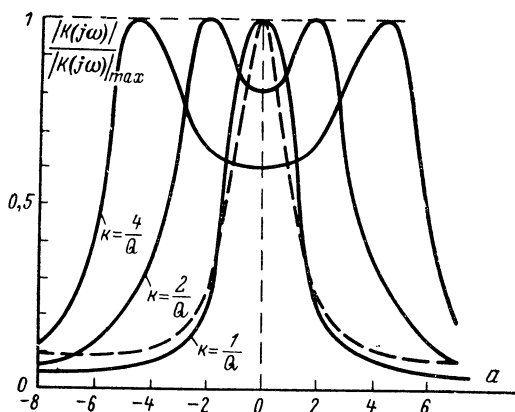


Рис. 7-58. Зависимость коэффициента передачи от расстройки при различных значениях коэффициента связи.

Из последнего выражение следует, что когда $kQ \ll 1$ или $k \ll k_{кр}$, то

$$|a| = Q^2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 0,64.$$

Отсюда

$$2\Delta\omega \approx 0,64 \frac{\omega_0}{Q}, \quad (7-4-25)$$

т. е. полоса пропускания двухконтурной схемы при слабой связи меньше полосы пропускания одиночного контура [см. формулу (7-2-20)]. Из выражения (7-4-24) следует также, что при $kQ = 1$ или $k = k_{кр}$

$$|a| = Q^2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{2}.$$

Отсюда

$$2\Delta\omega \approx \sqrt{2} \frac{\omega_0}{Q}, \quad (7-4-26)$$

т. е. при критической связи полоса пропускания двухконтурной схемы больше, чем у одиночного контура (рис. 7-59).

При $kQ > 1$ (сильная связь) вследствие седловины в резонансной кривой полосу пропускания следует определять исходя из того, что минимум резонансной кри-

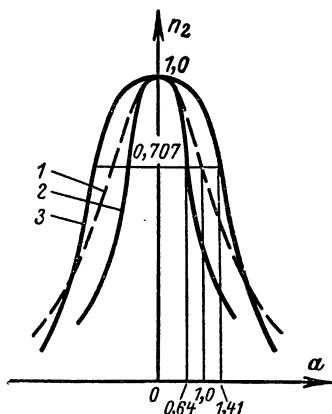


Рис. 7-59. Полосы пропускания резонансных систем.
1 — одиночный контур; 2 — двухконтурная схема, $k \ll k_{кр}$; 3 — двухконтурная схема, $k = k_{кр}$.

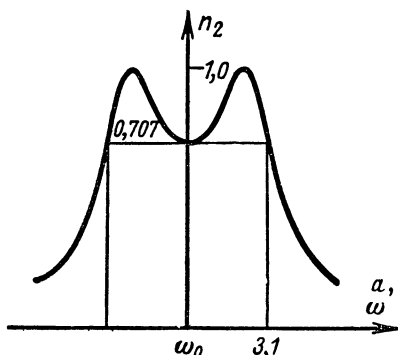


Рис. 7-60. Полоса пропускания двухконтурной схемы при сильной связи ($k = 2,42k_{кр}$).

вой при $\alpha = 0$ должен быть не меньше $1/\sqrt{2}$. Резонансная кривая, приведенная на рис. 7-60, соответствует предельному случаю $n_2(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. При этом на основании второй формулы (7-4-17) получим:

$$\frac{2kQ}{1 + k^2 Q^2} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

следовательно, в данном случае $kQ = 2,42$. Согласно определению полоса пропускания в этом случае определяется уравнением

$$\frac{1}{2} |n_2|_{a=a_1}^2 = |n_2|^2 = \frac{1}{2}$$

или согласно второму выражению (7-4-17) уравнением

$$\frac{1}{2} = \frac{4k^2 Q^2}{[1 - a^2 + k^2 Q^2]^2 + 4a^2}.$$

Подставляя в последнее уравнение значение $kQ = 2,42$, находим, что

$$|a| \approx 3,05.$$

Следовательно, полоса пропускания двухконтурной схемы при сильной связи ($kQ = 2,42$)

$$2\Delta\omega \approx 3,05 \frac{\omega_0}{Q}, \quad (7-4-27)$$

т. е. в 3 раза шире, чем одиночного контура [ср. с соотношением (7-2-20)].

Таким образом, полоса пропускания двухконтурной схемы зависит не только от добротности контуров, но и от коэффициента связи, возрастая с его увеличением.

Резонансная кривая системы двух связанных контуров приближается к идеальной (П-образной) форме, дающей возможность одинакового воспроизведения всех частот в полосе пропускания. Однако когда $kQ > 2,42$, то седловина на резонансной кривой углубляется и увеличивается расстояние между ее горбами. При этом можно считать, что система имеет две полосы пропускания, разделенных полосой непрозрачности.

В тех случаях, когда требуется расширение полосы пропускания больше, чем может дать двухконтурная схема, применяют три и более связанных контура. Число резонансных максимумов в многоконтурной системе определяется числом входящих в нее контуров и характером связи между контурами. Если каждый контур непосредственно связан только с предыдущим и последующим, то число резонансных максимумов равно числу контуров, а форма резонансной кривой при подобранных соответствующим образом связях почти прямоугольна, т. е. близка к идеальной в широком интервале частот.

Для получения максимального значения тока I_2 при $\omega = \text{const}$ производится настройка контуров. Первым частным резонансом называют резонанс, при котором наибольший ток во втором контуре получают путем настройки только первого контура, т. е. изменением параметров L_1, C_1 при неизменных L_2, C_2 и M . Из соотношений (7-4-2), (7-4-5) и (7-4-7) следует, что при

этом достигается условие $(X_1 - X_{\text{вн1}}) = 0$; в результате токи в контурах имеют величины

$$\left. \begin{aligned} I_{1\text{макс}} &= \frac{E}{R_1 + R_{\text{вн1}}}; \\ I_{2\text{макс}} &= \frac{E}{R_1 + R_{\text{вн1}}} \frac{z_M}{z_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7-4-28)$$

Вторым частным резонансом называют резонанс, при котором наибольший ток во втором контуре получают настройкой только второго контура, т. е. изменением параметра L_2 или C_2 при неизменных параметрах L_1 , C_1 и M . В этом случае настройкой достигается условие

$$X_2 - X_1 \frac{\omega^2 M^2}{z_1^2} = 0;$$

в результате этого

$$I_{2\text{макс}} = \frac{E \frac{\omega M}{z_1}}{R_2 + \frac{\omega^2 M^2}{z_1^2} R_1}. \quad (7-4-29)$$

Сложным резонансом называют резонанс, при котором получают наибольший ток I_2 путем настройки одного из контуров и последующего подбора оптимального значения взаимной индукции M . При этом если настраивается первый контур (изменяется L_1 или C_1)

$$\left. \begin{aligned} \omega M_{\text{опт}} &= z_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}; \\ I_{1\text{макс}} &= \frac{E}{2R_1}; \\ I_{2\text{макс макс}} &= \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (7-4-30)$$

а если настраивается второй контур (изменяется L_2 или C_2)

$$\left. \begin{aligned} \omega M_{\text{опт}} &= z_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}; \\ I_{1\text{макс}} &= \frac{E}{2R_1} \frac{z_2}{z_1}; \\ I_{2\text{макс макс}} &= \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-4-30a)$$

Полным резонансом называют резонанс, при котором получают возможно больший ток I_2 в результате настройки обоих контуров, т. е. такого подбора параметров L_1 , C_1 или L_2 , C_2 , при которых $X_1=0$ и $X_2=0$; при этом необходим и подбор оптимального значения взаимоиנדукции $M_{\text{опт}}$. В данном случае величины токов определяются выражениями (7-4-30), а оптимальная величина взаимоиנדукции

$$\omega M_{\text{опт}} = \sqrt{R_1 R_2}. \quad (7-4-31)$$

Коэффициент полезного действия системы. Если вторичный контур рассматривать как нагрузку, содержащую сопротивление R_2 , а первичный контур — как вспомогательный, то к. п. д. системы

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_2}, \quad (7-4-32)$$

где P_2 — мощность, поглощаемая в сопротивлении R_2 ; P_1 — мощность, поглощаемая в сопротивлении R_1 .

Очевидно, что если $X_1 = X_2 = 0$, то

$$P_1 = I_{1r}^2 R, \quad P_2 = I_{2r}^2 R_2 = I_{1r}^2 R_{\text{вн1}},$$

где $R_{\text{вн1}}$ определяется формулой (7-4-6).

Если параметры обоих контуров одинаковы и в системе имеет место полный резонанс ($X_1 = X_2 = 0$), то в этом случае

$$P_1 = I_{1r}^2 R; \quad (7-4-33)$$

$$P_2 = \frac{I_{1r}^2 \omega_0^2 M^2}{R} = I_{1r}^2 Q^2 k^2 R, \quad (7-4-34)$$

где I_{1r} — действующее значение тока в первом контуре при $\omega = \omega_0$.

Подставляя выражения (7-4-33) и (7-4-34) в формулу (7-4-32), получаем:

$$\eta = \frac{k^2 Q^2}{1 + k^2 Q^2}. \quad (7-4-32б)$$

$$\text{Так как } X_1 = X_2 = 0, \text{ то } I_{1r} = \frac{E}{R + R_{\text{вн1}}} = \frac{E}{R(1 + k^2 Q^2)}$$

и рассеиваемые в первом и втором контурах мощности

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{E^2}{R(1 + k^2 Q^2)^2}; \\ P_2 &= \frac{E^2 Q^2 k^2}{R(1 + k^2 Q^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7-4-35)$$

Когда связь между контурами отсутствует и вся мощность рассеивается в первом контуре, то $P_1 = P_{1\text{макс}} = \frac{E^2}{R}$.

Нормируя на эту величину, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_1}{P_{1\text{макс}}} &= \frac{1}{(1 + k^2 Q^2)^2}; \\ \frac{P_2}{P_{1\text{макс}}} &= \frac{k^2 Q^2}{(1 + k^2 Q^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7-4-35a)$$

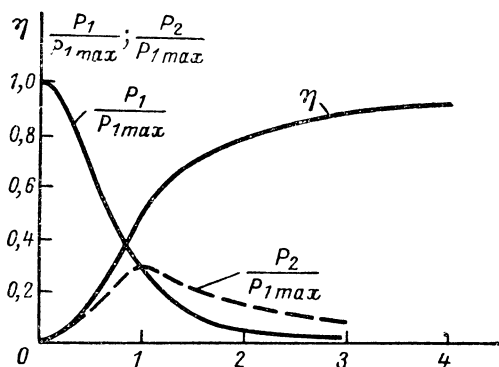


Рис. 7-61. Графики зависимости P_1 , P_2 и η от коэффициента связи kQ .

Характер изменения мощностей P_1 , P_2 и к. п. д. при изменении величины kQ иллюстрируется графиками, приведенными на рис. 7-61. Как видно из этих графиков, максимальная мощность во втором контуре при $k_{\text{кр}} = 1/Q$, но при этом $\eta = 50\%$. При коэффициенте связи $k > k_{\text{кр}}$ к. п. д. увеличивается, хотя рассеиваемая во втором контуре мощность падает; при этом уменьшение мощности, рассеиваемой в первом контуре, еще значительнее. Поэтому когда важно передать во второй контур наибольшую мощность, следует устанавливать $k = k_{\text{кр}}$. Если же важно наиболее полное использование энергии источника, то связь между контурами должна быть больше критической; при этом величину связи необходимо выбирать такой, при которой во второй контур передается требуемая мощность. При критической связи

$R_{\text{вн1}} = \frac{\omega_0^2 M^2}{R_1} = k^2 Q^2 R_1 = R_1$, что соответствует теореме о передаче максимальной мощности (см. § 6-5).

7.5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

Электрическими фильтрами называют линейные пассивные четырехполюсники с резко выраженной частотной избирательностью. Они обладают малым и приблизительно постоянным затуханием в полосе частот, называемой полосой прозрачности (пропускания),

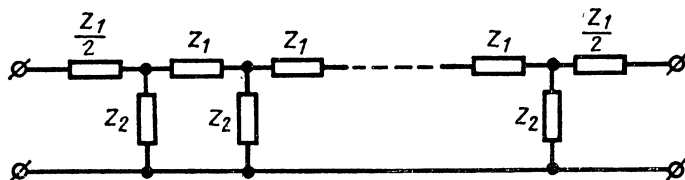


Рис. 7-62. Лестничная схема фильтра.

и достаточно большим затуханием вне этой полосы. Область большого затухания называется полосой непрозрачности (задержания).

В полосе пропускания идеального фильтра (в схеме которого нет действительных сопротивлений) и при со-

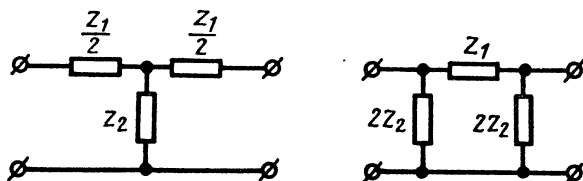


Рис. 7-63. Т и П-звенья лестничной схемы.

гласованном включении на основании первого выражения (7-3-51) $|K(j\omega)| = e^{-\alpha} = 1$, т. е. $\alpha = 0$.

Идеальные фильтры содержат только реактивные элементы C , L и M и поэтому мощность в них не поглощается; в полосе прозрачности вся мощность поступает в нагрузку, а в полосе непрозрачности вся или большая часть мощности отражается к генератору.

Основой простейших фильтров служит схема, составленная из одинаковых включенных последовательно или

параллельно сопротивлений Z_1 и Z_2 (рис. 7-62). Такую схему называют лестничной. Ее можно рассматривать как цепочку четырехполюсников из Т- и П-звеньев (рис. 7-63).

Если цепочка собрана из Т-звеньев, то она должна кончаться и начинаться последовательным сопротивлением $Z_1/2$, если — из П-звеньев, то — параллельным сопротивлением $2Z_2$.

Матрица передачи Т-звена согласно схеме 3 из табл. 7-3 имеет вид:

$$\|A\|_T = \begin{vmatrix} 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} & Z_1 + \frac{Z_1^2}{4Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \end{vmatrix}$$

Матрица передачи П-звена согласно схеме 4 из табл. 7-3 имеет вид:

$$\|A\|_П = \begin{vmatrix} 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} + \frac{Z_1}{4Z_2^2} & 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, постоянные передачи Т- и П-звеньев для одной и той же исходной лестничной схемы одинаковы. Действительно, постоянные передачи Т- и П-звеньев согласно первому выражению (7-3-47а) и приведенным матрицам определяются формулой

$$\cos k_0 = A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}. \quad (7-5-1)$$

В полосе прозрачности $\alpha = 0$ и $k_0 = \beta$; при этом

$$\cos k_0 = \cos \beta = A_{11} \quad (7-5-2)$$

и, следовательно, полоса прозрачности определяется соотношением

$$-1 \leq A_{11} \leq 1.$$

Подставляя сюда значение A_{11} из формулы (7-5-1), получаем:

$$-1 \leq 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \leq 1,$$

или

$$-2 \leq \frac{Z_1}{2Z_2} \leq 0.$$

Таким образом, полоса прозрачности определяется неравенством

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2} \leq 0. \quad (7-5-3)$$

Отсюда видно, что сопротивления Z_1 и Z_2 должны иметь разный характер (индуктивный и емкостный или наоборот).

Согласно соотношению (7-5-2) с учетом формулы (7-5-1)

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \frac{z_1}{z_2}$$

или

$$1 - \cos \beta = \frac{1}{2} \frac{z_1}{z_2}.$$

Преобразуя это выражение, получаем:

$$2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \frac{z_1}{z_2};$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{z_1}{z_2}}.$$

Отсюда фазовая постоянная в полосе пропускания определяется выражением

$$\beta = \pm 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} \frac{z_1}{z_2}}.$$

Приравняв граничным условиям (7-5-3), получаем, что при $z_1/4z_2=1$

$$\beta = \pm 2 \arcsin 1 = \pm \pi,$$

а при $z_1/4z_2=0$

$$\beta = \pm 2 \arcsin 0 = 0.$$

Заметим, что в полосе пропускания фазовая характеристика имеет положительный наклон.

В полосе непрозрачности $\alpha \neq 0$, $k_0 = \beta - j\alpha$ и поэтому выражение (7-5-1) имеет вид:

$$\cos(\beta - j\alpha) = \cos \beta \operatorname{ch} \alpha + j \sin \beta \operatorname{sh} \alpha = 1 - \frac{1}{2} \frac{z_1}{z_2}.$$

Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta \operatorname{sh} \alpha &= 0, \\ \cos \beta \operatorname{ch} \alpha &= 1 - \frac{1}{2} \frac{z_1}{z_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7-5-4)$$

Так как $\alpha \neq 0$, то и $\operatorname{sh} \alpha \neq 0$, и из первого соотношения этой системы следует, что $\sin \beta = 0$, т. е. $\beta = 0, \pi, -\pi$. Из второго выражения системы (7-5-4) следует, что $\cos \beta \operatorname{ch} \alpha < 1$. Так как $\alpha \neq 0$, то $\operatorname{ch} \alpha > 1$ и, следовательно, $\beta = \pm \pi$. При этом согласно второму уравнению системы (7-5-4)

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2} \frac{z_1}{z_2} - 1.$$

Из последнего выражения следует, что

$$\alpha = 2 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{1}{4} \frac{z_1}{z_2}}.$$

Таким образом, в полосе прозрачности

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0; \\ \beta &= \pm 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{4} \frac{z_1}{z_2}} \end{aligned} \right\} \quad (7-5-5)$$

и в полосе непрозрачности

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{1}{4} \frac{z_1}{z_2}}; \\ \beta &= \pm \pi. \end{aligned} \right\} \quad (7-5-6)$$

Согласно формуле (7-3-42) характеристическое сопротивление Т-звена

$$Z_{0T} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 - \frac{1}{4} \frac{z_1}{z_2} \right)}; \quad (7-5-7)$$

его величина на границах полосы прозрачности при $z_1/4z_2 = 0$

$$Z_{0T} = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad (7-5-7a)$$

и при $z_1/4z_2 = 1$

$$Z_{0T} = 0. \quad (7-5-7b)$$

Характеристическое сопротивление П-звена

$$Z_{0П} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 - \frac{1}{4} \frac{z_1}{z_2}}}; \quad (7-5-8)$$

его величина на границах полосы пропускания при $z_1/4z_2=0$

$$Z_{0П} = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad (7-5-8a)$$

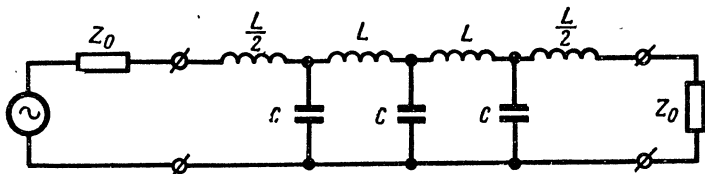


Рис. 7-64. Схема фильтра нижних частот из Т-звеньев.

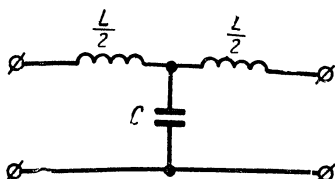


Рис. 7-65. Т-звено фильтра нижних частот.

и при $z_1/4z_2=1$

$$Z_{0П} = \infty. \quad (7-5-8б)$$

Если произведение сопротивлений в фильтре $Z_1 Z_2 = \text{const}$ и не зависит от частоты, его называют фильтром типа К.

Определение свойств фильтров сводится к исследованию зависимости постоянной затухания, фазы и характеристического сопротивления от частоты.

Фильтр нижних частот (рис. 7-64). Здесь $Z_1 = j\omega L$, $Z_2 = 1/j\omega C$ и $Z_1 Z_2 = L/C$. Будем считать, что эта схема состоит из Т-звеньев (рис. 7-65). Полоса прозрачности одного такого звена согласно формуле (7-5-3) определяется неравенством

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{\omega^2 LC}{4} \leq 0.$$

Обозначая $\frac{2}{\sqrt{LC}} = \omega_{\text{ср}}$, получаем:

$$0 \leq \frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2} \leq 1$$

или

$$0 \leq \omega \leq \omega_{\text{ср}}.$$

Таким образом, идеальный (не содержащий действительного сопротивления) фильтр нижних частот пропускает

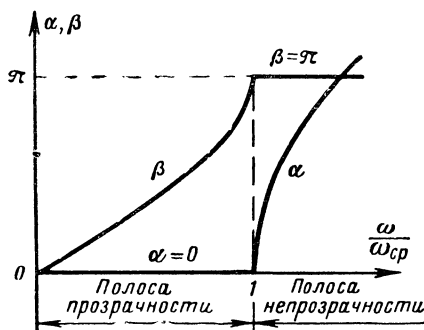


Рис. 7-66. Характеристика фильтра нижних частот.

без поглощения полосу частот от 0 до $\omega_{\text{ср}}$. Частота $\omega_{\text{ср}} = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ называется граничной частотой фильтра или частотой среза.

В полосе прозрачности согласно соотношениям (7-5-5)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0; \\ \beta &= 2 \arcsin \sqrt{\frac{\omega^2 LC}{4}} = 2 \arcsin \frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}}. \end{aligned} \right\} \quad (7-5-9)$$

Знак плюс в определении фазовой постоянной β выбран из условия положительного наклона ее характеристики в полосе прозрачности.

В полосе непрозрачности ($\omega > \omega_{\text{ср}}$) согласно соотношениям (7-5-6)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2 \operatorname{arch} \frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}}; \\ \beta &= \pi. \end{aligned} \right\} \quad (7-5-9a)$$

Характеристики фильтра нижних частот приведены на рис. 7-66.

Согласно формуле (7-5-7) характеристическое сопротивление Т-звена такого фильтра

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2}}. \quad (7-5-10)$$

При изменении частоты от 0 до ω_{cp} сопротивление Z_{0T} является действительным и изменяется от $\sqrt{\frac{L}{C}}$

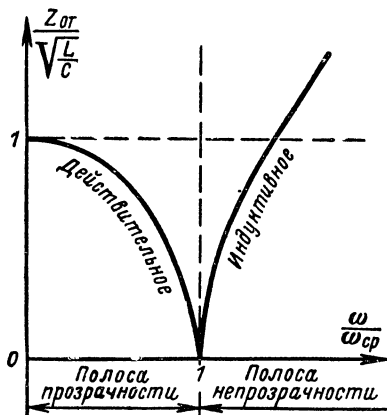


Рис. 7-67. Кривая зависимости характеристического сопротивления фильтра нижних частот из Т-звеньев.

(при $\omega=0$) до 0 (при $\omega=\omega_{cp}$). В полосе непрозрачности ($\omega>\omega_{cp}$) характеристическое сопротивление фильтра имеет индуктивный характер и растет от 0 до ∞ при изменении частоты от ω_{cp} до ∞ .

Перепишем предыдущую формулу в следующем виде:

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_{cp}}\right)^2}.$$

При $\omega/\omega_{cp} \rightarrow \infty$ в подкоренном выражении можно пренебречь единицей; при этом

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{j\omega}{\omega_{cp}} = j \frac{\omega L}{2},$$

т. е. при частотах, значительно больших частоты среза, характеристическое сопротивление фильтра определяется только индуктивностью первого звена $L/2$. Зависимость $Z_{0П}$ от частоты показаны на рис. 7-67.

Если фильтр нижних частот выполнен из П-звеньев (рис. 7-68), то полоса прозрачности, затухание и фазовые сдвиги в нем такие же, как в фильтре из Т-звеньев;

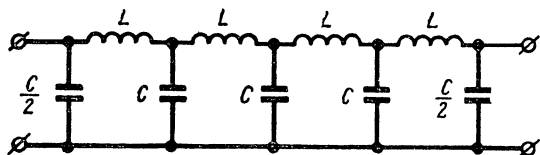


Рис. 7-68. Схема фильтра нижних частот из П-звеньев.

отличаться он будет только своим характеристическим сопротивлением, которое согласно соотношению (7-5-8) определяется выражением

$$Z_{0П} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega/\omega_{ср})^2}}. \quad (7-5-10a)$$

При изменении частоты от 0 до $\omega_{ср}$ характеристическое сопротивление $Z_{0П}$ является действительным и изменяется от величины $\sqrt{\frac{L}{C}}$ (при $\omega=0$) до ∞ (при $\omega=\omega_{ср}$). В полосе непрозрачности $Z_{0П}$ является емкостным и изменяется от ∞ до 0.

Представляя характеристическое сопротивление фильтра из П-звеньев в виде

$$Z_{0П} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 + (j\omega/\omega_{ср})^2}}$$

и пренебрегая при $\omega/\omega_{ср} \rightarrow \infty$ в подкоренном выражении единицей, получаем:

$$Z_{0П} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\omega_{ср}}{j\omega} = \frac{2}{j\omega C};$$

следовательно, при частотах, значительно больших частоты среза, характеристическое сопротивление фильтра

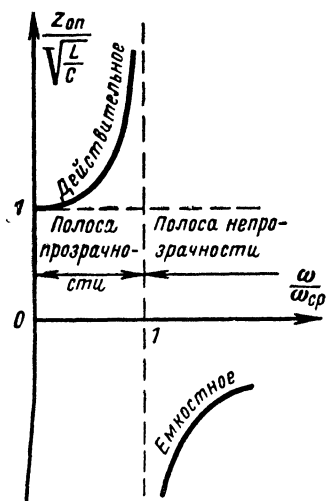


Рис. 7-69. Кривая, показывающая изменение характеристического сопротивления фильтра нижних частот из П-звеньев при изменении частоты.

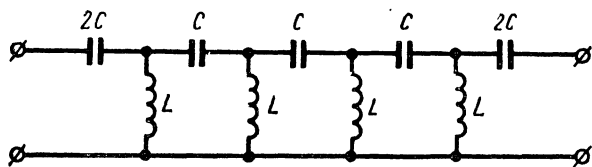


Рис. 7-70. Схема фильтра верхних частот из Т-звеньев.

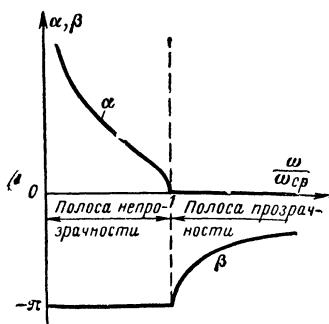


Рис. 7-71. Характеристики фильтра верхних частот.

определяется емкостью первого звена. Зависимость характеристического сопротивления П-звена от частоты показана на рис. 7-69.

Фильтр верхних частот состоит из последовательно включенных емкостей и параллельно включенных индуктивностей (рис. 7-70). В этом случае $Z_1 = \frac{1}{j\omega C}$, $Z_2 = j\omega L$ и $Z_1 Z_2 = \frac{L}{C}$. Полоса прозрачности фильтра верхних частот согласно соотношению (7-5-3) определяется неравенством

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{L}{4\omega^2 LC} = -\left(\frac{\omega_{cp}}{\omega}\right)^2 \leq 0;$$

в обратных величинах это неравенство записывается так:

$$1 \leq \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2} \leq \infty;$$

здесь $\omega_{cp} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ — частота среза.

Таким образом, полоса прозрачности фильтра верхних частот определяется соотношением

$$\omega_{cp} \leq \omega \leq \infty,$$

т. е. через фильтр проходят все частоты выше частоты среза.

На частотах $\omega > \omega_{cp}$ постоянная затухания $\alpha = 0$, а фазовая постоянная в соответствии с формулой (7-5-5) определяется выражением

$$\beta = -2 \arcsin \frac{\omega_{cp}}{\omega}. \quad (7-5-11)$$

Вне полосы прозрачности ($\omega_{cp}/\omega > 1$) согласно соотношениям (7-5-6)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2 \operatorname{arch} \frac{\omega_{cp}}{\omega}; \\ \beta &= -\pi. \end{aligned} \right\} \quad (7-5-11a)$$

Фазовая характеристика и характеристика затухания однозвенного фильтра верхних частот приведены на рис. 7-71.

В соответствии с формулой (7-5-7) характеристическое сопротивление такого фильтра

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2}}. \quad (7-5-12)$$

В полосе прозрачности ($\omega > \omega_{cp}$) Z_{0T} является действительным сопротивлением и величина его изменяется от 0 до $\sqrt{\frac{L}{C}}$ при изменении частоты от ω_{cp} до ∞ .

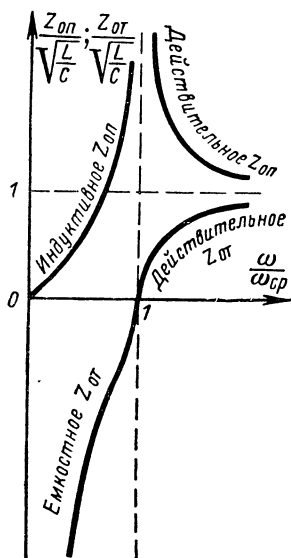


Рис. 7-72. Кривые изменения характеристических сопротивлений фильтров верхних частот из Т- и П-звеньев.

В полосе непрозрачности ($\omega < \omega_{cp}$) Z_{0T} имеет емкостной характер и при изменении частоты от ω_{cp} до 0 изменяется от 0 до ∞ . При $\omega \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} Z_{0T} &= \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\left(\frac{\omega_{cp}}{j\omega}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\omega_{cp}}{j\omega} \rightarrow \frac{1}{2j\omega C} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

и определяется емкостью $2C$ первого звена. Зависимость Z_{0T} от частоты иллюстрирует рис. 7-72.

Если фильтр верхних частот составлен из П-звеньев, то согласно формуле (7-5-8) его характеристическое сопротивление

$$Z_{0\Pi} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2}}}. \quad (7-5-12a)$$

В полосе прозрачности ($\omega > \omega_{cp}$) $Z_{0\Pi}$ является действительным и при изменении частоты от ω_{cp} до ∞ изменяется от ∞ до $\sqrt{\frac{L}{C}}$. В полосе непрозрачно-

сти ($\omega < \omega_{\text{ср}}$) $Z_{\text{оп}}$ имеет индуктивный характер и изменяется от ∞ до 0. При $\omega \rightarrow 0$

$$Z_{\text{оп}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\text{ср}}}{j\omega}\right)^2}} =$$

$$= j \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}} = 2j\omega L \rightarrow 0$$

и определяется индуктивностью первого звена $2L$. Изменение $Z_{\text{оп}}$ с частотой иллюстрирует рис. 7-72.

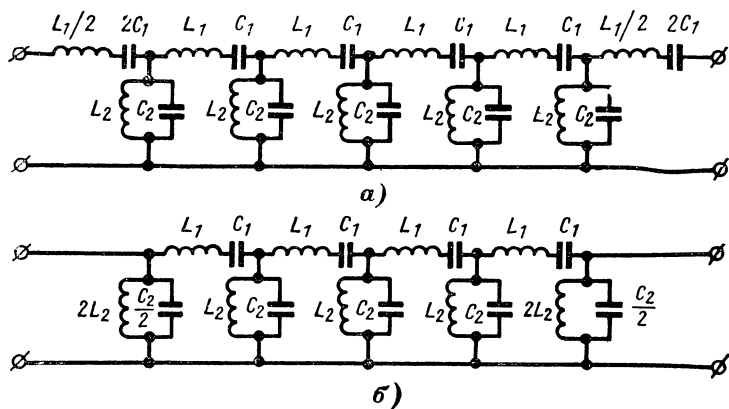


Рис. 7-73. Схема полосового фильтра из Т-звеньев (а) и П-звеньев (б).

Полосовой фильтр. Так называют фильтр, полоса прозрачности которого ограничена сверху и снизу. Полосовые фильтры представляют собой соединение фильтров верхних и нижних частот. При этом элементы, образующие сопротивление Z_1 , соединены последовательно, а элементы, образующие сопротивления Z_2 — параллельно (рис. 7-73). В этом случае

$$Z_1 = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j\omega C_1} (1 - \omega^2 L_1 C_1);$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2}} = j\omega L_2 \frac{1}{(1 - \omega^2 L_2 C_2)}.$$

Полагая, что резонансные частоты параллельных и последовательных контуров одинаковы, т. е. $\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_0$, получаем:

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right);$$

$$Z_2 = j\omega L_2 \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)},$$

$$Z_1 Z_2 = \frac{L_2}{C_1}.$$

Граничные частоты полосы прозрачности полосового фильтра ω_1 и ω_2 можно найти, воспользовавшись соотношением (7-5-3). В данном случае

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2}{4\omega^2 C_1 L_2} \leq 0.$$

Отсюда

$$4\omega^2 L_1 C_2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2. \quad (7-5-13)$$

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0. \quad (7-5-14)$$

Решение уравнения (7-5-13) дает:

$$\omega = \omega_0 \left(\mp \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \pm \sqrt{\frac{L_2}{L_1} + 1} \right).$$

Так как частота может быть только положительной величиной, то возможны два ее значения:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \frac{L_2}{L_1}} \pm \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right).$$

Из уравнения (7-5-14) следует, что $\omega = \omega_0$. Однако частота ω_0 не является граничной, так как значение ее лежит между ω_1 и ω_2 . Можно показать, что

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{L_2}{L_1} - \frac{L_2}{L_1} \right) = \omega_0^2,$$

т. е. частота ω_0 является средним геометрическим значений ω_1 и ω_2 .

Полоса прозрачности полосового фильтра

$$2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\omega_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{2}{\sqrt{C_2 L_1}}$$

определяется лишь индуктивностью L_1 и емкостью C_2 и от резонансной частоты не зависит.

В полосе прозрачности фильтра ($\omega_1 < \omega < \omega_2$) постоянная затухания $\alpha = 0$, а фазовая постоянная в соответствии с формулой (7-5-5) равна:

$$\begin{aligned} \beta &= \pm 2 \arcsin \frac{1}{2} \left| \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\omega \sqrt{C_1 L_2}} \right| = \\ &= \pm 2 \arcsin \left| \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}{2\omega \sqrt{\frac{C_1^2 L_1^2}{C_2 L_1}}} \right| = \pm 2 \arcsin \left| \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}{\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0}} \right|, \quad (7-5-15) \end{aligned}$$

так как $C_1 L_1 = C_2 L_2$ и, следовательно, $L_2 = C_1 L_1 / C_2$.

Так как фазовая характеристика в полосе прозрачности должна иметь положительный наклон, то в выражении (7-5-15) знак плюс берется при $\omega > \omega_0$, а знак минус — при $\omega < \omega_0$.

Вне полосы прозрачности ($\omega < \omega_1$ и $\omega > \omega_2$) в соответствии с (7-5-6)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2 \operatorname{arch} \left| \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}{\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0}} \right|; \\ \beta &= \pm \pi, \end{aligned} \right\} \quad (7-5-15a)$$

т. е. чем уже полоса прозрачности, тем больше затухание в полосе непрозрачности. Зависимость β и α от отношения ω/ω_0 показана графически на рис. 7-74.

В области $\omega > \omega_0$ характеристики фильтра совпадают с характеристиками фильтра нижних частот, а в области $\omega < \omega_0$ — с характеристиками фильтра верхних частот.

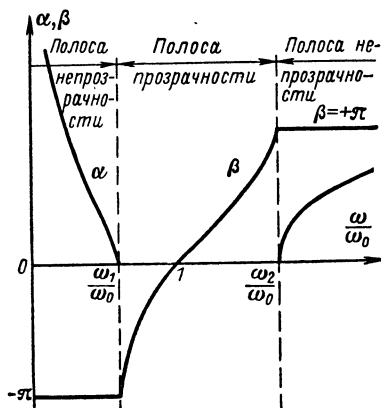


Рис. 7-74. Характеристики полосового фильтра.

Характеристическое сопротивление полосового фильтра найдем с помощью формулы (7-5-7). В данном случае

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1} \left[1 - \frac{\left| \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right|^2}{\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right]}. \quad (7-5-16)$$

На частоте $\omega = \omega_0$

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$$

и на границах полосы прозрачности

$$Z_{0T}(\omega_1) = Z_{0T}(\omega_2) = 0.$$

Кривая зависимости Z_{0T} от ω приведена на рис. 7-75; в области $\omega > \omega_0$ вид кривой полосового фильтра совпадает с видом кривой для фильтра нижних частот, в области $\omega < \omega_0$ — для фильтра верхних частот.

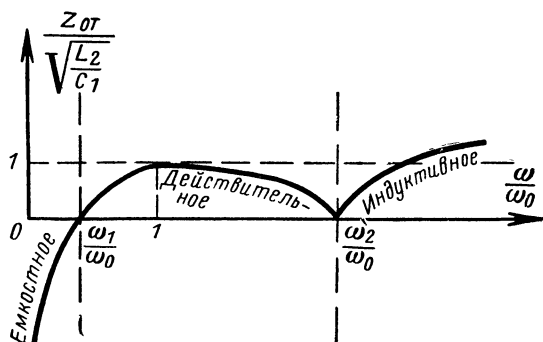


Рис. 7-75. Кривые изменения характеристического сопротивления полосового фильтра из Т-звеньев.

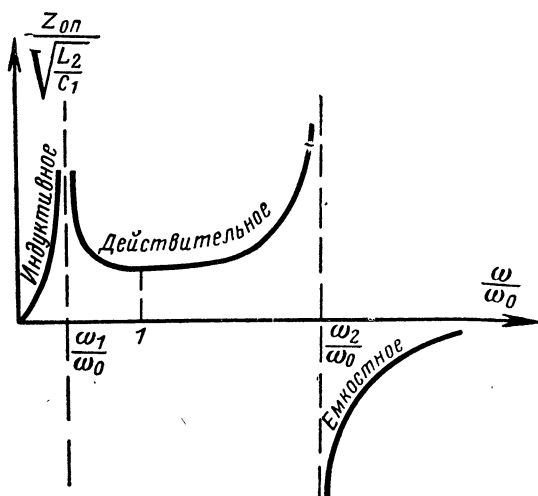


Рис. 7-76. Кривые зависимости характеристического сопротивления полосового фильтра из П-звеньев от частоты.

Характеристическое сопротивление П-звена полосового фильтра

$$Z_{0П} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2}{\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}}}. \quad (7-5-16a)$$

График $Z_{0П}$ приведен на рис. 7-76.

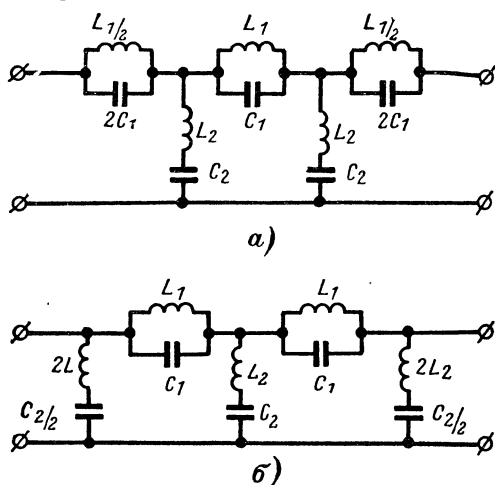


Рис. 7-77. Схемы заградительных фильтров из Т-звеньев (а) и П-звеньев (б).

Заградительный фильтр имеет полосу непрозрачности (заграждения), ограниченную со стороны нижних и верхних частот полосами прозрачности. Такой фильтр также представляет собой соединение фильтров верхних и нижних частот, однако, в отличие от полосового фильтра, элементы, образующие сопротивления Z_1 , включены параллельно, а элементы, образующие сопротивления Z_2 , соединены последовательно (рис. 7-77). При этом

$$Z_1 = j\omega L_1 \frac{1}{(1 - \omega^2 L_1 C_1)};$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2} (1 - \omega^2 L_2 C_2),$$

Полагая, что собственные частоты параллельных и последовательных контуров одинаковы, т. е. $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$, получаем:

$$Z_1 = j\omega L_1 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}};$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right);$$

$$Z_1 Z_2 = \frac{L_1}{C_2}.$$

Граничные частоты обеих полос прозрачности можно найти на основе соотношения (7-5-3). В данном случае

$$-1 \leq \frac{Z_1}{4Z_2} = \frac{-\omega^2 L_1 C_2}{4 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2} \leq 0.$$

На границах полос прозрачности

$$\omega^2 L_1 C_2 = 4 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2, \quad (7-5-17)$$

$$Z_1 = 0. \quad (7-5-17a)$$

Решая уравнение (7-5-17), получаем:

$$\omega = \omega_0 \left(\mp \frac{1}{4} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \pm \sqrt{\frac{1}{16} \frac{L_1}{L_2} + 1} \right).$$

Так как частота может быть только положительной величиной, то физический смысл имеют корни

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left(\sqrt{\frac{1}{16} \frac{L_1}{L_2} + 1} \mp \frac{1}{4} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \right).$$

Уравнение (7-5-17a) удовлетворяется при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. Следовательно, заградительный фильтр «прозрачен» для частот $0 \div \omega_1$ и $\omega_2 \div \infty$. Между частотами ω_1 и ω_2 расположена полоса непрозрачности; ширина ее определяется выражением

$$2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{2\sqrt{C_1 L_2}}.$$

В полосах прозрачности

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0; \\ \beta &= \pm 2 \arcsin \left| \frac{\omega \omega_0 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \right| = \\ &= \pm 2 \arcsin \left| \frac{\omega \sqrt{\frac{C_2 L_2}{C_1 L_1}}}{2\omega_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \right| = \\ &= \pm 2 \arcsin \left| \frac{\frac{\omega}{2\Delta\omega}}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1} \right|, \end{aligned} \right\} \quad (7-5-18)$$

так как $L_1 = \frac{C_2 L_2}{C_1}$.

При частотах $\omega < \omega_0$ фазовая постоянная имеет положительное значение, а при частотах $\omega > \omega_0$ — отрицательное.

В полосе непрозрачности

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \pm \pi; \\ \alpha &= 2 \operatorname{arch} \left| \frac{\frac{\omega}{2\Delta\omega}}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1} \right|, \end{aligned} \right\} \quad (7-5-18a)$$

т. е. чем уже полоса непрозрачности, тем больше затухание в ней.

Зависимость α и β от частоты для заградительного фильтра иллюстрируется графиком на рис. 7-78. Из этого графика видно, что при частотах $\omega < \omega_0$ кривая имеет вид кривой фильтра нижних частот, а при частотах $\omega > \omega_0$ — фильтра верхних частот.

Согласно формуле (7-5-7) характеристическое сопротивление Т-звена

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{\omega}{2\Delta\omega}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)^2} \quad (7-5-19)$$

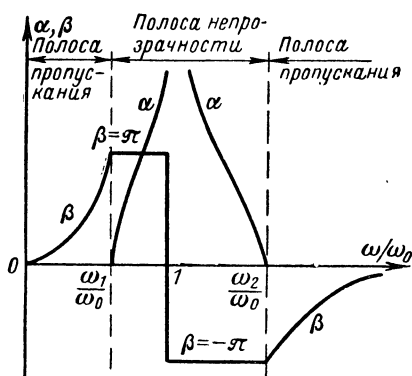


Рис. 7-78. Характеристики заградительного фильтра.

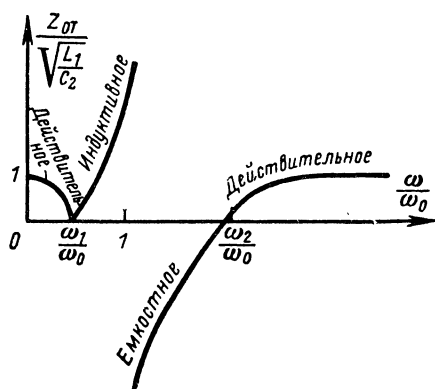


Рис. 7-79. Кривые зависимости характеристического сопротивления заградительного фильтра из Т-звеньев от частоты.

и П-звена

$$Z_{\text{оп}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{\omega}{2\Delta\omega}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)^2}}. \quad (7-5-19a)$$

Зависимость характеристического сопротивления $Z_{\text{от}}$ от частоты приведена на рис. 7-79.

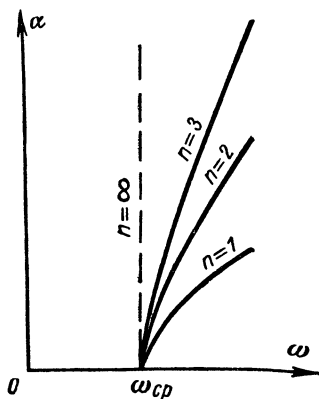


Рис. 7-80. Затухание фильтров нижних частот при различном количестве звеньев.

Влияние количества звеньев и нагрузки фильтра на его характеристики. Чем больше звеньев содержит фильтр, тем больше крутизна кривой затухания в полосе непрозрачности. Вместе с тем полоса прозрачности фильтра определяется только значениями Z_1 и Z_2 и от числа звеньев не зависит [см. неравенство (7-5-3)]. Постоянная передачи для цепочки из n одинаковых звеньев, каждое из которых имеет постоянную передачи k_0 , согласно формуле (7-3-52a) равна:

$$K_0 = nk_0 = n\beta - jn\alpha.$$

Следовательно, затухание цепочки звеньев в полосе непрозрачности в n раз больше затухания одного звена и увеличение числа звеньев позволяет увеличить затухание в полосе непрозрачности. При этом возрастает и крутизна характеристики затухания около границы. В полосе прозрачности затухание равно нулю. Характеристика реального фильтра приближается к характеристике идеального при увеличении числа звеньев (рис. 7-80).

Рассматривая схемы фильтров, мы предполагаем, что вход и выход фильтра согласованы с источником э. д. с. и с нагрузкой, т. е. каждое звено фильтра и вся цепочка в целом нагружены на сопротивление, равное характеристическому. В действительности это условие не выполня-

ется, так как характеристическое сопротивление фильтра зависит от частоты; оно является действительным в полосе прозрачности и реактивным — в полосе непрозрачности. В большей части полосы прозрачности характеристическое сопротивление звеньев мало отличается по величине от $Z_1 Z_2$. Это значит, что если нагрузить фильтр верхних или нижних частот действительным сопротивле-

нием, равным $\sqrt{\frac{L}{C}}$, а полосовой или заградительный сопротивлением $\sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$ и $\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}$ соответственно, то в большей части полосы прозрачности приближенно будет выполнено условие $R_i = R_n \approx Z_0$. В полосе непрозрачности вследствие большого затухания выполнение этого условия необязательно.

При граничных частотах полосы прозрачности условие согласования нарушается: коэффициент передачи не равен $e^{-j\beta}$ и характеристики фильтров отклоняются от той формы, которую они должны иметь согласно приведенной элементарной теории. Постоянная затухания идеального фильтра при согласованном включении равна нулю во всей полосе прозрачности. При реальной нагрузке по мере приближения к границам полосы пропускания затухание, обусловленное отражением, имеет колебательный характер из-за ухудшения согласования нагрузочного и характеристического сопротивлений.

Элементы всякого реального фильтра обладают потерями и поэтому затухание фильтра в полосе прозрачности не равно нулю; оно тем больше, чем больше потери в фильтре.

Наличие в реальных фильтрах потерь и невозможность полного согласования входа и выхода фильтра с источником э. д. с. и нагрузкой не снижает ценности изложенной выше элементарной теории, которая дает возможность легко получить представление об устройстве и действии фильтра.

К недостаткам фильтров типа К относится малая крутизна затухания вне полосы прозрачности и резкая зависимость характеристического сопротивления в пределах полосы прозрачности от частоты.

Фильтры типа М имеют более совершенные характеристики по сравнению с фильтрами типа К. Получают фильтры типа М из фильтров типа К путем перераспре-

деления реактивных сопротивлений в параллельных или последовательных плечах лестничной схемы. Так, например, в фильтре нижних частот (рис. 7-81, а) можно часть индуктивностей перенести в параллельные плечи (рис. 7-81, б) или часть емкостей в последовательные плечи (рис. 7-81, в). Рассмотрим схему на рис. 7-81, б, поставив условием, чтобы характеристическое сопротивление Z'_0

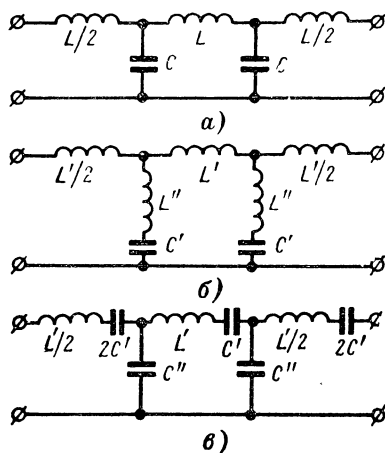


Рис. 7-81. Преобразование фильтра нижних частот типа К (а) в фильтр типа М (б, в).

такого фильтра типа М совпало во всей полосе прозрачности с Z_0 фильтра типа К (он называется прототипом) (рис. 7-81, а).

Для Т-звена из условия $Z_{0T} = Z'_{0T}$ имеем:

$$Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4} = Z'_1 Z'_2 + \frac{Z'^2_1}{4}. \quad (7-5-20)$$

Отношение $Z'_1/Z_1 = m < 1$ считается заданным. Подставляя его в соотношение (7-5-20), получаем:

$$Z_2 + \frac{Z_1}{4} = m Z'_2 + \frac{m^2}{4} Z_1.$$

Отсюда

$$Z'_2 = \frac{Z_2}{m} + \frac{Z_1(1+m^2)}{4m};$$

так как $Z_1 = j\omega L$ и $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$, то

$$\left. \begin{aligned} Z'_1 &= j\omega mL = j\omega L'; \\ Z'_2 &= j\omega \frac{(1-m^2)}{4m} L + \frac{1}{j\omega mC}. \end{aligned} \right\} \quad (7-5-21)$$

Полосу пропускания фильтра типа М можно найти на основе выражения (7-5-3). В данном случае

$$-1 \leq \frac{Z'_1}{4Z'_2} = \frac{\omega mL}{\omega \frac{(1-m^2)}{m} L - \frac{4}{\omega mC}} \leq 0$$

или

$$-1 \leq \frac{\omega^2 m^2 LC}{\omega^2 C (1-m^2) L - 4} \leq 0.$$

Из граничных условий получим:

$$\omega_1 = 0;$$

$$\omega_2 = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2m}{\sqrt{L'C'}} = \omega_{\text{ср}},$$

т. е. граничные частоты таковы же, как и у фильтра нижних частот типа К, являющегося прототипом.

В полосе прозрачности согласно формулам (7-5-5) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0; \\ \beta &= 2\arcsin \frac{m\chi}{\sqrt{|1-(1-m^2)\chi^2|}}, \end{aligned} \right\} \quad (7-5-22)$$

где $\chi = \omega/\omega_{\text{ср}}$.

В полосе непрозрачности согласно соотношениям (7-5-6)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2\text{arch} \frac{m\chi}{\sqrt{|1-(1-m^2)\chi^2|}}; \\ \beta &= \pi. \end{aligned} \right\} \quad (7-5-22a)$$

Если знаменатель подкоренного выражения в первой формуле (7-5-22a) обращается в нуль, что имеет место при $\omega' = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{1-m^2}}$, то $\alpha \rightarrow \infty$. Это означает, что при

$\omega' = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{1-m^2}}$ наблюдается резонанс в ветви, содержа-

щей элементы C' и L'' и коэффициент передачи звена обращается в нуль. Наличие резонансных частот в полосе непрозрачности позволяет существенно повысить крутизну кривой затухания вблизи границы полосы прозрачности. Уменьшая m , можно приблизить резонансную частоту ω' к граничной частоте $\omega_{\text{ср}}$ и получить более крутой склон характеристики (рис. 7-82).

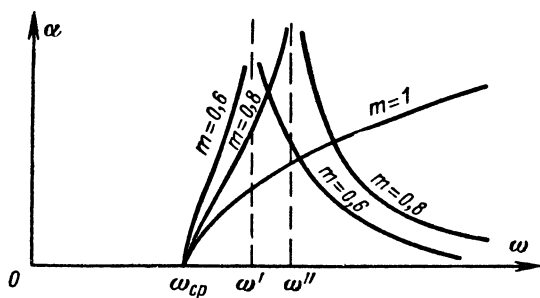


Рис. 7-82. Кривые затухания фильтров нижних частот типа М.

Формулы (7-5-22а) верны в интервале частот $\omega_{\text{ср}} \leq \omega \leq \frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{1-m^2}} = \omega'$, когда Z'_1 и Z'_2 представляют собой

реактивные сопротивления противоположных знаков. При $\omega > \omega'$ реактивные сопротивления Z'_1 и Z'_2 имеют одинаковый знак и схема превращается в делитель напряжения. Поэтому с увеличением частоты в пределах $\omega > \omega'$ затухание уменьшается. При $m=1$ фильтр типа М обращается в фильтр нижних частот типа К, для которого затухание увеличивается с увеличением частоты. Поэтому на практике фильтры составляют из звеньев с разными значениями m , в том числе и с $m=1$.

Формулы (7-5-20) и (7-5-21) показывают, что согласование характеристических сопротивлений звеньев возможно при любых значениях m , которые, однако, не должны быть больше единицы.

Характеристическое сопротивление Т-звена равно:

$$Z'_{0T} = Z_{0T}. \quad (7-5-23)$$

В случае составленного из элементов Z'_1 и Z'_2 П-звена

$$Z'_{0П} = \sqrt{\frac{\frac{Z'_1 Z'_2}{1 + \frac{Z'_1}{4Z'_2}}}{1 - (1 - m^2) \chi^2}} = Z_{0П} [1 - (1 - m^2) \chi^2], \quad (7-5-23a)$$

т. е. $Z'_{0П}$ зависит от m . Оптимальное, в смысле постоянства в полосе пропускания, $Z'_{0П}$ получается при $m=0,6$.

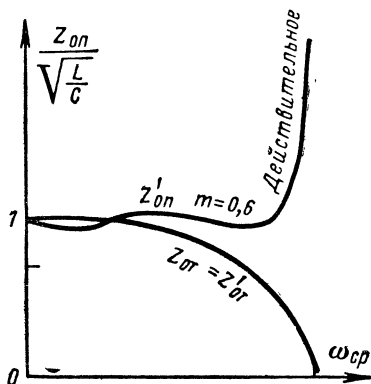


Рис. 7-83. Кривые изменения характеристического сопротивления фильтра нижних частот типа М.

Это обстоятельство используется для согласования фильтров с нагрузками путем включения на входе и выходе многозвенных фильтров полувзвеньев с $m=0,6$.

Зависимость характеристического сопротивления П-звена от частоты при $m=0,6$ приведена на рис. 7-83.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

8-1. ПАРАМЕТРЫ ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

Ранее было отмечено (см. § 6-1), что значения параметров электрических цепей при переменном токе отличаются от значений, определяемых при постоянном токе.

Найдем погонные параметры $R_0[\text{ом/м}]$ и $L_0[\text{гн/м}]$ одночного провода и двухпроводных линий.

Уединенный круглый провод радиусом a обладает погонным сопротивлением Z_0 , которое может быть найдено из решения волнового уравнения (2-1-10)

$$\Delta \dot{E} + k^2 \dot{E} = 0.$$

Переписывая это уравнение в цилиндрической системе координат [см. формулу (Д-6-22)] и полагая, что в данном случае поле внутри провода характеризуется составляющими: $E_z = E_z(r)$, $H_\alpha = H_\alpha(r)$, $E_r = E_\alpha = 0$ и $H_r = H_z = 0$, находим:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial r} + k^2 \dot{E}_{mz} = 0. \quad (8-1-1)$$

Здесь на основании формулы (2-7-24а)

$$k \approx \beta(1-j) = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{2}} (1-j) = \frac{\sqrt{2}}{\Delta} e^{-j\frac{\pi}{4}}. \quad (8-1-1a)$$

Решением уравнения (8-1-1) согласно выражению (Д-6-28), в котором для нашего случая $n=0$, и с учетом последнего соотношения (Д-6-34) является выражение

$$\dot{E}_{mz} = C_1 J_0(kr).$$

Полагая, что напряженность поля на поверхности провода $\dot{E}_{mz(r=a)} = E$ задана, находим выражения, определяющие распределение электрического поля и плотности тока внутри провода:

$$\dot{E}_{mz} = E \frac{J_0(\dot{k}r)}{J_0(\dot{k}a)}; \quad (8-1-2)$$

$$\dot{j}_z = \sigma E \frac{J_0(\dot{k}r)}{J_0(\dot{k}a)}. \quad (8-1-3)$$

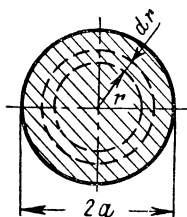


Рис. 8-1. К определению плотности переменного тока в круглом проводе.

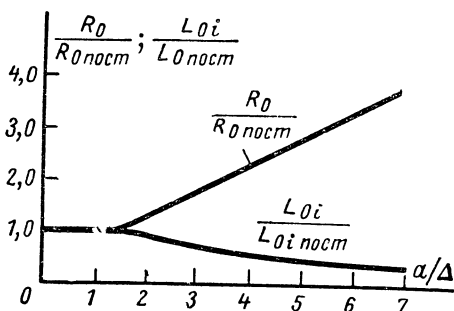


Рис. 8-2. Зависимость погонного сопротивления и погонной индуктивности круглого провода от отношения a/Δ .

На основании выражений (8-1-2) и (8-1-3) с учетом соотношений (Д-5-12) и (Д-6-36) находим комплексное действующее значение протекающего по проводу тока

$$\dot{I} = \int_S \dot{j}_z dS = \int_0^a \dot{j}_z 2\pi r dr = 2\pi a \frac{\sigma E}{\dot{k}} \frac{J_1(\dot{k}a)}{J_0(\dot{k}a)}.$$

Следовательно, определяемое внутренним полем комплексное сопротивление

$$Z_{oi} = \frac{E}{\dot{I}} = \frac{\dot{k} J_0(\dot{k}a)}{2\pi a \sigma J_1(\dot{k}a)} = R_0 + jX_{oi}. \quad (8-1-4)$$

На основании соотношений (Д-6-30) и (Д-6-33) нетрудно убедиться, что $X_{oi} > 0$, т. е. оно имеет индуктивный характер:

$$X_{oi} = \omega L_{oi}.$$

При $|\dot{k}a| \approx \left| (1-j) \frac{a}{\Delta} \right| \gg 1$ согласно первой формуле (Д-6-33) выражение (8-1-4) принимает вид:

$$Z_{0i} \approx \frac{1+j}{2\pi a \sigma \Delta} = R_0 + j \omega L_{0i}. \quad (8-1-4a)$$

На основании последнего выражения находим:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{2\pi a \sigma \Delta} = R_{0\text{пост}} \frac{a}{2\Delta}; \\ L_{0i} &= \frac{1}{2\pi a \sigma \Delta \omega} = L_{0\text{пост}} \frac{2\Delta}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (8-1-5)$$

В этих формулах $R_{0\text{пост}} = 1/\sigma\pi a^2$ — погонное сопротивление провода при постоянном токе [см. выражение (5-6-9)];

$L_{0\text{пост}} = \mu_a/8\pi$ — погонная индуктивность, определяющая внутреннее магнитное поле при постоянном токе [см. формулу (5-5-1)].

Из соотношений (8-1-5) следует, что при большой частоте, когда эквивалентная глубина проникновения поля Δ [см. (2-7-25)] много меньше радиуса провода a , сопротивление его можно определять как сопротивление трубки с толщиной стенки Δ . Очевидно, что сопротивление это в $a/2\Delta$ раз больше, чем сопротивление провода при постоянном токе. Из второй формулы (8-1-5) следует, что при тех же условиях индуктивность, определяющая внутреннее магнитное поле уединенного провода, значительно меньше, чем при постоянном токе [см. формулу (5-5-1)]. Вследствие этого при высокой частоте индуктивностью во многих практических случаях можно пренебрегать.

На рис. 8-2 приведены построенные на основе соотношений (8-1-4) и (8-1-5) кривые, иллюстрирующие относительные изменения погонного сопротивления и погонной индуктивности круглого провода при различных отношениях a/Δ .

Двухпроводная линия коаксиальной конструкции (рис. 4-17, а). При высокой частоте, когда $\Delta \ll a_1$ и $\Delta \ll a_3 - a_2$, погонное сопротивление такой линии

$$R_0 \approx \frac{1}{\sigma 2\pi \Delta} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right), \quad (8-1-6)$$

а ее погонная индуктивность [см. формулу (5-5-26)]

$$L_0 \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}.$$

Линия из двух круглых параллельных проводов. Внутреннее поле при высокой частоте сосредоточивается у внутренних поверхностей проводов линии (эффект «близости») при разнонаправленных токах (рис. 8-3) и у внешних — при токах одного направления (рис. 8-4). Погонное сопротивление такой линии зависит от рас-

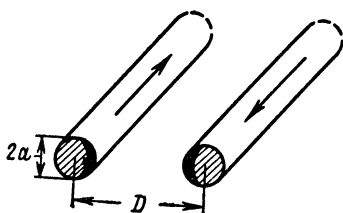


Рис. 8-3. Распределение плотности тока в двухпроводной линии при токах противоположного направления.

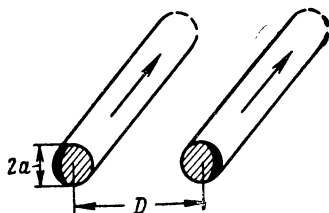


Рис. 8-4. Распределение плотности тока в проводниках двухпроводной линии при токах одинакового направления.

стояния между ее проводами D и в общем случае увеличивается с ростом отношения a/D . На основе выражений (8-1-5) при $a/D \ll 0,1$ погонное сопротивление

$$R_0 \approx \frac{1}{\sigma \pi a \Delta}. \quad (8-1-6a)$$

Погонную индуктивность такой линии при высокой частоте можно определить по формуле (5-5-3a):

$$L_0 \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{D}{a} \right).$$

Уединенный ленточный провод (рис. 8-5, а), ширина которого значительно больше толщины $2a$, обладает поверхностным эффектом с обеих сторон. Выражение для плотности тока в ленте в зависимости от $2a/\Delta$ может быть найдено из решения волнового уравнения (2-1-10), переписанного с учетом равенства $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{J}/\sigma$ в виде

$$\frac{\partial^2 J_{m3}}{\partial x_1^2} + k^2 J_{m3} = 0.$$

В этом уравнении \dot{k} определяется выражением (8-1-1а), вследствие чего оно может быть переписано также в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 j_{m3}}{\partial x_1^2} - j\omega\mu_a\sigma\dot{j}_{e3} = 0.$$

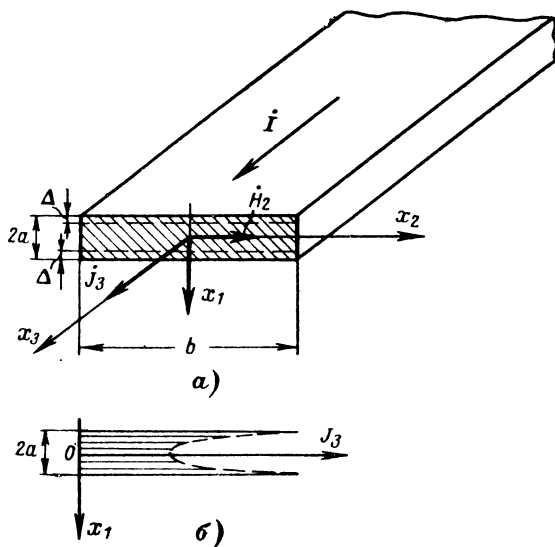


Рис. 8-5. Уединенный ленточный провод (а) и распределение плотности тока в нем (б).

Решением этого уравнения с учетом симметрии, т. е. когда

$$j_{m3}(-x_1) = j_{m3}(+x_1),$$

согласно формуле (Д-6-19а) является следующее выражение:

$$j_{d3} = \frac{1}{\sqrt{2}} j_{m3} = A (e^{j\dot{k}x_1} + e^{-j\dot{k}x_1}) = 2A \operatorname{ch}(j\dot{k}x_1).$$

Полагая протекающий в ленте ток $I = \int_{-a}^{+a} j_{d3} b dx_1$ заданным, выражаем постоянную интегрирования через I ,

$$A = j \frac{\dot{k}I}{4b \operatorname{sh}(j\dot{k}x_1)}.$$

На основании этого с учетом (Д-5-5) и (Д-5-6) плотность тока в уединенной ленте определяется выражением

$$\begin{aligned} j_{д3} &= j \frac{kl}{2b} \frac{\operatorname{ch}(j k x_1)}{\operatorname{sh}(j k a)} = \\ &= \frac{I}{\sqrt{2} b} \beta \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2\beta x_1 + \cos 2\beta x_1}{\operatorname{ch} 2\beta a - \cos 2\beta a}} e^{j\psi_i}, \end{aligned} \quad (8-1-7)$$

в котором

$$\psi_i = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}(\operatorname{th} \beta x_1 \cdot \operatorname{tg} \beta x_1) - \operatorname{arctg}(\operatorname{cth} \beta a \cdot \operatorname{tg} \beta a).$$

Используя второе уравнение системы (2-1-5), находим комплексное действующее значение напряженности магнитного поля внутри ленты

$$\begin{aligned} \dot{H}_{д2} &= \frac{1}{j \omega \mu_a \sigma} \frac{\partial j_{д3}}{\partial x_1} = \\ &= \frac{I}{2b} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2\beta x_1 - \cos 2\beta x_1}{\operatorname{ch} 2\beta a - \cos 2\beta a}} e^{j\psi_n}, \end{aligned} \quad (8-1-7a)$$

где

$$\psi_n = \operatorname{arctg}(\operatorname{cth} \beta x_1 \operatorname{tg} \beta x_1) - \operatorname{arctg}(\operatorname{cth} \beta a \cdot \operatorname{tg} \beta a).$$

На рис. 8-5,б представлен график распределения плотности тока [модуль выражения (8-1-7)], который иллюстрирует поверхностный эффект в ленточном проводе.

На основании формул (1-6-7) и (6-4-2а) мощность джоулевых потерь на единицу длины ленточного провода

$$P_0 = 2 \int_0^a J_{д3}^2 \frac{1}{\sigma} b dx = I^2 R_0;$$

следовательно, погонное сопротивление уединенного ленточного провода

$$R_0 = \frac{P_0}{I^2} = R_{0\text{пост}} \beta a \frac{\operatorname{sh} 2\beta a + \sin 2\beta a}{\operatorname{ch} 2\beta a - \cos 2\beta a}, \quad (8-1-8)$$

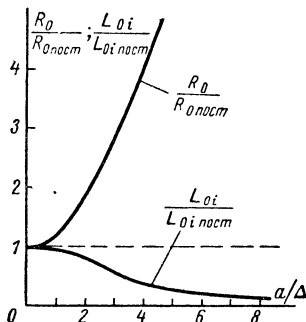
где $R_{0\text{пост}} = 1/2\sigma ab$ — сопротивление на единицу длины ленточного провода при постоянном токе.

При «тонкой» ленте и переменном токе низкой частоты, когда $\beta a \rightarrow 0$, сопротивление ленточного провода практически не отличается от сопротивления при посто-

янном токе. При «толстой» ленте и переменном токе высокой частоты, когда $\beta a \rightarrow \infty$,

$$R_0 \approx R_{0\text{пост}} \beta a = \frac{1}{2\sigma \Delta b}. \quad (8-1-8a)$$

Следовательно, сопротивление уединенного ленточного провода при высокой частоте можно рассчитывать лишь



с учетом поперечного сечения эквивалентных слоев проникновения поля (как сопротивление ленточного провода толщиной 2Δ при постоянном токе). Увеличение сопротивления ленточного провода при переменном токе по сравнению с постоянным согласно (8-1-8) определяется отношением:

$$\frac{R_0}{R_{0\text{пост}}} = \beta a \frac{\text{sh } 2\beta a + \sin 2\beta a}{\text{ch } 2\beta a - \cos 2\beta a}. \quad (8-1-9)$$

Рис. 8-6. Зависимость погонного сопротивления ленточного провода от a/Δ .

Последнее отношение представлено графически на рис. 8-6. Из этого графика следует, что при $a/\Delta = \beta a \geq 1,25$

сопротивление ленточного провода переменному току резко возрастает и при этом условии его можно рассчитывать по формуле (8-1-8a).

На основании формул (2-2-8a) и (6-4-10) реактивная мощность на единицу длины уединенного ленточного провода

$$P_r = \omega 2 \int_0^a \mu_0 H_{d2}^2 b dx_1 = \omega L_{0i} I^2.$$

Используя формулу (8-1-7a), из последнего выражения находим погонную индуктивность, определяющую внутреннее магнитное поле ленты,

$$L_{0i} = L_{0i\text{пост}} \frac{3}{2\beta a} \frac{\text{sh } 2\beta a - \sin 2\beta a}{\text{ch } 2\beta a - \cos 2\beta a}. \quad (8-1-10)$$

Здесь

$$L_{0i\text{пост}} \approx \frac{\mu_a}{12} \frac{2a}{b} \quad (8-1-10a)$$

— погонная индуктивность, определяющая внутреннее магнитное поле при постоянном токе.

На рис. 8-6 приведена кривая, иллюстрирующая выражение (8-1-10). Из этого выражения видно, что при «тонкой» ленте и низкой частоте, т. е. когда $\beta a \rightarrow 0$, по-

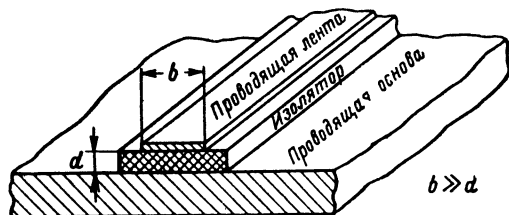


Рис. 8-7. Полосковая линия.

гонная индуктивность при переменном токе $L_{0i} \approx L_{0i \text{ пост}}$, а при «толстой» ленте и при высокой частоте, т. е. когда $\beta a \rightarrow \infty$, $L_{0i} \rightarrow 0$.

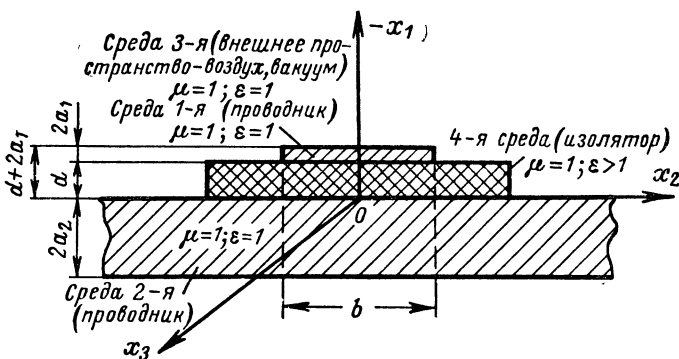


Рис. 8-8. К определению параметров полосковой линии.

Полосковая линия (рис. 8-7) применяется в технике СВЧ. Так как в такой линии $b \gg d$, то составляющая H_1 вектора напряженности магнитного поля в направлении оси x_1 равна нулю, а его составляющая по оси x_2 не зависит от x_1 ; вследствие этого $\partial H_2 / \partial x_1 = 0$ (рис. 8-8). Поэтому на основании формул (2-1-10) можно написать следующие волновые уравнения:

$$\frac{\partial^2 j_{3(1)}}{\partial x_1^2} + k_1^2 j_{3(1)} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 j_{3(2)}}{\partial x_1^2} + k_2^2 j_{3(2)} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{1(1)}}{\partial x_3^2} + k_3^2 \dot{E}_{1(4)} = 0.$$

Здесь индексами в скобках обозначены составляющие векторов \mathbf{J} , \mathbf{E} в соответствующих средах (рис. 8-8), $k_1 = k_2 = k$ определяются выражением (8-1-1а), а на основании формулы (2-1-11)

$$k_4 \approx \beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}.$$

Из решения этих уравнений согласно соотношению (Д-6-19а) и на основе второго уравнения системы (2-1-5) находим:

$$\left. \begin{aligned} j_{д 3(1)} &= A_1 e^{j k x_1} + A_2 e^{-j k x_1}; \\ j_{д 3(2)} &= B_1 e^{j k x_1} + B_2 e^{-j k x_1}; \\ \dot{E}_{д 1(4)} &= C e^{-j \beta_4 x_3}; \\ \dot{H}_{д 2(1)} &= j \frac{k}{j \omega \mu_0} (A_1 e^{j k x_1} - A_2 e^{-j k x_1}); \\ \dot{H}_{д 2(2)} &= j \frac{k}{j \omega \mu_0} (B_1 e^{j k x_1} - B_2 e^{-j k x_1}); \\ \dot{H}_{д 2(4)} &= \frac{\sqrt{\epsilon}}{\mu_0 c} C e^{-j \beta_4 x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (8-1-11)$$

Полагая в качестве начального условия заданную величину тока в ленте

$$I = \int_{-(d+2a_1)}^{-d} j_{д 3(1)} b dx$$

и учитывая граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x_1 &= -(d + 2a_1) & \dot{H}_{2(1)} &= \dot{H}_{2(3)} \\ \text{при } x_1 &= -d & \dot{H}_{2(1)} &= \dot{H}_{2(4)} \\ \text{при } x_1 &= 0 & \dot{H}_{2(2)} &= \dot{H}_{2(4)} \\ \text{при } x_1 &= 2a_2 & \dot{H}_{2(2)} &= \dot{H}_{2(3)} \end{aligned} \right\} \text{ в виду } d \ll \frac{3 \cdot 10^8}{f \sqrt{\epsilon}}$$

из выражений (8-1-11), находим:

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{д}3(1)} &= \frac{I}{b} j\dot{k} \frac{\text{ch}\{j\dot{k}[(d+2a_1)+x_1]\}}{\text{sh}(2j\dot{k}a_1)}, \\ \dot{H}_{\text{д}2(1)} &= \frac{I}{b} \frac{\text{sh}\{j\dot{k}[(d+2a_1)+x_1]\}}{\text{sh}(2j\dot{k}a_1)}; \end{aligned} \right\} \quad (8-1-12)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{д}3(2)} &= -\frac{I}{b} j\dot{k} \frac{\text{ch}\{j\dot{k}[x_1-2a_2]\}}{\text{sh}(2j\dot{k}a_2)}, \\ \dot{H}_{\text{д}2(2)} &= -\frac{I}{b} \frac{\text{sh}\{j\dot{k}[x_1-2a_2]\}}{\text{sh}(j\dot{k}a_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (8-1-13)$$

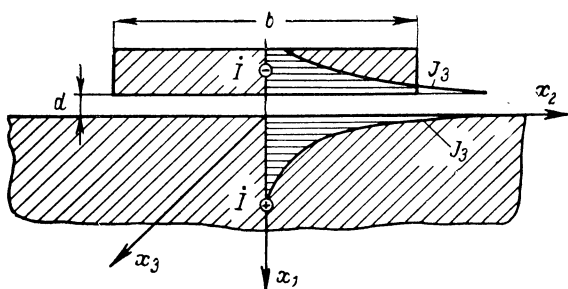


Рис. 8-9. Распределение плотности тока в ленточном проводе в присутствии проводниковой полуплоскости.

Так как проводниковая среда 2 представляет собой практически неограниченную полуплоскость (т. е. $a_2 \rightarrow \infty$), то выражения (8-1-12) и (8-1-13) принимают вид:

$$J_{\text{д}3(1)} = \frac{I}{b} \sqrt{2\beta} \times \\ \times \sqrt{\frac{\text{ch}^2\{\beta[(d+2a_1)+x_1]\} - \sin^2\{\beta[(d+2a_1)+x_1]\}}{\text{ch}^2(2\beta a_1) + \cos^2(2\beta a_1)}}; \quad (8-1-12a)$$

$$J_{\text{д}3(2)} = \frac{I}{b} \beta e^{-\beta x_1} = \frac{1}{b\Delta} e^{-\beta x_1}. \quad (8-1-13a)$$

Эти выражения действительны приближенно и при $2\beta a_1 \geq 2,50$. Так как $d \ll b$, то электромагнитное поле сосредоточивается главным образом в диэлектрическом зазоре и в слоях толщиной Δ проводящей ленты и проводящего основания. На рис. 8-9 выражения (8-1-12a) и (8-1-13a) представлены графически; этот рисунок ил-

люстрирует распределение плотности тока в проводах полосковой линии (эффект «близости»).

Мощность джоулевых потерь на единицу длины полосковой линии на основании формул (1-6-7) и (6-4-2а)

$$P_0 \approx \int_{-(d+2a_1)}^{-d} J_{дз(1)}^2 \frac{1}{\sigma} b dx_1 + \int_0^{2a_1} J_{дз(2)}^2 \frac{1}{\sigma} b dx_1 = R_0 I^2.$$

Здесь мы полагаем, что ток в проводящем основании сосредоточен в полосе шириною b . Подставляя в это выражение $J_{дз(1)}$ и $J_{дз(2)}$ из формул (8-1-12) и (8-1-13), находим погонное сопротивление полосковой линии:

$$R_0 = \frac{P_0}{I^2} \approx 2R_{0 \text{ пост}} \beta a_1 (\gamma_1 + \gamma_2). \quad (8-1-14)$$

Здесь $R_{0 \text{ пост}} = 1/\sigma 2a_1 b$ — сопротивление проводящей ленты при постоянном токе;

$$\gamma_1 = \frac{\text{sh } 4\beta a_1 + \sin 4\beta a_1}{\text{ch } 4\beta a_1 - \cos 4\beta a_1};$$

$$\gamma_2 = \frac{\text{sh } 4\beta a_2 + \sin 4\beta a_2}{\text{ch } 4\beta a_2 - \cos 4\beta a_2}.$$

Для большой толщины основания ($4\beta a_2 > 2,5$) выражение (8-1-14) имеет вид:

$$R_0 = R_{0 \text{ пост}} 2\beta a_1 \left(\frac{\text{sh } 4\beta a_1 + \sin 4\beta a_1}{\text{ch } 4\beta a_1 - \cos 4\beta a_1} + 1 \right), \quad (8-1-14a)$$

или при СВЧ, когда $4\beta a_1 > 2,5$,

$$R_0 \approx \frac{2}{\sigma \Delta b}. \quad (8-1-14б)$$

Следовательно, погонное сопротивление полосковой линии при СВЧ можно определять как сопротивление при постоянном токе линии из двух ленточных проводов с толщиной, равной эквивалентной глубине Δ . Зависимость погонного сопротивления полосковой линии от произведения βa_1 , т. е. соотношение

$$\frac{R_0}{R_{0 \text{ пост}}} = 2\beta a_1 \frac{\text{sh } 4\beta a_1 + \sin 4\beta a_1}{\text{ch } 4\beta a_1 - \cos 4\beta a_1} \quad (8-1-15)$$

представляется той же кривой, что и для одиночного ленточного провода (рис. 8-6).

Полагая, что поле $H_{2(2)}$ сосредоточено в полоске шириной b , реактивная мощность на единицу длины полос-

ковой линии при $4\beta a_2 > 2,5$ на основании (2-2-8a) и (6-4-10) определяется выражением

$$P_r = \omega \int_{-(d+2a_1)}^{-d} \mu_0 H_{2(1)}^2 b dx_1 + \omega \int_{-d}^0 \mu_0 H_{2(4)}^2 b dx_1 + \\ + \omega \int_0^{\infty} \mu_0 H_{2(2)}^2 b dx_1 = \omega L_0 I^2.$$

Делая соответствующие подстановки из формул (8-1-11) в (8-1-12) и полагая, что в диэлектрическом зазоре магнитное поле однородно, т. е. $\partial \dot{H}_{2(4)} / \partial x_1 = 0$, и, следовательно,

$$\dot{H}_{2(4)} \Big|_{x_1=-d} = \dot{H}_{2(1)} \Big|_{x_1=-d} = \dot{H}_{2(2)} \Big|_{x_1=0},$$

находим погонную индуктивность полосковой линии

$$L_0 = \mu_0 \frac{\gamma'_1}{b^2 \beta} + \mu_0 \frac{d}{b} + \mu_0 \frac{\gamma'_2}{b^2 \beta}. \quad (8-1-16)$$

Здесь $\gamma'_1 = \frac{\text{sh } 4\beta a_1 - \sin 4\beta a_1}{\text{ch } 4\beta a_1 - \cos 4\beta a_1}$, $\gamma'_2 = \frac{\text{sh } 4\beta a_2 - \sin 4\beta a_2}{\text{ch } 4\beta a_2 - \cos 4\beta a_2}$. При «толстом» основании, т. е. когда $4\beta a_2 \geq 2,5$ и $\gamma'_2 \rightarrow 1$ погонная индуктивность

$$L_0 \approx \mu_0 \frac{\gamma'_1}{2b\beta} + \mu_0 \frac{d}{b} + \mu_0 \frac{1}{2b\beta}. \quad (8-1-16a)$$

При «толстом» основании и «толстой» ленте при высокой частоте, т. е. если $4\beta a_1 > 2,5$ и $4\beta a_2 > 2,5$, согласно формуле (8-1-16) погонная индуктивность

$$L_0 \approx \mu_0 \frac{d}{b} \left(1 + \frac{\Delta}{d} \right) \approx \mu_0 \frac{d}{b}. \quad (8-1-16б)$$

Следовательно, погонная индуктивность полосковой линии при СВЧ равна индуктивности, определяющей магнитное поле в изолирующем зазоре, и не зависит от частоты.

Погонная емкость C_0 любой длинной линии при переменном и постоянном токе в большинстве случаев практически одинакова и поэтому ее можно определять по формулам из § 4-5.

Погонная проводимость длинной линии, обусловленную потерями в изоляции,

$$g_0 = \omega C_0 \text{tg } \delta. \quad (8-1-17)$$

Погонная проводимость двухпроводной коаксиальной линии с «металлическими» изоляторами (рис. 8-10)

$$g_0 \approx \left(\frac{R_0 \lambda}{4Z_0^2} \right) N = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{R_0 C_0}{L_0} \right) N. \quad (8-1-18)$$

Эта формула выведена на основании формулы (8-5-8); здесь N — число «металлических» изоляторов на единицу длины линии.

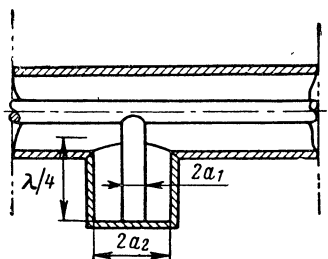


Рис. 8-10. Отрезок коаксиальной линии с «металлическим» изолятором.

Следует отметить, что в двухпроводной линии при СВЧ возможны потери на излучение, если расстояние между проводами сравнимо с длиной волны или больше ее. Погонное сопротивление излучения приближенно можно определить на основании выражения (2-5-5) [со знаком минус] и выражений (2-3-14).

Часть энергии в высоковольтной линии передачи теряется на ионизацию прилегающих слоев окружающей атмосферы (потери на «корону»). Эти потери пропорциональны второй степени потенциала и кривизне поверхности проводов. Эквивалентная проводимость потерь на корону определяется соотношением

$$g_{0\text{кор}} = k \frac{P_{0\text{кор}}}{U^2}. \quad (8-1-19)$$

При высокой частоте коэффициент k больше, чем при низкой частоте.

8-2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ДЛИННОЙ ЛИНИИ

Электромагнитный процесс в длинной однородной линии (рис. 8-11, а) согласно формуле (6-2-16) описывается системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i &= 0; \\ \frac{\partial i}{\partial x} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + g_0 u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-2-1)$$

Линия называется однородной, если ее погонные параметры C_0, L_0, R_0, g_0 неизменны по всей ее длине.

Уравнения (8-2-1) в символической форме согласно формулам (6-2-29) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} + (R_0 + j\omega L_0) \dot{I} &= 0; \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial x} + (g_0 + j\omega C_0) \dot{U} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-2-2)$$

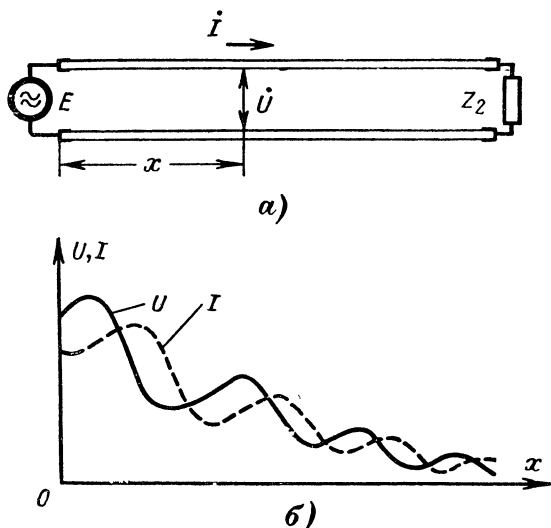


Рис. 8-11. Схема длинной однородной линии (а) и распределение напряжения и тока вдоль ее длины (б).

Если эти уравнения продифференцировать по x и произвести взаимные подстановки, получим волновые уравнения напряжения и тока в длинной линии:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial x^2} + k_0 \dot{U} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{I}}{\partial x^2} + k_0 \dot{I} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8-2-3)$$

в которых

$$k_0 = \omega \sqrt{\left(L_0 - j \frac{R_0}{\omega}\right) \left(C - j \frac{g_0}{\omega}\right)} = \beta - j\alpha \quad (8-2-4)$$

— постоянная распространения линии, аналогичная (2-1-11);

α — постоянная затухания линии, определяющая убывание амплитуды на единицу длины линии;

β — волновое число (фазовая постоянная линии), характеризующее изменение фазы на единицу длины линии.

Уравнения (8-2-3) аналогичны уравнениям (2-1-10), и решения, выражающие комплексные действующие значения напряжения и тока в точке x , согласно выражению (Д-6-19а) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_n e^{-j\dot{k}_0 x} + \dot{U}_o e^{j\dot{k}_0 x} ; \\ \dot{I} &= \dot{I}_n e^{-j\dot{k}_0 x} + \dot{I}_o e^{j\dot{k}_0 x} , \end{aligned} \right\} \quad (8-2-5)$$

где \dot{U}_n и \dot{U}_o — постоянные интегрирования, соответствующие падающей и отраженной волне напряжения; \dot{I}_n и \dot{I}_o — падающей и отраженной волне тока.

С учетом выражения (8-2-4)

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_n e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \dot{U}_o e^{\alpha x} e^{j\beta x} ; \\ \dot{I} &= \dot{I}_n e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \dot{I}_o e^{\alpha x} e^{j\beta x} . \end{aligned} \right\} \quad (8-2-6)$$

Зависимость модулей этих выражений от x показана графически на рис. 8-11, б.

Из выражений (8-2-6) следует, что ток и напряжение в линии состоят из двух волн, распространяющихся вдоль ее в противоположных направлениях с фазовой скоростью

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} . \quad (8-2-7)$$

Первая волна, амплитуда которой с увеличением x убывает, движется от источника э. д. с. к концу линии; эта волна называется падающей. Вторая волна движется от конца линии к ее началу и с увеличением x амплитуда ее растет, эта волна называется отраженной.

Отношение комплексной амплитуды падающей волны напряжения к комплексной амплитуде падающей волны тока называется волновым сопротивлением линии

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}_n}{\dot{I}_n} . \quad (8-2-8)$$

Если длина линии бесконечно велика, то можно считать, что отраженной волны в линии нет. В этом случае соотношения (8-2-5) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_n e^{-jk_0 x}; \\ I &= I_n e^{-jk_0 x}. \end{aligned} \right\} \quad (8-2-9)$$

Подставляя эти значения в выражение (8-2-2), согласно соотношению (8-2-8) находим:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sqrt{\frac{1 - j \frac{R_0}{\omega L_0}}{1 - j \frac{g_0}{\omega C_0}}}. \quad (8-2-10)$$

Если в уравнение (8-2-2) подставить выражения

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_0 e^{jk_0 x}; \\ I &= I_0 e^{jk_0 x}. \end{aligned} \right\} \quad (8-2-9a)$$

определяющие волну, бегущую в обратном направлении, то отношение амплитуды напряжения и амплитуды тока отраженной волны будет равно:

$$\frac{\dot{U}_{m0}}{I_{m0}} = -Z_0 = -\frac{\dot{U}_0}{I_0}. \quad (8-2-10a)$$

Выражения (8-2-5) с учетом соотношений (8-2-10) и (8-2-10a) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_n e^{-jk_0 x} + \dot{U}_0 e^{jk_0 x}; \\ I &= \frac{\dot{U}_n}{Z_0} e^{-jk_0 x} - \frac{\dot{U}_0}{Z_0} e^{jk_0 x}. \end{aligned} \right\} \quad (8-2-11)$$

Из уравнения (8-2-4) аналогично выражениям (2-7-12) находим:

$$\beta = \frac{\omega \sqrt{L_0 C_0}}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{\left(1 - \frac{g_0}{\omega C_0} \frac{R_0}{\omega L_0}\right)^2 + \left(\frac{R_0}{\omega L_0} + \frac{g_0}{\omega C_0}\right)^2} + \left(1 - \frac{g_0}{\omega C_0} \frac{R_0}{\omega L_0}\right)}; \quad (8-2-12)$$

$$\alpha = \frac{\omega \sqrt{L_0 C_0}}{\sqrt{2}} \times \\ \times \sqrt{\sqrt{\left(1 - \frac{g_0}{\omega C_0} \frac{R_0}{\omega L_0}\right)^2 + \left(\frac{R_0}{\omega L_0} + \frac{g_0}{\omega C_0}\right)^2} - \left(1 - \frac{g_0}{\omega C_0} \frac{R_0}{\omega L_0}\right)}; \quad (8-2-13)$$

следовательно, в линии с потерями затухание и фазовая скорость в общем случае зависят от частоты, т. е. такая линия обладает дисперсией и проходящий по ней сигнал искажается.

Линия без потерь. Если изоляция между проводами линии «идеальна» и бесконечно велика проводимость проводов, т. е. если $g_0=0$ и $R_0=0$, то из уравнений (8-2-7), (8-2-10), (8-2-12) и (8-2-13) следует:

$$\left. \begin{aligned} v_\phi &= \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}; \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \\ \beta &= \omega \sqrt{L_0 C_0} = \frac{2\pi}{\lambda}; \\ \alpha &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8-2-14)$$

т. е. в линии без потерь с неограниченной длиной фазовая скорость и волновое сопротивление определяются только погонными параметрами L_0 , C_0 и от частоты не зависят (линия не обладает дисперсией); вследствие этого сигнал вдоль такой линии передается без искажений.

Так как волновое сопротивление линии без потерь не содержит мнимой части, то распространяющиеся в одном направлении волны тока и напряжения имеют одинаковые фазы.

Так как передаваемый линией поток энергии движется в окружающей среде, то фазовая скорость и волновое сопротивление линии без потерь зависят, очевидно, от параметров этой среды. Действительно, погонные параметры двухпроводной линии (рис. 4-20) согласно формулам (4-5-126) и (5-5-3а)

$$C_0 \approx \frac{\pi \epsilon_a}{\ln \frac{D}{a}}, \quad L_0 \approx \frac{\mu_a}{\pi} \ln \frac{D}{a},$$

и, следовательно, ее волновое сопротивление

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{D}{a}. \quad (8-2-15)$$

Погонные параметры коаксиальной линии (рис. 4-17, а) согласно формулам (4-5-5) и (5-5-26)

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{a_2}{a_1}}, \quad L_0 \approx \frac{\mu_a}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

и, следовательно, ее волновое сопротивление

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{a_2}{a_1}. \quad (8-2-15a)$$

В обоих случаях

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}},$$

т. е. волны тока и напряжения распространяются вдоль бесконечно длинной линии без потерь с такой же фазовой скоростью, как и плоская волна в неограниченной среде без потерь, имеющей такие же параметры, как и среда, заполняющая пространство между проводниками линии.

Линия с «малыми» потерями, погонные параметры которой

$$\left. \begin{aligned} R_0 &\ll \omega L_0; \\ g_0 &\ll \omega C_0 \end{aligned} \right\} \quad (8-2-16)$$

согласно выражениям (8-2-7), (8-2-10), (8-2-12) и (8-2-13) обладает характеристиками:

$$\left. \begin{aligned} v_\phi &\approx \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{R_0}{\omega L_0} - \frac{g_0}{\omega C_0} \right)^2 \right]; \\ Z_0 &\approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \left[1 - j \left(\frac{R_0}{2\omega L_0} - \frac{g_0}{2\omega C_0} \right) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (8-2-17)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta &\approx \omega \sqrt{L_0 C_0} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R_0}{\omega L_0} - \frac{g_0}{\omega C_0} \right)^2 \right]; \\ \alpha &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{R_0}{Z_0} + Z_0 g_0 \right] \ll \beta. \end{aligned} \right\} \quad (8-2-18)$$

Из формул (8-2-17) следует, что v_ϕ и Z_0 мало зависят от частоты, т. е. такая линия обладает слабой дисперсией.

Если проводимость между проводами мала, что соответствует кабелю с хорошей изоляцией, то согласно формулам (8-2-18)

$$\left. \begin{aligned} \beta &\approx \omega \sqrt{L_0 C_0} ; \\ \alpha &\approx \frac{1}{2} \frac{R_0}{Z_0} . \end{aligned} \right\} \quad (8-2-19)$$

Отсюда видно, что затухание линии можно уменьшить, увеличивая ее индуктивность путем введения сосредоточенных индуктивностей («пупиновские катушки») или увеличивая распределенную индуктивность (обматывая проводники ферромагнитной проволокой).

Если потери в линии значительны, но ее погонные параметры связаны соотношением

$$\frac{R_0}{g_0} = \frac{L_0}{C_0} , \quad (8-2-20)$$

которое аналогично соответствующему соотношению для среды с потерями [см. формулу (2-2-14)], то из выражений (8-2-7), (8-2-10), (8-2-12) и (8-2-13) следует, что характеристики такой линии

$$\left. \begin{aligned} \beta &\approx \omega \sqrt{L_0 C_0} ; \\ \alpha &\approx \sqrt{R_0 g_0} ; \\ v_\phi &\approx \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} ; \\ Z_0 &\approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} . \end{aligned} \right\} \quad (8-2-21)$$

Таким образом, при условии, определяемом соотношением (8-2-20), линия с потерями не обладает дисперсией, в результате чего сигнал на конце такой линии получается неискаженным по форме, уменьшаясь лишь по величине.

8-3. ЛИНИЯ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Если линия имеет конечную длину, то в общем случае на ее конце происходит частичное отражение энергии. Поэтому кроме падающей волны, распространяющейся

в прямом направлении, в линии возникает отраженная волна, движущаяся в обратном направлении. Отраженная волна возникает также и тогда, когда в линии имеется неоднородность («скачок») параметров C_0 , L_0 , R_0 , g_0 . Возникновение отраженной волны напряжения и тока в длинной линии аналогично возникновению отраженной волны напряженностей поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в среде с неоднородностями (см. гл. 3). Если на конце линии включено сопротивление Z_2 , а начало координат перенесено в точку присоединения нагрузки, то из выражений (8-2-11) получим:

$$\left. \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \right|_{x=0} = Z_2 = Z_0 \frac{\dot{U}_n + \dot{U}_o}{\dot{U}_n - \dot{U}_o}.$$

На основании этого можно написать выражение

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_n} = \frac{\frac{Z_2}{Z_0} - 1}{\frac{Z_2}{Z_0} + 1} = \frac{\tilde{Z}_2 - 1}{\tilde{Z}_2 + 1}, \quad (8-3-1)$$

определяющее отношение комплексной амплитуды напряжения отраженной волны к комплексной амплитуде напряжения падающей волны в месте возникновения отражения. Отношение это называется коэффициентом отражения по напряжению; он аналогичен коэффициенту отражения по напряженности электрического поля [см. формулы (3-2-14) и (3-2-15)].

Безразмерная величина \tilde{Z}_2 в формуле (8-3-1) носит название нормированного сопротивления нагрузки; как следует из этой формулы, $\tilde{Z}_2 = Z_2/Z_0$.

В общем случае коэффициент отражения $\dot{\Gamma}_U$ является комплексной величиной; его абсолютная величина $|\dot{\Gamma}_U| \leq 1$, а аргумент определяет фазу отраженной волны относительно падающей. Если на конце линии энергия не поглощается, то модуль коэффициента отражения всегда равен единице. В случае разомкнутой линии ($Z_2 \rightarrow \infty$)

$$\dot{\Gamma}_U = +1;$$

когда линия короткозамкнута на конце ($Z_2 = 0$),

$$\dot{\Gamma}_U = -1;$$

если линия замкнута на реактивное сопротивление ($Z_2 = \pm jX_2$),

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{\pm j\tilde{X}_2 - 1}{\pm j\tilde{X}_2 + 1} = e^{j(\pi \mp \psi)}. \quad (8-3-1a)$$

Здесь $\psi = 2 \operatorname{arctg} \tilde{X}_2$ и $|\dot{\Gamma}_U| = 1$.

Верхний знак перед величиной ψ в показателе степени выбирают при индуктивном сопротивлении ($X_2 = \omega L$), а нижний — при емкостном ($X_2 = 1/\omega C$).

При комплексной нагрузке ($Z_2 = R_2 \pm jX_2$) происходит частичное поглощение энергии:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Gamma}_U &= \frac{(\tilde{R}_2 - 1) \pm j\tilde{X}_2}{(\tilde{R}_2 + 1) \pm j\tilde{X}_2} = |\dot{\Gamma}_U| e^{j\psi}; \\ |\dot{\Gamma}_U| &= \sqrt{\frac{(\tilde{R}_2 - 1)^2 + \tilde{X}_2^2}{(\tilde{R}_2 + 1)^2 + \tilde{X}_2^2}}; \\ \psi &= \pm \operatorname{arctg} \frac{2\tilde{X}_2}{\tilde{Z}_2^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (8-3-16)$$

Если линия нагружена на конце действительным сопротивлением, не равным волновому ($Z_2 = R_2 \neq Z_0$), то коэффициент отражения $\dot{\Gamma}_U$ является действительной величиной

$$\Gamma_U = \frac{\tilde{R}_2 - 1}{\tilde{R}_2 + 1} < 1. \quad (8-3-1в)$$

Если линия согласована с нагрузкой, т. е. нагружена на сопротивление, равное волновому ($Z_2 = R_2 = Z_0$), то коэффициент отражения $\Gamma_U = 0$. При этом происходит полное поглощение энергии без отражения.

Если в уравнения (8-2-11) ввести коэффициент отражения, то они принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_n (e^{-jk_0 x} + \dot{\Gamma}_U e^{+jk_0 x}); \\ I &= \frac{\dot{U}_n}{Z_0} (e^{-jk_0 x} - \dot{\Gamma}_U e^{+jk_0 x}). \end{aligned} \right\} \quad (8-3-2)$$

Когда потери в линии отсутствуют ($\alpha=0$),

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_n (e^{-j\beta x} + \dot{\Gamma}_{U2} e^{j\beta x}); \\ I &= \frac{\dot{U}_n}{Z_0} (e^{-j\beta x} - \dot{\Gamma}_{U2} e^{j\beta x}). \end{aligned} \right\} \quad (8-3-2a)$$

Так как в разомкнутой линии без потерь $\dot{\Gamma}_U=1$, то из выражений (8-3-2a) с учетом формул (Д-5-2) находим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= 2\dot{U}_n \cos \beta x; \\ I &= -j2 \frac{\dot{U}_n}{Z_0} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} (x < 0). \quad (8-3-3)$$

Из этих выражений следует, что у разомкнутого конца линии энергия полностью отражается. Фаза тока отраженной волны противоположна фазе тока падающей волны, а фаза напряжения отраженной волны совпадает с фазой напряжения падающей волны. В результате в линии образуются стоячие волны тока и напряжения. В верхней части рис. 8-12 показано распределение напряженностей электрического и магнитного полей вдоль отрезка разомкнутой линии, а ниже приведены кривые распределения тока и напряжения. Из рисунка видно, что пучности тока и совпадающие с ними пучности магнитного поля сдвинуты относительно пучностей напряжения и пучностей электрического поля на $\lambda/4$. В момент, когда напряжение во всех точках достигает максимума, ток вдоль всей линии равен нулю (кривые 4). При этом вся энергия определяется электрическим полем линии. Когда же напряжение всюду равно нулю (кривые 1), а ток достигает максимума, то энергия определяется магнитным полем.

Так как согласно выражениям (8-3-3) напряжение и ток в разомкнутой линии без потерь сдвинуты по фазе на 90° , а следовательно, на такой же угол сдвинуты по фазе и векторы электрического и магнитного полей, то среднее значение вектора Пойнтинга равно нулю и энергия вдоль линии не распространяется. В узлах напряженностей электрического и магнитного полей, стоящих друг от друга на расстоянии $\lambda/4$, вектор Пойнтинга в любой момент времени равен нулю. Таким образом, из пределов каждого отрезка $\lambda/4$ энергия не выхо-

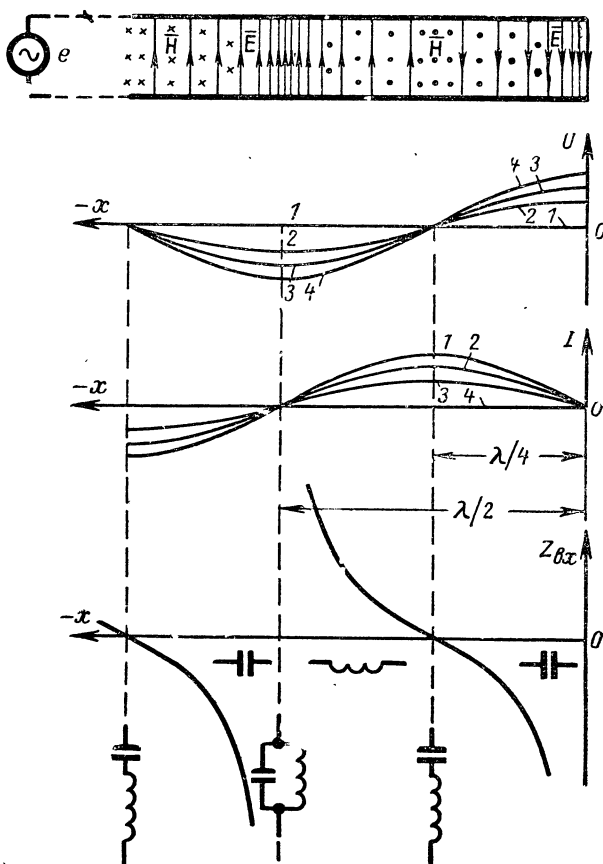


Рис. 8-12. Распределение напряжения, тока и входного сопротивления вдоль линии без потерь, разомкнутой на конце. Кривые 1, 2, 3, 4 относятся к различным моментам времени в течение одной четверти периода.

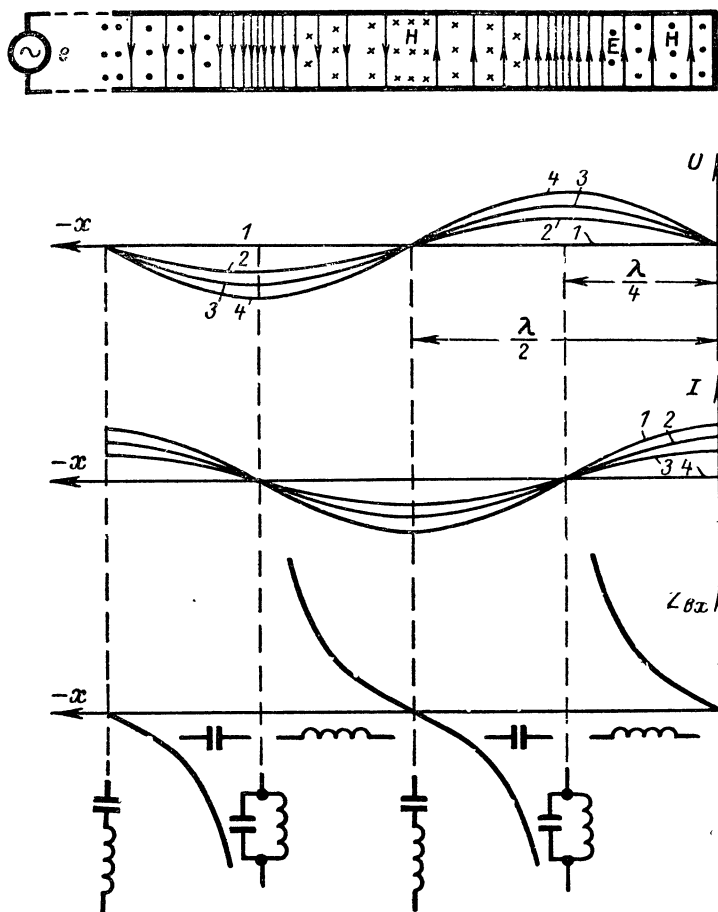


Рис. 8-13. Распределение тока, напряжения и входного сопротивления вдоль короткозамкнутой линии без потерь. Кривые 1, 2, 3, 4 относятся к различным моментам времени в течение одной четверти периода.

дит и не входит в него; в каждом отрезке имеет место лишь переход энергии из электрической в магнитную и обратно.

В короткозамкнутой на конце линии без потерь $\dot{\Gamma}_U = -1$; для этого случая из выражения (8-3-2а) с учетом формулы (Д-5-2) находим, что

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= -j2\dot{U}_n \sin \beta x; \\ I &= 2 \frac{\dot{U}_n}{Z_0} \cos \beta x. \end{aligned} \right\} (x < 0) \quad (8-3-4)$$

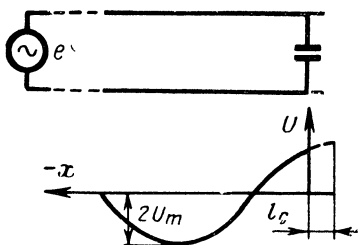


Рис. 8-14. Распределение амплитуд напряжения в линии, нагруженной на емкость.

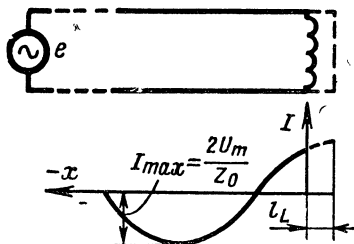


Рис. 8-15. Распределение амплитуд тока в линии, нагруженной на индуктивность.

Следовательно, от разомкнутой линии короткозамкнутая на конце линия отличается лишь тем, что на ее конце узел напряжения и пучность тока (рис. 8-13).

Если линия без потерь нагружена на реактивное сопротивление $Z_2 = \pm jX_2$, то на основании соотношений (8-3-1а) и (8-3-2а) с использованием формул (Д-5-2) находим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= j2\dot{U}_n e^{\pm j\frac{\psi}{2}} \sin \left(\beta x \mp \frac{\psi}{2} \right); \\ I &= 2 \frac{\dot{U}_n}{Z_0} e^{\mp j\frac{\psi}{2}} \cos \left(\beta x \mp \frac{\psi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8-3-5)$$

Здесь $\psi/2 = \arctg |\tilde{X}_2|$. Верхний знак перед $\psi/2$ относится к случаю индуктивной нагрузки, нижний — к емкостной. Эти выражения представляют стоячие волны, отличающиеся от стоячих волн разомкнутой и коротко-

замкнутой линии смещением пучностей и узлов напряжения и тока относительно конца линии.

Из выражений (8-3-5) также следует, что подключение к разомкнутому концу линии конденсатора (рис. 8-14) эквивалентно удлинению ее на величину

$$l_G = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg}(\omega CZ_0). \quad (8-3\ 6)$$

Включение на конце линии индуктивности (рис. 8-15) эквивалентно включению отрезка короткозамкнутой линии длиной

$$l_L = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{Z_0}\right). \quad (8-3\ 6a)$$

При согласованной нагрузке линии, т. е. когда $R_2 = Z_0$ и, следовательно, $\dot{\Gamma}_U = 0$, в линии наблюдается чисто бегущая волна (рис. 8-16). В этом случае идущая от генератора энергия поглощается в нагрузке полностью, без отражения.

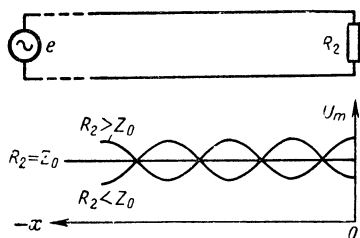


Рис. 8-16. Распределение амплитуд напряжения в линии, нагруженной на действительное сопротивление.

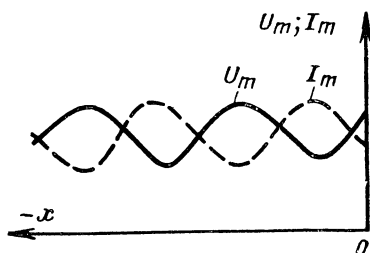


Рис. 8-17. Распределение амплитуд напряжения и тока в линии, нагруженной на комплексное сопротивление.

При нагрузке линии без потерь на сопротивление, не равное волновому ($R_2 \neq Z_0$), происходит частичное отражение энергии и поэтому амплитуда отраженной волны меньше амплитуды падающей. Для этого случая выражения (8-3-2a) с учетом формулы (8-3-1в) можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_n [(1 \pm \Gamma_U) e^{-j\beta x} \pm 2\Gamma_U \cos \beta x]; \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}_n}{Z_0} [(1 \pm \Gamma_U) e^{-j\beta x} \mp 2\Gamma_U \cos \beta x]. \end{aligned} \right\} \quad (8-3-7)$$

Здесь верхний знак перед коэффициентом отражения соответствует случаю $R_2 > Z_0$, нижний — когда $R_2 < Z_0$.

Выражения (8-3-7) представляют напряжение и ток в виде суммы бегущей (первый член) и стоячей волны (второй член). На рис. 8-16 графически показана зависимость амплитуды тока и напряжения от x . Выражения (8-3-7) аналогичны выражениям (3-3-2), описывающим нормальное падение электромагнитной волны на поверхность раздела двух сред.

Если линия без потерь нагружена на комплексное сопротивление $Z_2 = R_2 \pm jX_2$, то также имеет место суперпозиция бегущей и стоячей волн. Этот случай по характеру совпадает с предыдущим, т. е. когда $R_2 \neq Z_0$, но узлы и пучности тока и напряжения смещены относительно конца линии (рис. 8-17).

О качестве согласования линии с нагрузкой можно судить по кривой распределения амплитуд, характеризуемой коэффициентами КСВН или КБВН [см. выражения (3-7-8)]:

$$\left. \begin{aligned} \text{КСВН} &= \frac{|\dot{U}|_{\text{макс}}}{|\dot{U}|_{\text{мин}}} = \frac{|\dot{U}_{\text{п}}| + |\dot{U}_{\text{о}}|}{|\dot{U}_{\text{п}}| - |\dot{U}_{\text{о}}|}, \\ \text{КБВН} &= \frac{|\dot{U}|_{\text{мин}}}{|\dot{U}|_{\text{макс}}} = \frac{1}{\text{КСВН}}. \end{aligned} \right\} \quad (8-3-8)$$

В отсутствие потерь

$$\left. \begin{aligned} \text{КСВН} &= \frac{1 + |\dot{\Gamma}_U|}{1 - |\dot{\Gamma}_U|}; \\ \text{КБВН} &= \frac{1 - |\dot{\Gamma}_U|}{1 + |\dot{\Gamma}_U|} \end{aligned} \right\} \quad (8-3-9)$$

и, следовательно,

$$|\dot{\Gamma}_U| = \frac{1 - \text{КБВН}}{1 + \text{КБВН}} = \frac{\text{КСВН} - 1}{\text{КСВН} + 1}, \quad (8-3-10)$$

где $|\dot{\Gamma}_U|$ — модуль коэффициента отражения в любой точке линии.

8-4. МОЩНОСТЬ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА В ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Мощность потока электромагнитной энергии, движущегося около проводов длинной линии при переменном токе,

$$P_0 = \int_S \Pi_0 dS$$

в отличие от волноводной линии [см. (3-5-21)] может быть определена произведением напряжения на ток, т. е. так же, как и мощность в линии постоянного тока [см. формулу (5-9-6)]. Согласно формуле (6-4-4) мощность цепи переменного тока определяется вещественной частью произведения комплексно сопряженных действующих значений тока и напряжения, т. е.

$$P_0 = \operatorname{Re}(\dot{U}I^*). \quad (8-4-1)$$

Для бесконечно длинной линии или линии, нагруженной на согласованное сопротивление, на основании соотношений (8-2-9) выражение (8-4-1) принимает вид:

$$P_0 = \frac{U_1^2}{Z_0} e^{-2\alpha l}; \quad (8-4-2)$$

здесь U_1 — действующее значение напряжения в начале линии.

Если линия обладает малыми потерями [см. формулу (8-2-16)], то мощность, поглощаемая на участке линии длиной l [м], определяется на основании формулы (8-4-2) следующим выражением:

$$\begin{aligned} P_{01} e^{-2\alpha x} - P_{01} e^{-2\alpha (x+l)} &= \\ = P_{01} (1 - e^{-2\alpha l}) &\approx 2\alpha P_{01} l, \end{aligned} \quad (8-4-3)$$

где P_{01} — мощность в начале линии.

Таким образом, затухание двухпроводной линии и ее к. п. д. на участке длиной l [м] определяются, как и для волноводной линии, по формулам (3-5-28) и (3-5-29):

$$\left. \begin{aligned} L[\partial\partial] &\approx 8,69 \alpha l; \\ \eta &= 1 - 2\alpha l. \end{aligned} \right\} \quad (8-4-4)$$

Если линия имеет конечную длину l и на конце ее включена несогласованная нагрузка $Z_2 = z_2 e^{i\varphi_2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$, то из выражения (8-2-11) имеем:

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= (\dot{U}_n e^{-ik_0 l} + \dot{U}_o e^{ik_0 l}); \\ \dot{I}_2 &= \frac{1}{Z_0} (\dot{U}_n e^{-ik_0 l} - \dot{U}_o e^{ik_0 l}),\end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned}\dot{U}_n &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_0) e^{-ik_0 l}, \\ \dot{U}_o &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_0) e^{ik_0 l}.\end{aligned}\right\} \quad (8-4-5)$$

Подставляя эти значения напряжений в правые части формул (8-2-11), получаем выражения, определяющие напряжение и ток в любой точке линии в зависимости от сопротивления нагрузки Z_2 :

$$\left. \begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_2 \left(\cos k_0 x + j \frac{1}{\tilde{Z}_2} \sin k_0 x \right); \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 (\cos k_0 x + j \tilde{Z}_2 \sin k_0 x),\end{aligned}\right\} \quad (8-4-6)$$

где $\tilde{Z}_2 = Z_2/Z_0$ — нормированное сопротивление нагрузки.

Подставляя эти значения в правую часть формулы (8-4-1), можем определить мощность на входе линии длиной l , нагруженной на конце сопротивлением $\tilde{Z}_2 = \tilde{z}_2 e^{i\varphi_2}$. При этом потери в линии, т. е. поглощаемая в проводах и изоляторах линии мощность

$$P_{\text{оп}} = \int_0^l |\dot{U}|^2 g_0 dx + \int_0^l |\dot{I}|^2 R_0 dx; \quad (8-4-7)$$

здесь согласно выражению (8-4-6)

$$\left. \begin{aligned}|\dot{U}| &= \left| \dot{U}_2 \left(\cos k_0 x + j \frac{1}{\tilde{Z}_2} \sin k_0 x \right) \right|; \\ |\dot{I}| &= \left| \dot{I}_2 (\cos k_0 x + j \tilde{Z}_2 \sin k_0 x) \right|.\end{aligned}\right\} \quad (8-4-8)$$

Определяемые по формуле (8-4-7) потери в линии минимальны при условии согласованной нагрузки, т. е. когда нормированное сопротивление нагрузки

$$\tilde{Z}_2 = 1. \quad (8-4-9)$$

В связи с этим на практике длинные линии обычно имеют согласованную нагрузку. При этом условии выражения (8-4-6) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= U_2 (\cos \dot{k}_0 x + j \sin \dot{k}_0 x) = \dot{U}_2 e^{-\alpha x} e^{j\beta x}; \\ \dot{I} &= I_2 (\cos \dot{k}_0 x + j \sin \dot{k}_0 x) = \dot{I}_2 e^{-\alpha x} e^{j\beta x}. \end{aligned} \right\} \quad (8-4-10)$$

При подстановке этих значений в выражение (8-4-1) находим, что при согласованной нагрузке мощность на входе линии с малыми потерями

$$P_{01} = P_{02} e^{2\alpha l}; \quad (8-4-11)$$

здесь

$$P_{02} = U_2 I_2 = \frac{U_2^2}{Z_0} = I_2^2 Z_0 \quad (8-4-12)$$

— мощность на выходе линии.

Затухание в линии и к. п. д. ее при этом также определяются формулами (8-4-4).

Максимальная передаваемая мощность определяется допустимым затуханием или к. п. д. линии, электрической прочностью изоляции проводов, а в некоторых случаях и допустимым нагревом проводов, т. е., в конечном счете, конфигурацией и взаимным расположением проводов и электрическими параметрами материалов, из которых изготовлена линия.

В случае «воздушной» двухпроводной линии (рис. 4-20) максимальная мощность, определяемая ее электрической прочностью, при согласованной нагрузке на основании формулы (8-4-12) равна:

$$P_{0\text{макс}} \leq \frac{U_{\text{доп}}^2}{Z_0};$$

с учетом соотношений (2-6-6), (4-5-12в) и (8-2-15)

$$P_{0\text{макс}} \leq 380 D^2 \ln \frac{D}{a} [\text{квт}]; \quad (8-4-13)$$

здесь D и a в сантиметрах.

Аналогичным путем находим, что максимальная мощность, передаваемая коаксиальным кабелем (рис. 4-17, а) и определяемая электрической прочностью диэлектрика, заполняющего внутреннее пространство кабеля, равна:

$$P_{\text{омакс}} \leq 760 K^2 \sqrt{\epsilon} a_1^2 \ln \frac{a_2}{a_1}; \quad (8-4-13a)$$

здесь ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика;

$K = \frac{E_{\text{доп. диэл}}}{E_{\text{доп. возд}}}$ — коэффициент электрической прочности диэлектрика по сравнению с воздухом при атмосферном давлении.

В табл. 8-1 приведены примеры некоторых типов линий связи и линий передачи с указанием их основных технических характеристик.

Таблица 8-1

Некоторые типы линий передачи и линий связи

Название и размеры	Тип волны	Диапазон рабочих частот, Мгц	Затухание, дБ/м	Допустимая передаваемая мощн., Вт/м	Примечания
Медный прямоугольный волновод сечением 38×76 мм	H_{10}	4 000—2 500	0,02	1,0	При максимальной допустимом поле 10 кВ/см
Медный прямоугольный волновод 13×25 мм	H_{10}	12 000—8 600	0,11	0,1	То же
Круглый волновод с внутренним диаметром 50 мм, образованный плотно намотанной спиралью из эмалированного медного провода	H_{01}	75 000—35 000	0,0006—0,0019	—	Для дальней связи
Медный коаксиальный фидер 16×41 мм с «металлическими» изоляторами	ТЕМ	3 200—2 800	0,4	0,5	При максимальной допустимом поле 10 кВ/см

Название и размеры	Тип волны	Диапазон рабочих частот, МГц	Затухание, дБ/м	Допустимая передаваемая мощн. Мвт	Примечания
Гибкий коаксиальный кабель с полиэтиленовым изолирующим заполнением; внутренний провод медный $7 \times 0,7$ мм, внешний — двойная медная оплетка $\varnothing 7$ мм	ТЕМ	10 000— 0	0,6 1,0	—	При волне 10 см При волне 3 см
Полосковая несимметричная линия с медной лентой шириной 6 мм и изолирующим полиэтиленовым слоем толщиной 1,5 мм	ТЕМ	8 000— 5 000	1,5	—	—
Двухпроводная линия связи из медных проводов $\varnothing 4$ мм	ТЕМ	10—0	0,001 — 0,0002	—	—
Однородная линия связи (медный провод $\varnothing 5$ мм, покрытый полиэтиленовым слоем толщиной 0,3 мм)	E	3 000— 20	0,02 —0,002	—	—
Диэлектрический волновод $\varnothing 10$ мм (полистирол)	E_{01} H_{01}	35 000— 25 000	0,8	—	—
Волоконный волновод $\varnothing 10$ —100 мкм	E, H	10^9 — 10^7	$\approx 1,0$	—	—
Лучевод линзовый и зеркальный	—	10^{10} — 10^5	$< 0,001$	—	—

8-5. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛИНИИ

Линию длиной l можно рассматривать как четырех-полюсник, постоянная распространения которого равна $k_0 l$, а входное сопротивление на основании (7-3-49)

$$\text{равно: } Z_{\text{вх1}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \cos k_0 l + j \dot{I}_2 Z_0 \sin k_0 l}{\dot{I}_2 \cos k_0 l + j \dot{U}_2 \frac{1}{Z_0} \sin k_0 l};$$

или, учитывая, что $\dot{U}_2/\dot{I}_2 = Z_2$,

$$\tilde{Z}_{\text{вх1}} = \frac{\tilde{Z}_2 + j \operatorname{tg} k_0 l}{1 + j \tilde{Z}_2 \operatorname{tg} k_0 l}, \quad (8-5-1)$$

где $\tilde{Z}_{\text{вх1}} = Z_{\text{вх1}}/Z_0$ и $\tilde{Z}_2 = Z_2/Z_0$.

Из выражения (8-5-1) следует, что входное сопротивление длинной линии определяется отношением \tilde{Z}_2/Z_0 и величиной $k_0 l$.

В линии без потерь (т. е. когда $\alpha=0$, $k_0=\beta=2\pi/\lambda$) входное сопротивление

$$\tilde{Z}_{\text{вх1}} = \frac{\tilde{Z}_2 + j \operatorname{tg} \beta l}{1 + j \tilde{Z}_2 \operatorname{tg} \beta l}. \quad (8-5-2)$$

С учетом соотношений (8-3-2а) и (3-7-5) эту формулу можно переписать в виде

$$\tilde{Z}_{\text{вх1}} = \frac{1 + \dot{\Gamma}_{U2} e^{j2\beta l}}{1 - \dot{\Gamma}_{U2} e^{j2\beta l}} = \frac{1 + \dot{\Gamma}_{U1}}{1 - \dot{\Gamma}_{U1}}, \quad (8-5-3)$$

где $\dot{\Gamma}_{U1}$ и $\dot{\Gamma}_{U2}$ — соответственно коэффициенты отражения на входе линии и нагрузке.

При согласованной нагрузке линии без потерь ($\tilde{Z}_2=1$) при любой ее длине входное сопротивление равно волновому:

$$Z_{\text{вх1}} = Z_0 = Z_2. \quad (8-5-4)$$

Из формулы (8-5-2) следует, что если длина линии без потерь равна целому числу полуволн, т. е. $l = n \frac{\lambda}{2}$, где $n=1, 2, \dots$, то входное сопротивление линии равно сопротивлению нагрузки:

$$Z_{\text{вх1}} = Z_2. \quad (8-5-4a)$$

Отсюда следует, что *удлинение или укорочение линии на отрезок длиной, равной целому числу полувольт, не изменяет ее входного сопротивления*. Следовательно, электрический режим линии не изменится, если нагрузку приблизить к генератору или удалить от него на целое число полувольт.

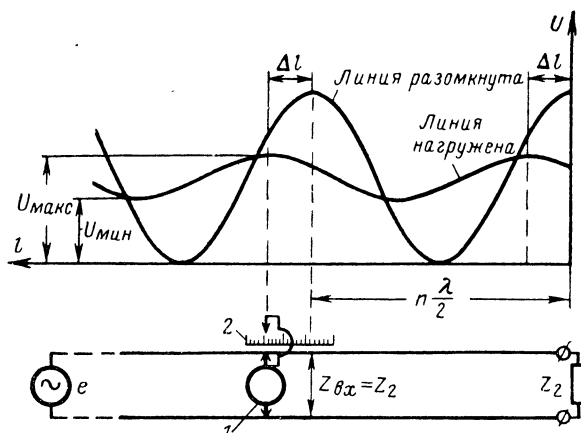


Рис. 8-18. Определение сопротивления Z_2 с помощью измерительной линии.

1 — индикатор напряжения; 2 — шкала для отсчета Δl .

На этом свойстве длинной линии без потерь основано измерение полного сопротивления при сверхвысоких частотах с помощью «измерительной линии» (рис. 8-18), представляющей собой отрезок линии практически без потерь длиной в несколько полувольт. Вдоль этого отрезка перемещается измеритель напряжения $|\dot{U}|$ (в случае двухпроводной линии) или напряженности поля $|\dot{E}_m|$ (в случае волновода), позволяющий измерить КСВН. Измерив КСВН и длину отрезка Δl , на который смещается максимум напряжения при подключении к разомкнутому концу линии измеряемого сопротивления Z_2 , по формуле (8-3-10) определяют модуль коэффициента отражения и его фазу на основе выражения (3-7-5):

$$\psi = 2\beta \left(n \frac{\lambda}{2} + \Delta l \right) = 2\pi n + 4\pi \frac{\Delta l}{\lambda}.$$

По этим значениям определяют величину Z_2 по формуле (8-3-16). На практике пользуются номограммами,

называемыми круговыми диаграммами, пример которых дан на рис. 8-19. С помощью такой номограммы определяют составляющие измеряемого комплексного сопротивления R_2 и X_2 .

Если длина линии без потерь $l = (2n+1) \lambda/4$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, то согласно формуле (8-5-2) ее входное сопротивление

$$Z_{\text{BX}} = \frac{Z_0^2}{Z_2} \quad (8-5-5)$$

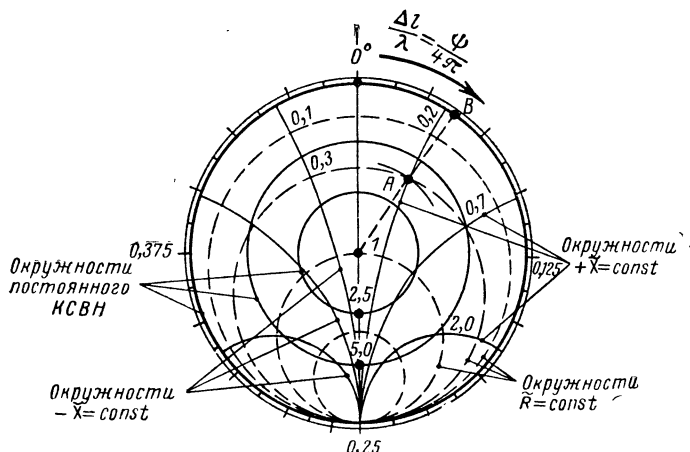


Рис. 8-19. Круговая диаграмма для определения импеданса с помощью измерительной линии.

Пример пользования: отрезок $I-A$ — величина измеренного КСВН $\approx 3,3$; дуга $\theta-B$ — величина измеренного $\Delta/\lambda \approx 0,015$; точка A определяет на соответствующих окружностях искомые значения

$$\tilde{R}_2 \approx 0,3 \text{ и } \tilde{X}_2 \approx +0,2.$$

Из этого соотношения следует, что если длина линии равна целому нечетному числу четвертей длины волны, то происходит трансформация сопротивления нагрузки. Это явление используют для согласования линий с различными волновыми сопротивлениями («четвертьволновый трансформатор»); оно аналогично свойству пластины толщиной $\lambda/4$ [см. формулу (3-3-8)].

Если две линии с различными волновыми сопротивлениями Z_0' и Z_0'' включить последовательно (рис. 8-20, а) и нагрузить вторую (правую) линию на сопротивление

$Z_2 = Z_0''$, то первая (левая) линия будет вести себя так, как если бы она сама была нагружена на сопротивление Z_0'' . При этом согласно формуле (8-3-1) коэффициент отражения места соединения линий

$$\Gamma_U = \frac{\frac{Z_0''}{Z_0'} - 1}{\frac{Z_0''}{Z_0'} + 1}.$$

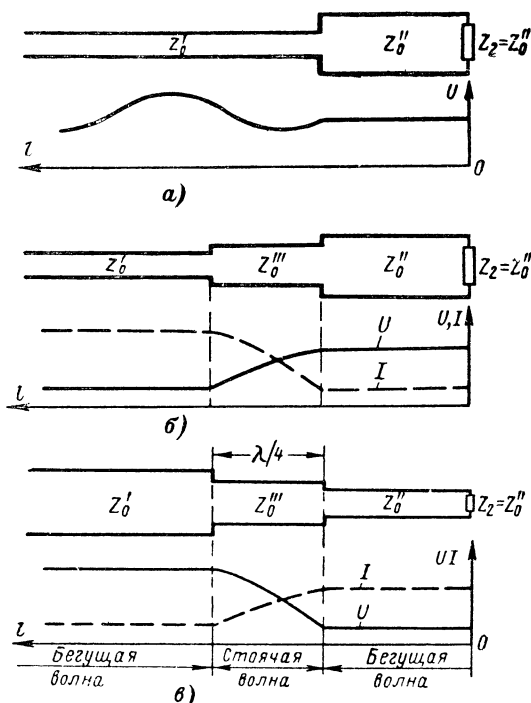


Рис. 8-20. Согласование линий с различными волновыми сопротивлениями ($Z_0' \neq Z_0''$).

а — несогласованное включение; б — согласованное включение с помощью четвертьволнового отрезка с волновым сопротивлением $Z_0''' = \sqrt{Z_0' Z_0''}$ при $Z_0' < Z_0''$; в — согласованное включение с помощью четвертьволнового отрезка с волновым сопротивлением $Z_0''' = \sqrt{Z_0' Z_0''}$ при $Z_0' > Z_0''$.

Обе линии, однако, можно согласовать, если включить между ними четвертьволновый отрезок (рис. 8-20, б и в) с волновым сопротивлением

$$Z_0'' = \sqrt{Z_0' Z_0''} . \quad (8-5-6)$$

При этом первая (левая) линия оказывается нагруженной сопротивлением Z_0' . Вследствие этого в обеих линиях распространяется бегущая волна, а в четвертьволновом отрезке устанавливается стоячая волна.

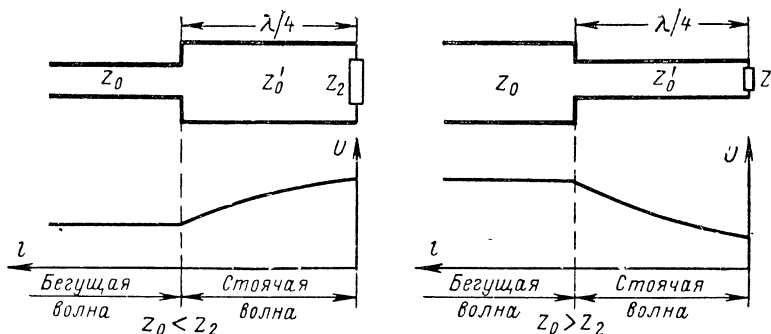


Рис. 8-21. Два случая согласования линии с нагрузкой Z_2 с помощью четвертьволнового трансформатора.

Произвольное сопротивление Z_2 (рис. 8-21) можно согласовать с линией, имеющей волновое сопротивление $Z_0 \neq Z_2$ с помощью четвертьволнового отрезка с волновым сопротивлением

$$Z_0' = \sqrt{Z_0 Z_2} . \quad (8-5-6a)$$

Отрезок линии без потерь, замкнутый накоротко на конце (рис. 8-13), на основании соотношения (8-5-2) имеет входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = jZ_0 \operatorname{tg} \beta l = jZ_0 \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right); \quad (8-5-7)$$

сно имеет индуктивный характер, если

$$n \frac{\lambda}{2} < l < (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

и емкостный, если

$$(2n - 1) \frac{\lambda}{4} < l < n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из формулы (8-5-7) следует, что при $l = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$, $Z_{\text{вх}} = \infty$, т. е. входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь равно бесконечности, если длина ее равна нечетному числу четвертей волн. Входное напряжение при этом имеет конечную величину, отличную от нуля, а ток на входе равен нулю. Отсюда следует, что рассматриваемый отрезок линии эквивалентен параллельному контуру с резонансом токов.

При $l = n \frac{\lambda}{2}$, ($n=1, 2, \dots$)

$$Z_{\text{вх}} = 0,$$

т. е. входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь равно нулю, если длина ее равна целому числу полуволн. Такой отрезок эквивалентен последовательно-му контуру с резонансом напряжений.

На основании формул (8-5-1), (Д-5-5), (8-2-10) и (8-2-19) входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии длиной $\lambda/4$ с «малыми» потерями в предположении, что $\beta \approx 2\pi/\lambda$ и $\alpha = \frac{1}{2} \frac{R_0}{Z_0}$, определяется формулой:

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= jZ_0 \operatorname{tg} \left(k_0 \frac{\lambda}{4} \right) = \\ &= jZ_0 \frac{\sin \left(2\beta \frac{\lambda}{4} \right) - j \operatorname{sh} \left(2\alpha \frac{\lambda}{4} \right)}{\cos \left(2\beta \frac{\lambda}{4} \right) + \operatorname{ch} \left(2\alpha \frac{\lambda}{4} \right)} \bigg|_{\alpha \frac{\lambda}{2} \rightarrow 0} \approx \\ &\approx 4 \frac{Z_0^2}{\lambda R_0} = \frac{4}{\lambda} \frac{L_0}{C_0 R_0}. \end{aligned} \quad (8-5-8)$$

Из этого выражения следует, что входное сопротивление четвертьволнового отрезка линии, обладающего малыми потерями, может достигать больших значений. Следовательно, такой отрезок можно использовать в качестве изолирующей опоры двухпроводной линии (так называемый «металлический изолятор» — рис. 8-10).

Отрезок линии без потерь, разомкнутой на конце (рис. 8-12), т. е. когда $Z_2 = \infty$, на основании соотношения (8-5-2) имеет входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = -jZ_0 \operatorname{ctg} \beta l = -jZ_0 \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right); \quad (8-5-9)$$

если $n \frac{\lambda}{2} < l < (2n+1) \frac{\lambda}{4}$ ($n=0, 1, 2, \dots$), то входное сопротивление имеет емкостный характер, а при $(2n-1) \frac{\lambda}{4} < l < n \frac{\lambda}{2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) — индуктивный.

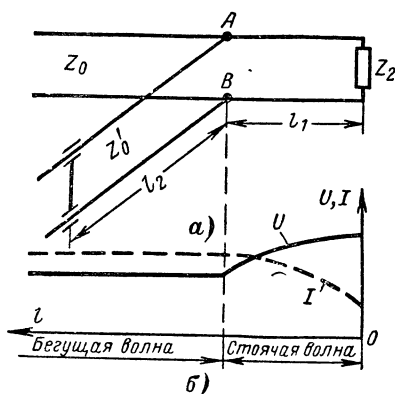
Из формулы (8-5-9) следует, что при $l = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$ $Z_{\text{вх}} = 0$, т. е. входное сопротивление разомкнутой линии без потерь равно нулю, если ее длина равна нечетному числу $\lambda/4$. Так как при этом напряжение на входе равно нулю, а ток имеет конечную величину, отличную от нуля, то разомкнутый отрезок, длина которого равна нечетному

числу $\lambda/4$, эквивалентен последовательному контуру с резонансом напряжений. При $l = n \frac{\lambda}{2}$ ($n=1, 2, \dots$)

$Z_{\text{вх}} = \infty$, т. е. входное сопротивление разомкнутой линии без потерь равно бесконечности, если ее длина равна целому числу полуволн. Такой отрезок эквивалентен параллельному контуру с резонансом токов.

Согласование сопротивления нагрузки линии с ее волновым сопротивлением можно осуществить, подклю-

Рис. 8-22. Схема подключения согласующего шлейфа (а) и распределение амплитуд напряжения в линии при этом (б).



чая к линии согласующий шлейф — короткозамкнутый или разомкнутый отрезок линии (рис. 8-22). Изменяя длину шлейфа l_2 и расстояние l_1 между точками его подключения к линии и нагрузкой Z_2 , добиваются согласования, которое в данном случае имеет место при равенстве волнового сопротивления линии Z_0 сопротив-

$$Z_{AB} = R_{AB} + jX_{AB} = \frac{Z_{\text{вх}} Z'_{\text{вх}}}{Z_{\text{вх}} + Z'_{\text{вх}}}, \quad (8-5-9a)$$

где $Z_{\text{вх}} = Z_0 \frac{\tilde{Z}_2 + j \operatorname{tg} \beta l_1}{1 + j \tilde{Z}_2 \operatorname{tg} \beta l_1}$ — входное сопротивление основной линии;

$Z'_{\text{вх}} = jZ'_0 \operatorname{tg} \beta l_2$, или $Z'_{\text{вх}} = -jZ'_0 \operatorname{ctg} \beta l_2$ — входное сопротивление согласующего шлейфа (короткозамкнутого или разомкнутого).

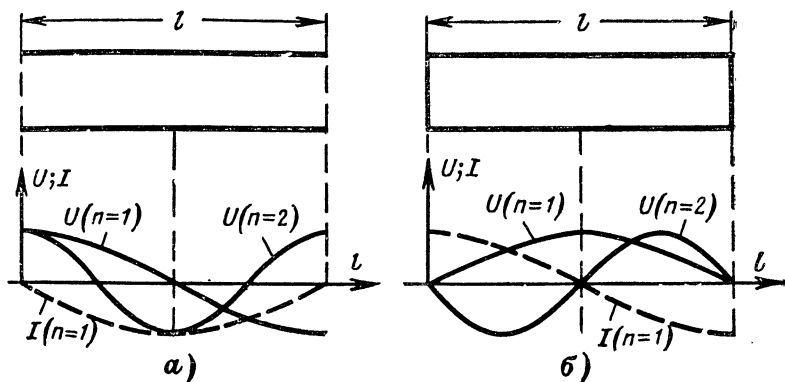


Рис. 8-23. Схема резонаторов с разомкнутыми (а) и короткозамкнутыми (б) концами.

При согласовании сопротивлений с помощью шлейфа имеют место следующие очевидные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} R_{AB} &= Z_0; \\ X_{AB} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-5-10)$$

При этих условиях между нагрузкой и местом присоединения шлейфа устанавливается стоячая волна, а на остальной части линии — бегущая.

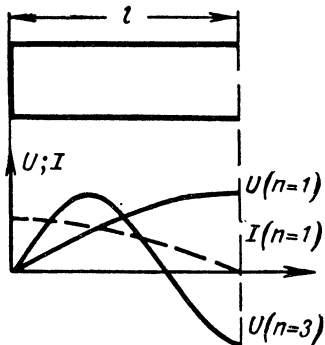
Отрезок линии можно использовать как резонатор, так как в узлах напряжения провода линии могут быть замкнуты накоротко, а в узлах тока — разорваны. В замкнутом накоротко или разомкнутом на концах отрезке линии (рис. 8-23) возможно возникновение колебаний, соответствующих длинам волн

$$\lambda_r = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3...). \quad (8-5-11)$$

Когда же линия замкнута накоротко только на одном конце, то образуется резонатор (рис. 8-24) с длиной волны

$$\lambda_r = \frac{4l}{(2n+1)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (8-5-11a)$$

Если пространство между проводами заполнено средой с параметрами ϵ и μ , то длина волны уменьшается в $\sqrt{\epsilon\mu}$ раз.



На основании формулы (3-6-18) добротность резонатора с распределенными постоянными

$$Q = \frac{\omega_r W_r}{P_0} = \frac{\omega_r L_0 \int_0^l |i(x)|^2 dx}{R_0 \int_0^l |i(x)|^2 dx} = \frac{\omega_r L_0}{R_0}.$$

Рис. 8-24. Схема резонатора с короткозамкнутым концом.

(8-5-12)

Добротность двухпроводного резонатора на основании формул (5-5-3a) и (8-1-6a), поскольку можно пренебречь потерями на излучение и потерями в изоляторах (так как последние размещают в узлах напряжения), определяется выражением

$$Q = \sigma l a \Delta \omega_r \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a} = 2 \frac{a}{\Delta} \ln \frac{D}{a} \approx 70 \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda_r}} a \ln \frac{D}{a}, \quad (8-5-12a)$$

где λ_r — основной тип волны, определяемый формулой (8-5-11) или (8-5-11a).

На основании формул (5-5-2б) и (8-1-6) добротность коаксиального резонатора

$$Q = \sigma 2\pi \Delta \left(\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \right) \omega_r \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{\Delta} \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \ln \frac{a_2}{a_1} \approx 70 \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda_r}} \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \ln \frac{a_2}{a_1}. \quad (8-5-12б)$$

Добротность резонаторов с распределенными постоянными (отрезки волноводов и проводных линий) значительно превышает добротность резонаторов, образованных катушками индуктивности и конденсаторами.

8-6. ВОЛНОВЫЕ МАТРИЦЫ

Хотя волновод существенно отличается по виду от двухпроводной линии, а токи и напряжения в нем недоступны для непосредственного измерения, в электроди-

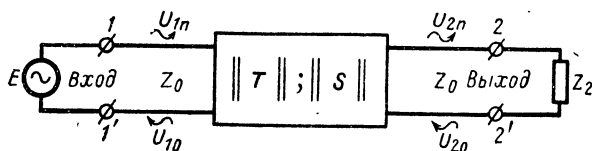


Рис. 8-25. К введению волновых матриц.

намическом отношении они сходны и методы их исследования могут быть одинаковы. В частности, задачи теории цепей с распределенными постоянными можно свести к рассмотрению четырехполюсников, вдоль которых распространяется волна основного типа. При этом пользуются понятиями падающих и отраженных волн и применяется метод расчета с помощью волновых матриц, связывающих падающие и отраженные волны. Элементы этих матриц находятся в весьма простых соотношениях с коэффициентами передачи и отражения и позволяют сопоставить расчетные характеристики с экспериментальными данными.

Рассмотрим четырехполюсник, который соответствует волновой трактовке (схема на рис. 8-25). Здесь \dot{U}_{1n} , \dot{U}_{2n} и \dot{U}_{1o} , \dot{U}_{2o} соответственно — падающие и отраженные волны напряжения на входе и выходе четырехполюсника, а Z_0 — волновое сопротивление подводящих линий без потерь.

Отраженные и падающие волны связаны следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1n} &= T_{11} \dot{U}_{2n} + T_{12} \dot{U}_{2o}; \\ \dot{U}_{1o} &= T_{21} \dot{U}_{2n} + T_{22} \dot{U}_{2o}, \end{aligned} \right\} \quad (8-6-1)$$

или

$$\left\| \begin{matrix} \dot{U}_{1n} \\ \dot{U}_{10} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \dot{U}_{2n} \\ \dot{U}_{20} \end{matrix} \right\|, \quad (8-6-1a)$$

где

$$\left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{matrix} \right\|$$

— волновая матрица передачи.

Элементы этой матрицы определяются из соотношений

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \frac{\dot{U}_{1n}}{\dot{U}_{2n}} \Big|_{U_{20}=0}; \\ T_{12} &= \frac{\dot{U}_{1n}}{\dot{U}_{20}} \Big|_{U_{2n}=0}; \\ T_{21} &= \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{2n}} \Big|_{U_{20}=0}; \\ T_{22} &= \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{20}} \Big|_{U_{2n}=0}. \end{aligned} \right\} \quad (8-6-2)$$

Из соотношений (8-6-1) и (8-6-2) вытекают следующие характеристики четырехполюсника:

коэффициент передачи со стороны входа при согласованном выходе ($U_{20}=0$)

$$K_{U1}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{2n}}{\dot{U}_{1n}} = \frac{1}{T_{11}}; \quad (8-6-3)$$

коэффициент передачи со стороны выхода (т. е. в обратном направлении) при согласованном входе ($U_{1n}=0$)

$$K_{U2}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{20}} = T_{22} - \frac{T_{21}T_{12}}{T_{11}}; \quad (8-6-3a)$$

коэффициент отражения на входе при согласованном выходе ($U_{20}=0$)

$$\dot{\Gamma}_{U1} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{1n}} = \frac{T_{21}}{T_{11}}; \quad (8-6-4)$$

коэффициент отражения на выходе при согласованном входе ($U_{1n}=0$)

$$\dot{\Gamma}_{U2} = \frac{\dot{U}_{2n}}{\dot{U}_{20}} = -\frac{T_{12}}{T_{11}}. \quad (8-6-4a)$$

Коэффициент передачи по мощности со стороны входа при согласованном выходе ($U_{20}=0$)

$$K_{P1}(j\omega) = \frac{1}{|T_{11}|^2}. \quad (8-6-5)$$

В случае взаимного четырехполюсника, т. е. когда $K_{U1}(j\omega) = K_{U2}(j\omega) = K_U$, элементы волновой матрицы передачи согласно соотношениям (8-6-3) и (8-6-3а) связаны соотношением

$$T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21} = 1. \quad (8-6-6)$$

Если четырехполюсник симметричен, то $\dot{\Gamma}_{U1} = \dot{\Gamma}_{U2} = \dot{\Gamma}_U$ и

$$T_{12} = T_{21}, \quad (8-6-7)$$

а КСВН на его выходе и входе определяется отношением (8-3-9). Таким образом, два элемента T_{11} и T_{12} волновой матрицы передачи полностью характеризуют взаимный симметричный четырехполюсник, представляющий собой цепь с распределенными постоянными.

Если четырехполюсник не обладает потерями, то

$$K_P = 1 - \Gamma_P = 1 - |\dot{\Gamma}_U|^2, \quad (8-6-8)$$

где Γ_P — коэффициент отражения по мощности.

В этом случае для полной характеристики четырехполюсника достаточно знание только одного матричного элемента T_{11} .

Отраженные и падающие волны можно связать и другими соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{10} &= S_{11} \dot{U}_{1п} + S_{12} \dot{U}_{20}, \\ \dot{U}_{2п} &= S_{21} \dot{U}_{1п} + S_{22} \dot{U}_{20}, \end{aligned} \right\} \quad (8-6-9)$$

или

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \dot{U}_{1п} \\ \dot{U}_{20} \end{array} \right\|, \quad (8-6-9a)$$

где

$$\left\| \begin{array}{cc} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{array} \right\|$$

— волновая матрица рассеяния или кратко — матрица рассеяния.

Элементы ее определяются из следующих соотношений

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{1n}} \Big|_{\dot{U}_{20}=0}; \\ S_{12} &= \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{20}} \Big|_{\dot{U}_{1n}=0}; \\ S_{21} &= \frac{\dot{U}_{2n}}{\dot{U}_{1n}} \Big|_{\dot{U}_{20}=0}; \\ S_{22} &= \frac{\dot{U}_{2n}}{\dot{U}_{20}} \Big|_{\dot{U}_{1n}=0} \end{aligned} \right\} \quad (8-6-10)$$

Из этих соотношений видим, что

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \dot{\Gamma}_{U1}; \\ S_{22} &= \dot{\Gamma}_{U2}, \\ S_{21} &= \dot{K}_{U1}; \\ S_{12} &= \dot{K}_{U2}. \end{aligned} \right\} \quad (8-6-11)$$

В случае взаимного четырехполюсника

$$S_{12} = S_{21}; \quad (8-6-12)$$

в случае симметричного четырехполюсника

$$S_{11} = S_{22}. \quad (8-6-13)$$

Матрица рассеяния взаимного четырехполюсника может быть определена через элементы волновой матрицы передачи

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{T_{21}}{T_{11}} & \frac{1}{T_{11}} \\ \frac{1}{T_{11}} & -\frac{T_{12}}{T_{11}} \end{array} \right\|. \quad (8-6-14)$$

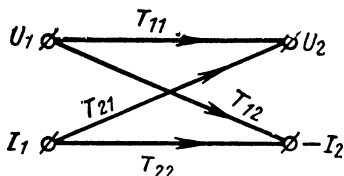
Выражая элементы матрицы $\|T\|$ через $\|S\|$, получаем:

$$\|T\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{S_{12}} & -\frac{S_{22}}{S_{21}} \\ \frac{S_{11}}{S_{21}} & S_{12} - S_{11} \frac{S_{22}}{S_{21}} \end{array} \right\|. \quad (8-6-15)$$

Четырехполюсник удобно характеризовать матрицей рассеяния $\|S\|$, элементы которой — коэффициенты передачи и коэффициенты отражения — являются экспериментальными характеристиками. Однако в случае каскадного соединения четырехполюсников пользуются волновыми матрицами передачи.

Волновая матрица каскадного соединения четырехполюсников, если волновые сопротивления линий пере-

Рис. 8-26. Линейный граф волновой матрицы передачи.



дачи одинаковы, равна произведению волновых матриц четырехполюсников, входящих в это соединение. Линейный граф, соответствующий уравнению (8-6-1), приведен на рис. 8-26 и аналогичен графу уравнения (7-3-13).

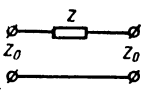
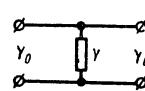
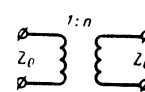

Волновая матрица передачи $\|T\|$ может быть выражена через матрицу передачи $\|A\|$. Действительно, токи и напряжения на входе и выходе четырехполюсника определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_{1п} + \dot{U}_{1о}; \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}_{2п} + \dot{U}_{2о}; \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{Z_0} (\dot{U}_{1п} - \dot{U}_{1о}); \\ \dot{I}_2 &= \frac{1}{Z_0} (\dot{U}_{2о} - \dot{U}_{2п}). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в формулу (7-3-13), получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1п} &= \frac{1}{2} \left[\left(A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_0} + A_{21} Z_0 + A_{22} \right) \dot{U}_2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(A_{11} - \frac{A_{12}}{Z_0} + A_{21} Z_0 - A_{22} \right) \dot{U}_{2о} \right]; \\ \dot{U}_{1о} &= \frac{1}{2} \left[\left(A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_0} - A_{21} Z_0 - A_{22} \right) \dot{U}_2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(A_{11} - \frac{A_{12}}{Z_0} - A_{21} Z_0 + A_{22} \right) \dot{U}_{2о} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8-6-16)$$

Волновые матрицы простейших четырехполюсников

Схема четырех- полюсника	Наименование	$\ T\ $	$\ S\ $
	Последовательное сопротивление с одинаковыми подводящими линиями	$\left\ \begin{array}{cc} 1 + \frac{\tilde{Z}}{2} & -\frac{\tilde{Z}}{2} \\ \frac{\tilde{Z}}{2} & 1 - \frac{\tilde{Z}}{2} \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cc} \frac{\tilde{Z}}{2 + \tilde{Z}} & \frac{2}{2 + \tilde{Z}} \\ \frac{2}{2 + \tilde{Z}} & \frac{\tilde{Z}}{2 + \tilde{Z}} \end{array} \right\ $
	Параллельное со- противление с одинаковыми подводящими линиями	$\left\ \begin{array}{cc} 1 + \frac{\tilde{Y}}{2} & \frac{\tilde{Y}}{2} \\ -\frac{\tilde{Y}}{2} & 1 - \frac{\tilde{Y}}{2} \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cc} -\frac{\tilde{Y}}{2 + \tilde{Y}} & \frac{2}{2 + \tilde{Y}} \\ \frac{2}{2 + \tilde{Y}} & -\frac{\tilde{Y}}{2 + \tilde{Y}} \end{array} \right\ $
	Идеальный транс- форматор с одинаковыми подводящими линиями	$\left\ \begin{array}{cc} \frac{n^2 + 1}{2n} & \frac{1 - n^2}{2n} \\ \frac{1 - n^2}{2n} & \frac{n^2 + 1}{2n} \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cc} \frac{1 - n^2}{1 + n^2} & \frac{2n}{1 + n^2} \\ \frac{2n}{1 + n^2} & \frac{n^2 - 1}{1 + n^2} \end{array} \right\ $
	Отрезок передающей линии в однородном тракте передачи	$\left\ \begin{array}{cc} e^{j\tilde{k}_0 l} & 0 \\ 0 & e^{-j\tilde{k}_0 l} \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cc} 0 & e^{-j\tilde{k}_0 l} \\ e^{-j\tilde{k}_0 l} & 0 \end{array} \right\ $

Из сравнения систем уравнений (8-6-16) и (8-6-1) находим:

$$\|T\| = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_0} + A_{21}Z_0 + A_{22} & A_{11} - \frac{A_{12}}{Z_0} + A_{21}Z_0 - A_{22} \\ A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_0} - A_{21}Z_0 - A_{22} & A_{11} - \frac{A_{12}}{Z_0} - A_{21}Z_0 + A_{22} \end{vmatrix}. \quad (8-6-17)$$

Отсюда следует, что, зная матрицы передачи $\|A\|$ четырехполюсников (см. табл. 7-2 и 7-3), с помощью матрицы (8-6-17) можно найти волновую матрицу передачи $\|T\|$ этих четырехполюсников, а следовательно, с помощью матрицы (8-6-14) и матрицу рассеяния $\|S\|$.

Матрицы $\|T\|$ и $\|S\|$ простейших четырехполюсников приведены в табл. 8-2. Для придания общности расчетам в этой таблице применяется нормированная проводимость $\tilde{Y} = Y/Y_0$ и нормированное сопротивление $\tilde{Z} = Z/Z_0$.

8-7. НЕОДНОРОДНОСТИ В ЛИНИЯХ

В качестве резонаторов и фильтров часто используют отрезки двухпроводных или волноводных линий с неоднородностями на концах. В двухпроводной линии неод-

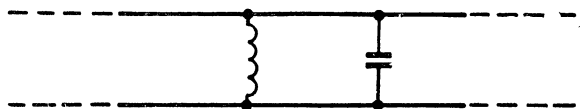


Рис. 8-27. Неоднородности в двухпроводной линии.

нородностями являются шунтирующие ее катушки индуктивности и конденсаторы (рис. 8-27).

Неоднородностями в волноводах могут служить штыри и диафрагмы (см. рис. 8-28, 8-29); с их помощью на различных участках волноводов можно создавать проводимости индуктивного или емкостного характера.

Диафрагмы и штыри используют также для согласования волноводов.

Возможны неоднородности, представляющие комбинацию реактивных сопротивлений противоположного

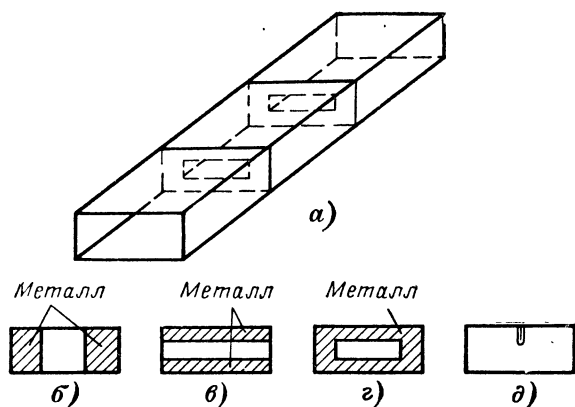


Рис. 8-28. Неоднородности в волноводной линии.

a — расположение двух диафрагм в волновде; b — диафрагма, создающая индуктивную проводимость; $в$ — то же, емкостную проводимость; $г$ — «резонансная» диафрагма; $д$ — штырь, создающий емкостную проводимость.

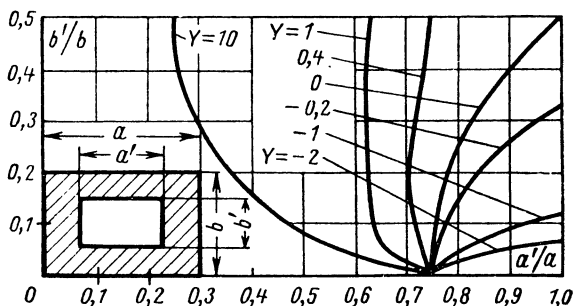

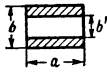
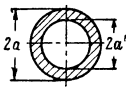
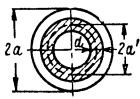


Рис. 8-29. Кривые нормированной проводимости диафрагмы при волне H_{10} .

знака. На резонансной частоте полная проводимость такой неоднородности равна нулю.

Излагаемая ниже теория линий с неоднородностями является приближенной, так как поля индукции, существующие вблизи неоднородности, во внимание не принимают.

Волноводные диафрагмы

Геометрическая форма неоднород- ности	Характер неоднородности	Тип вол- ны	Нормированная проводимость \bar{Y}'
	Индуктивная	H_{10}	$-j \frac{\Lambda}{a} \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi a'}{2a} \right)$
	Емкостная	H_{10}	$j \frac{4b}{\Lambda} \ln \left[\operatorname{cosec} \frac{\pi b'}{2b} \right]$
	Индуктивная	H_{11}	$-j \frac{\Lambda}{4a} \frac{0,715(2a)^3 - 2,344(2a')^3}{(2a')^3}$
	Емкостная	E_{01}	$j \frac{a'}{\Lambda} \left(\frac{\pi d}{\sigma} \right)^2 \frac{j_1^2 \left(2,405 \frac{a'}{a} \right)}{0,269}$

Если рассматривать неоднородность как взаимный и симметричный четырехполюсник, то, вычисляя для него коэффициенты отражения и прохождения по формулам (3-7-6) и (3-7-9), можно найти элементы матрицы рассеяния и эквивалентные параметры такого четырехполюсника. Если неоднородность представляет собой реактивную проводимость (вторая схема в табл. 8-2), то коэффициент отражения $\Gamma = -\frac{\tilde{Y}}{2 + \tilde{Y}}$. Отсюда норми-

рованная проводимость, определяемая через коэффициент отражения,

$$\tilde{Y} = -\frac{2\Gamma}{\Gamma + 1}.$$

Нормированные проводимости различных волноводных диафрагм приведены в табл. 8-3.

Волновые матрицы можно применить и при расчете системы с несколькими неоднородностями, если разделяющие их регулярные участки настолько велики, что напряженности полей индукции, создаваемых одной неоднородностью, будут исчезающе малы около другой. Если это условие не выполняется, то несколько неоднородностей, разделенных короткими регулярными участками, рассматривают как одну неоднородность.

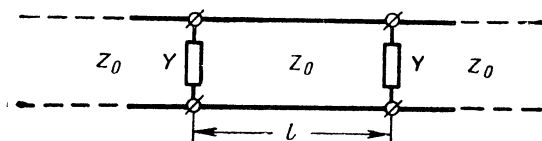


Рис. 8-30. К расчету резонатора, образованного отрезком линии с распределенными постоянными.

В качестве примера расчета с помощью волновых матриц линии с несколькими не влияющими друг на друга неоднородностями рассмотрим расчет резонатора в виде отрезка линии длиной l без потерь, на концы которого включены неоднородности Y (рис. 8-30). Если резонатор включен между согласованными генератором и нагрузкой, причем неоднородности имеют одинаковую реактивную проводимость $\tilde{b} = b/Y_0$, то такую систему можно рассматривать как каскадное соединение трех че-

тырехполюсников (рис. 8-31); пользуясь табл. 8-2, для этой системы можно написать:

$$\|T\| = \begin{vmatrix} 1 + j\frac{b}{2} & j\frac{b}{2} \\ -j\frac{b}{2} & 1 - j\frac{\tilde{b}}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e^{j\beta l} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta l} \end{vmatrix} \times \\ \times \begin{vmatrix} 1 + j\frac{\tilde{b}}{2} & j\frac{\tilde{b}}{2} \\ -j\frac{\tilde{b}}{2} & 1 - j\frac{\tilde{b}}{2} \end{vmatrix}.$$

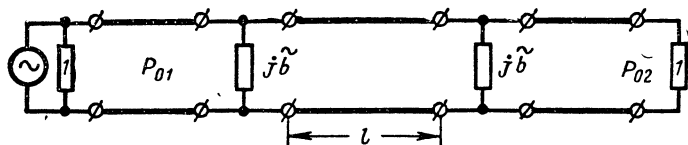


Рис. 8-31. Эквивалентная схема включения резонатора, образованного отрезком линии.

Цифрой 1 обозначены единичные (согласованные) сопротивления источника э. д. с. и нагрузки.

Для определения коэффициента передачи такого резонатора достаточно знания одного матричного элемента T_{11} [см. формулу (8-6-3)]. В данном случае имеем:

$$T_{11} = \left(1 + j\frac{\tilde{b}}{2}\right)^2 e^{j\beta l} + \frac{\tilde{b}^2}{4} e^{-j\beta l}.$$

Используя формулы Эйлера (Д-5-2), получим:

$$T_{11} = (\cos \beta l - \tilde{b} \sin \beta l) + j \left(\tilde{b} \cos \beta l - \right. \\ \left. - \sin \beta l - \frac{\tilde{b}^2}{2} \sin \beta l \right); \quad (8-7-1)$$

следовательно, коэффициент передачи по мощности

$$K_P = \frac{1}{|T_{11}|^2} = \\ = \frac{1}{1 + \tilde{b}^2 \left(\cos \beta l - \frac{\tilde{b}}{2} \sin \beta l \right)^2} = \frac{P_{02}}{P_{01}}; \quad (8-7-2)$$

здесь P_{02} — мощность в нагрузке и P_{01} — мощность генератора.

В технике СВЧ пользуются величиной, обратной коэффициенту передачи по мощности, называемой коэффициентом вносимых потерь, или сокращенно коэффициентом потерь мощности:

$$L = |T|^2 = 1 + \tilde{b}^2 \left(\cos \beta l - \frac{\tilde{b}}{2} \sin \beta l \right)^2 \quad (8-7-3)$$

или

$$L = 1 + a^2,$$

где

$$a = \tilde{b} \left(\cos \beta l - \frac{\tilde{b}}{2} \sin \beta l \right) = 2Q \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \quad (8-7-4)$$

— обобщенная расстройка.

В рассматриваемом примере расчета резонатора условие резонанса является условием прохождения всей мощности генератора в нагрузку, т. е. без отражения; при этом вне резонатора образуется бегущая волна, а внутри его — стоячая. Так как при резонансе $P_{01} = P_{02}$, то $L = 1$ и, следовательно, $a = \cos \beta l_r - \frac{\tilde{b}}{2} \sin \beta l_r = 0$. Отсюда находим, что «резонансная длина» резонатора

$$l_r = \frac{n\Lambda}{2} + \frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2}{\tilde{b}}; \quad (8-7-5)$$

здесь Λ — длина волны в линии передачи; $n = 1, 2, \dots$

Если $\tilde{b} \rightarrow \infty$, т. е. неоднородностью является сплошная перегородка в волноводной линии или короткое замыкание в двухпроводной линии, то наименьшая возможная длина

$$l_r = l_{r \text{ мин}} = \frac{\Lambda}{2}. \quad (8-7-5a)$$

Если неоднородностью является емкостная (положительная) проводимость, отвечающая условию $+\infty > \tilde{b} > 0$, то длина резонатора

$$\frac{3}{4} \Lambda < l_r < \frac{\Lambda}{2}. \quad (8-7-5b)$$

Когда же неоднородностью является индуктивная (отрицательная) проводимость величиной $-\infty < \tilde{b} < 0$, то

$$\frac{\Lambda}{4} < l_r < \frac{\Lambda}{2}. \quad (8-7-5в)$$

Следовательно, включение емкостной проводимости на концы линии увеличивает ее резонансную длину, а включение индуктивной — уменьшает (рис. 8-32).

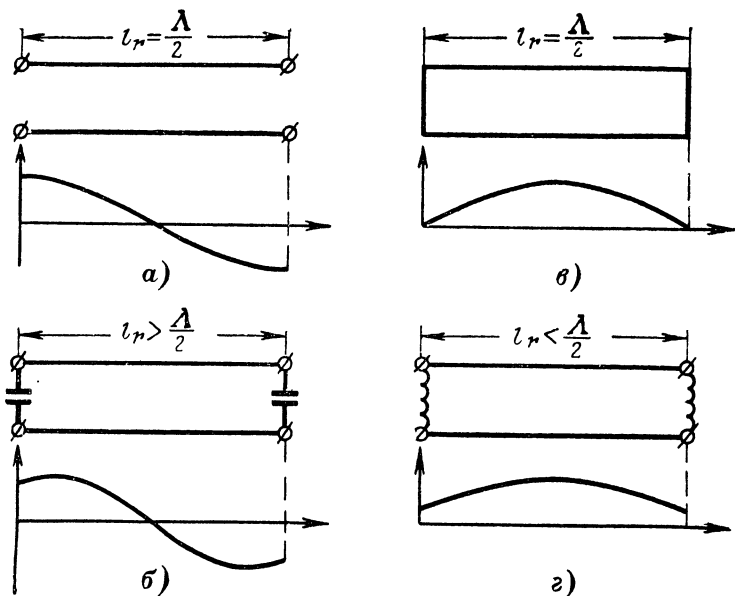


Рис. 8-32. Резонансная длина линии.

а — разомкнутой на концах; б — при емкостной проводимости на концах; в — замкнутой на концах; г — при индуктивной проводимости на концах.

Можно показать, что при резонансе коэффициент потерь мощности

$$L = 20 \lg \left(1 + \frac{Q}{Q_0} \right) \approx 8,68 \frac{Q}{Q_0} [\text{дБ}], \quad (8-7-6)$$

где Q_0 — собственная добротность ненагруженного резонатора.

Добротность нагруженного резонатора в виде отрезка волноводной линии с индуктивными диафрагмами, если $\tilde{b} \gg 1$, определяется выражением

$$Q = \frac{\pi}{4} \frac{\tilde{b}^2}{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega_0}\right)^2},$$

где $\omega_{кр}$ — критическая частота (см. § 3-5).

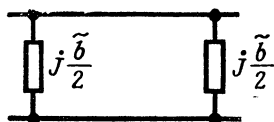


Рис. 8-33. Одно звено фильтра.

Из выражения (8-7-6) следует, что наиболее важно учитывать потери в резонаторах, используемых в качестве узкополосных фильтров, так как с уменьшением полосы пропускания добротность увеличивается.

В волноводных фильтрах почти всегда используются индуктивные диафрагмы. Перед емкостными диафрагмами они обладают преимуществами в конструктивном отношении и потери в них меньше.

Многозвенный фильтр с распределенными постоянными с непосредственной связью. Во многих случаях один резонатор, образованный отрезком длинной линии, не

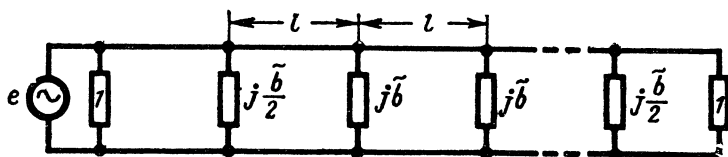


Рис. 8-34. Эквивалентная схема включения многозвенного фильтра с непосредственной связью в согласованный тракт.

Цифрой 1 обозначены единичные (согласованные) сопротивления источника э. д. с. и нагрузки.

обладает требуемым затуханием вне полосы пропускания; лучшие характеристики получаются при применении цепочки резонаторов, каждое звено которой имеет эквивалентную схему, показанную на рис. 8-33.

Эквивалентная схема такого фильтра с непосредственной связью, включенного в согласованную волноводную линию, дана на рис. 8-34. Волновую матрицу передачи фильтра находим перемножением волновых матриц

элементов, входящих в цепочку (табл. 8-2). При этом для n -звенного фильтра, пренебрегая потерями в стенках, согласно (Д-1-6) имеем:

$$|T_{11}|^2 = \frac{P_{01}}{P_{02}} = 1 + a^2 U_n^2(y); \quad (8-7-7)$$

здесь a — обобщенная расстройка [см. выражение (8-7-4)];

$$y = \left(\frac{2a}{\tilde{b}} + 1 \right);$$

$U_n(y)$ — полином Чебышева второго рода n -го порядка [см. формулу (Д-6-65)].

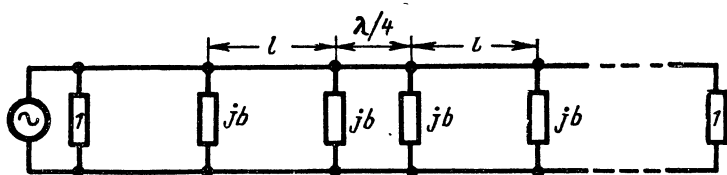


Рис. 8-35. Эквивалентная схема включения многорезонансного фильтра с четвертьволновой связью.

Цифрой 1 обозначены единичные (согласованные) сопротивления источника э. д. с. и нагрузки.

Потери в многорезонансном фильтре, состоящем из резонаторов в виде отрезков длинной линии, как и в фильтре с сосредоточенными постоянными, имеет смысл учитывать только при резонансе. Если фильтр состоит из n одинаковых резонаторов, то общие потери в фильтре при резонансе в n раз больше потерь в каждом из резонаторов.

Многорезонансный фильтр с распределенными постоянными и четвертьволновой связью. Большое затухание в полосе непрозрачности и крутые скаты резонансной кривой можно получить, связывая звенья фильтра (резонаторы) с помощью четвертьволновых отрезков линии. При этом используется свойство таких отрезков трансформировать полное сопротивление. Четвертьволновые отрезки обеспечивают простой способ составления фильтра из отдельных резонаторов, так как при этом каждый резонатор может быть настроен отдельно. Допуски на размеры диафрагм при этом менее строго по сравнению с много-

звенным фильтром с непосредственной связью резонаторов.

Эквивалентная схема включения n -звенного фильтра с четвертьволновой связью в волноводную линию между согласованными нагрузкой и генератором дана на рис. 8-35. Звенья фильтра одинаковы и симметричны. Волновая матрица передачи четвертьволнового отрезка в отсутствие потерь согласно табл. 8-2 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{vmatrix}.$$

Перемножая волновые матрицы передачи звеньев и четвертьволновых отрезков, получаем для n -звеньев

$$|T_{11}|^2 = 1 + a^2 U_n^2(x) \approx 1 + a^2 U_n^2(x); \quad (8-7-8)$$

здесь a — обобщенная расстройка [см. соотношение (8-7-4)];

$$x = (a + \sin \beta l);$$

$U_n(x)$ — полином Чебышева второго рода n -го порядка.

Неравномерность в полосе пропускания увеличивается с увеличением числа звеньев. Поэтому фильтры с числом звеньев более 4 применяются редко.



ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

9-1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Главы 5—8 посвящены свойствам линейных цепей в установившемся режиме, при котором токи и напряжения во всех элементах цепи предполагаются постоянными или изменяющимися по периодическому закону в бесконечно большом интервале времени. В этой главе рассматриваются переходные процессы (см. § 1-6), возникающие в электрических цепях при каждом включении и выключении внешних источников э. д. с. или при изменении параметров цепей C , L и R (рис. 9-1 и 9-2).

На основании формулы (1-6-36) время релаксации электрической цепи можно представить в виде

$$\tau_3 = \frac{\frac{Cu^2}{2} + \frac{Li^2}{2}}{i^2 R}; \quad (9-1-1)$$

здесь сопротивление R определяет все виды потерь.

Если можно полагать, что в данной электрической цепи либо $C \approx 0$, либо индуктивность $L \approx 0$, то соответственно

$$\left. \begin{aligned} \tau_3 &= CR/2; \\ \tau_3 &= \frac{L}{2R}. \end{aligned} \right\} \quad (9-1-2)$$

С учетом формулы (7-2-10) время релаксации для электрической цепи переменного тока при резонансе

$$\tau_3 = Q/\omega_r; \quad (9-1-3)$$

для простого контура, состоящего из последовательно соединенных C , L и R , с учетом формул (7-2-5) и (7-2-7а)

$$\tau_3 = L/R. \quad (9-1-4)$$

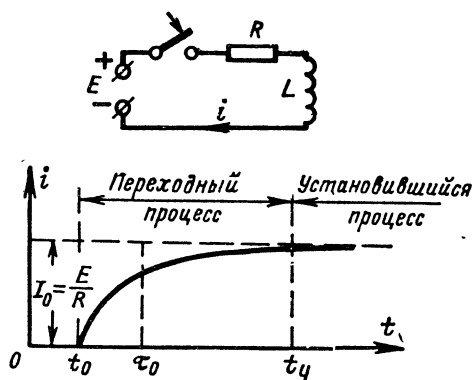


Рис. 9-1. Переходный процесс при включении э. д. с. в цепь, содержащую индуктивность.

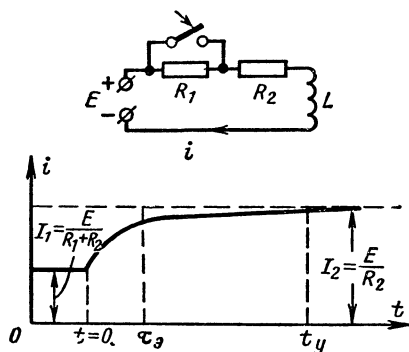


Рис. 9-2. Переходный процесс при изменении сопротивления цепи, обладающей индуктивностью.

Из найденных значений τ_3 следует, что время переходного процесса [см. выражение (1-6-22)] определяется соотношением параметров цепи C , L , R . Если в уравнениях электрической цепи величинами L и C можно пре-

небрежь, то время переходного процесса практически равно нулю.

Энергия, рассеиваемая в электрической цепи при переходном процессе, согласно формулам (1-6-21) равна величине, на которую изменяется запасенная энергия. В качестве примера рассмотрим перераспределение энергии, запасенной конденсатором емкостью C при напряжении U , после присоединения к нему незаряженного конденсатора с такой же емкостью. Начальная энергия,

$$W_1 = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

а энергия в обоих конденсаторах после их соединения и полного окончания переходного процесса $W_2 = q^2/4C$. Следовательно, за время переходного процесса произошло рассеяние энергии величиной

$$W_{\text{pacc}} = W_1 - W_2 = \frac{q^2}{4C}.$$

При этом напряжение на конденсаторах устанавливается в 2 раза меньше, т. е. $U/2$. Часть рассеянной энергии преобразуется в джоулево тепло в соединительных проводах, а другая часть расходуется на излучение. Очевидно, что если бы соединительные провода и обкладки конденсаторов обладали идеальной проводимостью, энергия расходовалась бы только на излучение (предполагается, что потеря в диэлектрике конденсаторов нет).

Когда оба конденсатора находятся внутри замкнутой оболочки из идеального проводника, а обкладки конденсаторов и соединительные провода обладают идеальной проводимостью, то после соединения конденсаторов возникнут незатухающие электрические колебания, представляющие собой периодическое превращение энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно. Такие колебания возникают всегда при включении или выключении любой электрической цепи, не обладающей потерями.

Так как запасенная энергия пропорциональна второй степени напряжения и тока, то из выражения (1-6-21) следует, что переходный процесс тока или напряжения описывается формулой

$$u, i \approx W^{1/2} e^{-\frac{t}{\tau_0}};$$

здесь

$$\tau_0 = 2\tau_0 \quad (9-1-5)$$

— постоянная времени электрической цепи.

За время τ_0 величины тока и напряжения уменьшаются в e раз.

С учетом выражения (9-1-5) на основании формулы (1-6-22) при $W_1=0$ время переходного процесса

$$t_y = 2,3\tau_0. \quad (9-1-6)$$

Классический метод исследования переходных процессов в электрических цепях сводится к непосредственному нахождению решений дифференциальных уравнений (6-2-8) или (6-2-16).

Рассмотрим применение этого метода на примерах анализа цепей с сосредоточенными постоянными, электромагнитные процессы в которых описываются системой неоднородных уравнений вида

$$i_k R_k + \sum_{j=1}^n L_{kj} \frac{di_j}{dt} + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt = e_k \quad (9-1-7)$$

или

$$R_k \frac{di_k}{dt} + \sum_{j=1}^n L_{kj} \frac{d^2 i_j}{dt^2} + \frac{1}{C_k} i_k = \frac{de_k}{dt}. \quad (9-1-7a)$$

В общем случае решением этих уравнений является сумма, состоящая из частного решения их и общего решения системы однородных уравнений вида

$$R_k \frac{di_k}{dt} + \sum_{j=1}^n L_{kj} \frac{d^2 i_j}{dt^2} + \frac{1}{C_k} i_k = 0, \quad (9-1-8)$$

определяющих токи или напряжения в цепи, обусловленные запасом энергии в элементах цепи, при отключенном внешнем источнике э. д. с. (свободные или собственные колебания). Частное решение системы неоднородных уравнений (9-1-7) и (9-1-7a) зависит от вида внешнего воздействия (вынужденные колебания) и находится как решение для установившегося режима. Таким образом,

$$i_k = i_{k \text{ вын}} + i_{k \text{ св}} \quad (9-1-9)$$

или

$$u_k = u_{k \text{ вын}} + u_{k \text{ св}}. \quad (9-1-10)$$

Амплитуды и фазы составляющих тока и напряжения определяются начальными условиями. Так как начальный запас энергии в реактивных элементах ограничен, то при наличии потерь свободные колебания с течением времени затухают и при $t \rightarrow \infty$ в цепи будут наблюдаться только вынужденные колебания (установившийся процесс).

Переходные процессы в сложных цепях можно исследовать с помощью преобразования Фурье, интеграла Дюамеля и преобразования Лапласа.

Задача исследования переходных процессов в каком-либо линейном четырехполюснике состоит в том, что требуется вычислить напряжение на выходе четырехполюсника $u_2(t)$, возникающее при включении на его вход в момент времени $t=0$ некоторого напряжения $u_1(t)$. При этом задается электрическое состояние четырехполюсника в момент включения, определяемое начальными условиями. Чаще всего встречаются задачи, в которых в момент включения четырехполюсник является «пустым», т. е. запасенной энергии в нем нет. В качестве основной величины, характеризующей четырехполюсник, обычно задается комплексный коэффициент передачи напряжения $K(j\omega)$, используемый для расчетов в установившемся режиме [см. выражение (6-5-1)].

Преобразование Фурье может быть использовано, если входное напряжение четырехполюсника представляет абсолютно интегрируемую функцию. В этом случае непериодическое напряжение описывается интегралом Фурье (Д-7-12):

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (9-1-11)$$

где

$$S_1(j\omega) = \int_0^{\infty} u_1(t) e^{-j\omega t} dt \quad (9-1-12)$$

— спектральная характеристика входного напряжения.

Аналогично напряжение на выходе четырехполюсника

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (9-1-13)$$

и спектральная плотность

$$S_2(j\omega) = \int_0^{\infty} u_2(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Так как комплексные амплитуды или комплексные действующие значения напряжения на входе и выходе связаны через комплексный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}}$$

и так как комплексные амплитуды пропорциональны спектральным плотностям, то

$$S_2(j\omega) = K(j\omega) S_1(j\omega), \quad (9-1-14)$$

т. е. спектр выходного напряжения отличается от спектра входного напряжения умножением на коэффициент передачи.

Подставляя правую часть равенства (9-1-14) в первое выражение (9-1-13), получаем:

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) S_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (9-1-15)$$

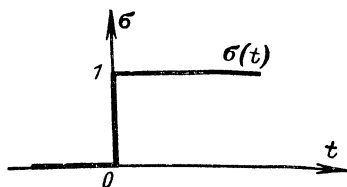


Рис. 9-3. Единичная функция.

где спектральная плотность $S_1(j\omega)$ определяется интегралом (9-1-12).

Таким образом, согласно методу преобразования Фурье выходное напряжение четырехполюсника $u_2(t)$ определяется по частотному спектру напряжения на входе

$u_1(t)$. Спектральные характеристики $S(j\omega)$ некоторых функций приведены в § Д-7.

Метод интеграла Дюамеля проще метода преобразования Фурье в том отношении, что вместо двух интегралов (9-1-12) и (9-1-15), вычисление которых обычными методами затруднительно, задача сводится к вычислению одного интеграла, но предварительно нужно найти решение, соответствующее единичной функции на входе четырехполюсника. График напряжения в форме единичной функции имеет вид, приведенный на рис. 9-3:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (9-1-16)$$

Физически эта функция реализуется при включении в момент $t=0$ источника постоянного единичного напряжения.

В более общей форме единичную функцию с запаздывающим аргументом можно записать в следующем виде:

$$\sigma(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ 1 & \text{при } t \geq \tau. \end{cases} \quad (9-1-16a)$$

Вид этой функции приведен на рис. 9-4.

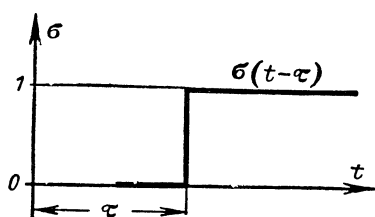


Рис. 9-4. Единичная функция с запаздывающим аргументом.

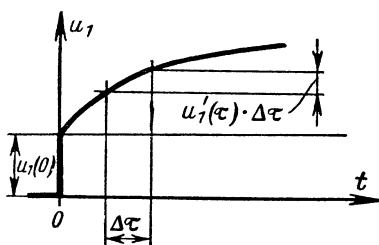


Рис. 9-5. Представление напряжения с помощью единичной функции с запаздывающим аргументом.

Особое значение единичной функции среди других объясняется тем, что любую другую функцию можно представить с помощью единичной. Действительно, пусть величина напряжения на входе четырехполюсника при $t < 0$

$$u_1(t) = 0,$$

при $t=0$

$$u_1(t) = u_1(0)$$

и затем изменяется по некоторой кривой (рис. 9-5). При этом напряжение $u_1(t)$ можно представить суммой единичных запаздывающих функций

$$u_1(t) = u_1(0) \sigma(t) + \sum_{\tau=0}^{\tau=t} u_1'(\tau) \sigma(t - \tau) \Delta \tau, \quad (9-1-17)$$

где $u_1'(\tau)$ — производная функция $u_1(t)$ при $t=\tau$. Если

интервал Δt бесконечно мал, то суммирование переходит в интегрирование

$$u_1(t) = u_1(0)\sigma(t) + \int_0^t u_1'(\tau)\sigma(t-\tau) d\tau. \quad (9-1-17a)$$

Если единичная функция вызывает на выходе четырехполюсника напряжение $h(t)$, то согласно принципу суперпозиции напряжение $u_1(t)$ вызовет напряжение

$$u_2(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t h(t-\tau)u_1'(\tau) d\tau. \quad (9-1-17б)$$

Величина $h(t)$, называемая переходной функцией или характеристикой, определяет напряжение на выходе четырехполюсника при включении на его вход единичной функции.

Преобразование Лапласа в отличие от преобразования Фурье применимо к более широкому классу функций, которые не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости. К числу таких функций, в частности, относятся постоянная э. д. с. и синусоидальная э. д. с.:

$$\int_0^{\infty} U_0 dt = \infty, \text{ где } U_0 = \text{const};$$

$$\int_0^{\infty} |\sin \omega t| dt = \infty.$$

Согласно преобразованиям Лапласа (Д-7-20) и (Д-7-19) непериодическое напряжение на входе четырехполюсника

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} S_1(p) e^{pt} dp, \quad (9-1-18)$$

где

$$S_1(p) = \int_0^{\infty} u_1(t) e^{-pt} dt \quad (9-1-19)$$

— комплексный спектр входного напряжения в комплексной плоскости p .

Аналогично напряжение на выходе четырехполюсника

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} S_2(p) e^{pt} dp, \quad (9-1-20)$$

где

$$S_2(p) = \int_0^\infty u_2(t) e^{-pt} dt = K(p) S_1(p) \quad (9-1-21)$$

— комплексный спектр выходного напряжения в комплексной плоскости p ;

$K(p)$ — комплексный коэффициент передачи системы, в котором величина $j\omega$ заменена на p . Допустимость такой замены следует из того, что $K(j\omega)$ и $S_1(j\omega)$ получаются, если задано изменение напряжения в форме $e^{j\omega t}$. Очевидно, если задать напряжение в форме e^{pt} , то получим $K(p)$ и $S_1(p)$.

Подставляя правую часть соотношения (9-1-21) в формулу (9-1-20), получаем:

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} K(p) S_1(p) e^{pt} dp. \quad (9-1-22)$$

Таким образом, согласно методу преобразования Лапласа выходное напряжение $u_2(t)$ определяется по изображению спектра напряжения на входе $u_1(t)$.

Напряжение на выходе линейного четырехполюсника зависит от вида входного напряжения и свойств самого четырехполюсника. Следовательно, любая формула, определяющая напряжение на его выходе, должна содержать две функции, из которых одна выражает входное напряжение, а вторая характеризует свойства четырехполюсника. Рассмотрим с этой точки зрения выражения (9-1-15), (9-1-20) и (9-1-176). Эти формулы представляют собой интегральные выражения, что обусловлено применением при их выводе принципа суперпозиции. В интегралах Фурье и Лапласа входное напряжение представлено спектром $S_1(j\omega)$ или его изображением $S_1(p)$, а в интеграле Дюамеля — производной функции $u_1(t)$. В интегралах Фурье и Лапласа свойства четырехполюсника выражены через коэффициент передачи

$K(j\omega)$ или $K(p)$, а в интеграле Дюамеля — через переходную функцию $h(t)$.

Выясним связь между переходной характеристикой $h(t)$ и коэффициентом передачи $K(p)$ системы в плоскости комплексного переменного p . Переходная характеристика $h(t)$ представляет собой напряжение на выходе при подаче на вход напряжения в виде единичной функции, т. е.

$$u_2(t) = h(t), \quad (9-1-23)$$

если

$$u_1(t) = \sigma(t).$$

Но согласно табл. Д-5

$$\sigma(t) \div \frac{1}{p}$$

и, следовательно,

$$S_2(p) = \frac{K(p)}{p}. \quad (9-1-24)$$

Таким образом, функция

$$h(t) \div \frac{K(p)}{p} \quad (9-1-25)$$

является оригиналом изображения $K(p)/p$.

Операторный метод решения дифференциальных и интегродифференциальных уравнений основан на преобразованиях Лапласа и их свойствах. Сущность этого метода состоит в том, что исходные уравнения заменяются соответствующими уравнениями изображений. Решение последних представляет изображение искомого решения, которое находится с помощью обратного преобразования Лапласа.

Применим операторный метод к расчету переходного процесса в последовательном контуре. Электромагнитный процесс в этом контуре описывается уравнением (6-2-9):

$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt.$$

Пусть $i(t) \div I(p)$ и $e(t) \div E(p)$. На основании выражений (Д-7-21), (Д-7-23), (Д-7-28) и (Д-7-30) для контура

с нулевыми начальными условиями $U_c(0)=0$, $i(0)=0$ получим:

$$E(p) = I(p) \left(R + pL + \frac{1}{pC} \right)$$

или

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{E(p)}{Z(p)}, \quad (9-1-26)$$

где

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} \quad (9-1-27)$$

— операторное сопротивление. Оно может быть получено из выражения для комплексного сопротивления контура $Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ заменой в нем величины $j\omega$ на p . Величины pL и $1/pC$ называются соответственно операторным индуктивным и операторным емкостным сопротивлениями. Величина, обратная $Z(p)$,

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$$

называется операторной проводимостью.

Оригинал изображения [см. формулы (9-1-26)] можно найти с помощью формулы Хевисайда (Д-7-36), представив функцию $I(p)$ на основании формулы (Д-7-35) в виде дроби, т. е.

$$I(p) = \frac{H_1(p)}{pH_2(p)}.$$

9-2. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПРОСТЫХ ЦЕПЯХ

При исследовании переходных процессов в простых цепях наиболее пригоден метод непосредственного решения дифференциальных уравнений.

Цепь из последовательно соединенных сопротивления и индуктивности. При подключении такой цепи к источнику э. д. с. $e(t)$ возникает электромагнитный процесс, описываемый уравнением

$$iR + L \frac{di}{dt} = e(t).$$

Решение этого уравнения [см. формулу (9-1-9)]:

$$i = i_{св} + i_{вын};$$

здесь $i_{св}$ является решением однородного уравнения

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad (9-2-1)$$

и имеет вид:

$$i_{св} = Ae^{kt}, \quad (9-2-2)$$

где $k = -R/L$ — корень характеристического уравнения

$$k + \frac{R}{L} = 0.$$

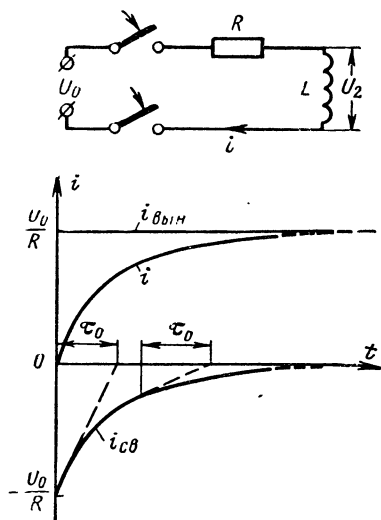


Рис. 9-6. Переходный процесс при включении постоянного напряжения в цепь, состоящую из индуктивности и сопротивления.

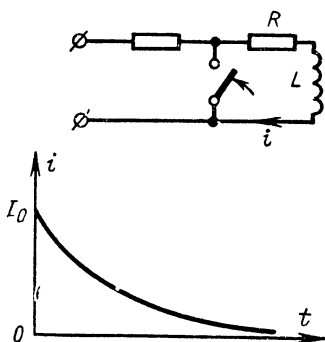


Рис. 9-7. Ток в цепи RL при коротком замыкании.

Таким образом, ток в цепи RL при подключении ее к источнику э. д. с. определяется выражением

$$i = Ae^{-t/\tau_0} + i_{вын}, \quad (9-2-3)$$

здесь

$$\tau_0 = \frac{L}{R} \quad (9-2-3a)$$

— постоянная времени цепи [согласно (9-1-2) и (9-1-5)].

Если цепь RL (рис. 9-6) включается на постоянное напряжение U_0 , то согласно выражению (9-2-3) при $t \rightarrow \infty$

$$i = i_{вын} = \frac{U_0}{R}.$$

Так как согласно формуле (1-6-21) энергия в цепи не может изменяться скачком, следовательно, в данной цепи не может изменяться скачком и ток. Вследствие этого из выражения (9-2-3) при $t=0$ имеем:

$$0 = A + \frac{U_0}{R},$$

или

$$A = -\frac{U_0}{R}.$$

Подставляя значения $i_{\text{вын}}$ и A в правую часть выражения (9-2-3), находим, что при включении цепи RL ток и напряжение на индуктивности описываются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right); \\ u_L &= L \frac{di}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-4)$$

Из последней формулы следует, что в момент включения цепи напряжение источника уравнивается напряжением на индуктивности. Согласно формуле (1-6-21а) в процессе накопления магнитной энергии до величины $W_M = Li^2/2$ такое же количество энергии рассеивается; следовательно, за время переходного процесса источник отдает энергию, равную $2 W_M$. Действительно,

$$W_{\text{ист}} = \frac{Li^2}{2} + \int_0^{\infty} i_{\text{св}}^2 R dt = \frac{Li^2}{2} + Ri^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} dt = Li^2. \quad (9-2-4a)$$

Если цепь RL , по которой протекает постоянный ток I_0 , замыкается накоротко (рис. 9-7), то переходный процесс описывается выражением (9-2-2), в котором постоянная A с учетом выражения (9-2-4) определяется из решения уравнения

$$A e^{-\frac{R}{L}t} \Big|_{t=0} = I_0.$$

Отсюда находим, что при замыкании накоротко индуктивности ток и напряжение в цепи определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} i &= I_0 e^{-\frac{R}{L}t}; \\ u_L &= L \frac{di}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-5)$$

Запасенная в индуктивности энергия при этом расходуется на потери в сопротивлении.

При подключении цепи RL к источнику синусоидальной э. д. с. $e = E_m \sin(\omega t \pm \psi)$ (рис. 9-8) на основании формул (7-2-2) (9-1-9) и с учетом формул (9-2-3) и (9-2-3а) ток переходного режима

$$i = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}} = \frac{E_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau_0}},$$

где

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2};$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R};$$

$$\tau_0 = \frac{L}{R};$$

ψ — начальная фаза э. д. с.

Так как в начальный момент ($t=0$) $i=0$, то

$$\frac{E_m}{z} \sin(\psi - \varphi) + A = 0,$$

откуда

$$A = -\frac{E_m}{z} \sin(\psi - \varphi).$$

Следовательно, при включении цепи RL на синусоидальную э. д. с. ток и напряжение на индуктивности определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{E_m}{z} \left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right]; \\ u_L &= L \frac{di}{dt} = E_m \sin \varphi \left[\cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\omega \tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-6)$$

Следует подчеркнуть, что в этом случае характер переходного процесса зависит от мгновенного значения э. д. с.

источника в момент включения, т. е. от ее начальной фазы ψ . Если $\psi = \varphi$, то

$$i = \frac{E_m}{z} \sin \omega t;$$

$$u_L = E_m \sin \varphi \cos \omega t,$$

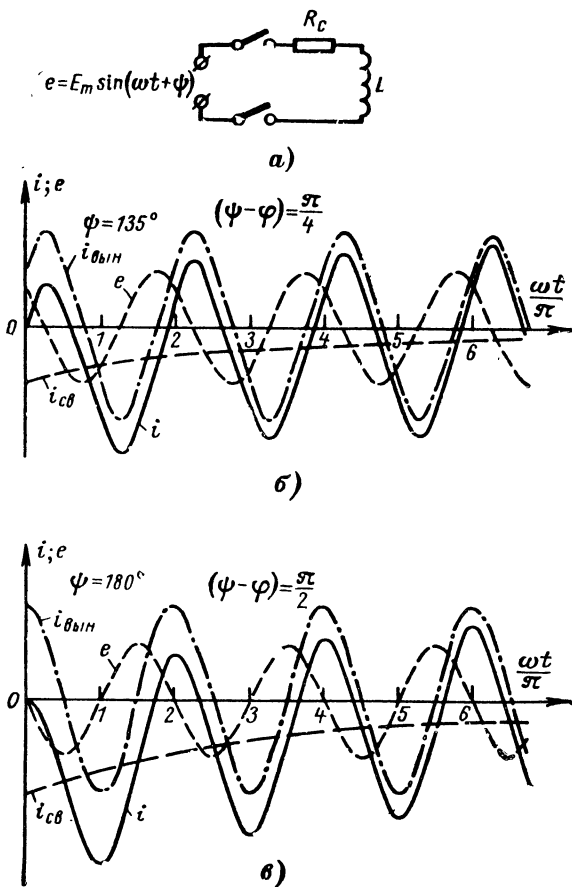


Рис. 9-8. Подключение цепи RL к источнику синусоидальной э. д. с.

т. е. в этом случае переходный процесс отсутствует и сразу после включения в цепи возникает установившийся режим.

Если

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}, \text{ то}$$

$$i = \frac{E_m}{z} \left(\cos \omega t - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right);$$

$$u_L = E_m \sin \varphi \left(-\sin \omega t + \frac{1}{\omega \tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right).$$

В этом случае ток в момент $\omega t \approx \pi$ и напряжение в момент $\omega t \approx \frac{3}{2}\pi$ могут достигнуть максимальных значений, которые почти в 2 раза больше амплитуд соответствующих величин в установившемся режиме.

Цепь из последовательно соединенных сопротивления и емкости. При подключении такой цепи к источнику э. д. с. $e(t)$ возникает электромагнитный процесс, описываемый уравнением

$$iR + \frac{1}{C} \int i dt = e(t).$$

Так как

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt},$$

то уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{e(t)}{RC}; \quad (9-2-7)$$

здесь u_C — напряжение на емкости.

Решением последнего уравнения согласно формуле (9-1-10) является выражение

$$u_C = u_{C\text{вын}} + u_{C\text{св}}.$$

Напряжение $u_{C\text{св}}$ находится из решения однородного уравнения

$$\frac{du_{C\text{св}}}{dt} + \frac{u_{C\text{св}}}{RC} = 0 \quad (9-2-7a)$$

в виде экспоненциальной функции

$$u_{C\text{св}} = A e^{-\frac{t}{\tau_0}}, \quad (9-2-8)$$

в которой

$$\tau_0 = RC$$

— постоянная времени цепи RC согласно (9-1-2) и (9-1-5).

Итак, при подключении цепи RC к источнику э. д. с. напряжение на емкости

$$u_C = u_{C\text{вын}} + Ae^{-\frac{t}{\tau_0}}. \quad (9-2-9)$$

Процесс заряда конденсатора через сопротивление постоянным напряжением U_0 (рис. 9-9) описывается вы-

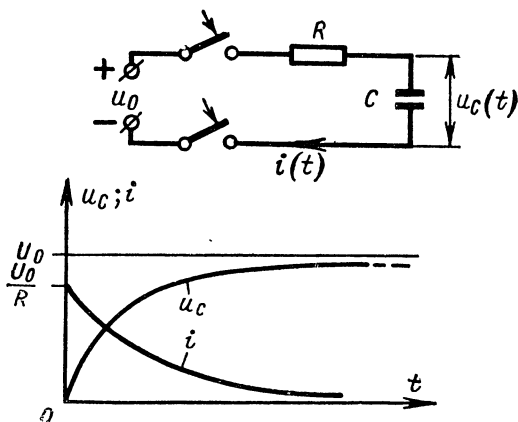


Рис. 9-9. Заряд конденсатора постоянным напряжением через сопротивление.

ражением (9-2-9). В этом случае при $t \rightarrow \infty$ напряжение на конденсаторе

$$u_C = u_{C\text{вын}} = U_0,$$

а при $t=0$

$$u_C = 0;$$

вследствие этого из выражения (9-2-9) находим:

$$A = -U_0.$$

Подставляя в формулу (9-2-9) значения $u_{C\text{вын}}$ и A , находим, что изменения напряжения на конденсаторе и тока заряда описываются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right); \\ i &= C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-10)$$

Из последнего выражения видно, что в момент включения ($t=0$) напряжение источника U_0 уравнивается напряжением на сопротивлении. Так как в процессе накопления энергии в конденсаторе до величины $W_3 = CU_0^2/2$ согласно формуле (1-6-21a) такое же количество энергии рассеивается, то, очевидно, за время заряда

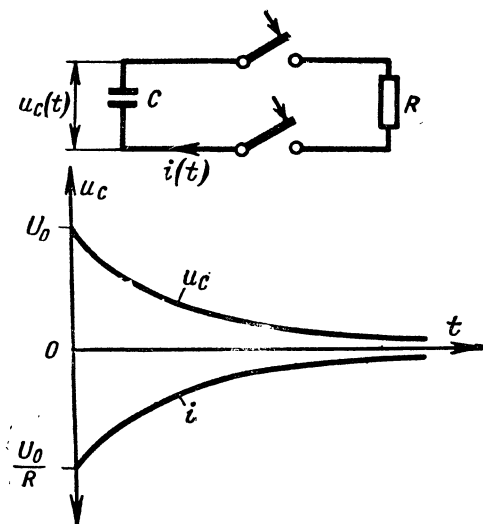


Рис. 9-10. Разряд конденсатора на сопротивление.

конденсатора источник отдаст энергию, равную $2W_3$. Действительно,

$$W_{\text{ист}} = \frac{CU_0^2}{2} + \int_0^{\infty} i^2 R dt = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{U_0^2 R}{R^2} \int_0^{\infty} e^{-2\frac{t}{RC}} dt = CU_0^2.$$

Разряд конденсатора через сопротивление (рис. 9-10) описывается выражением (9-2-8), в котором $\tau_0 = RC$, а постоянная $A = U_0$, так как при $t=0$ напряжение на конденсаторе $u_c = U_0$. Вследствие этого изменения напряжения и тока при разряде конденсатора описываются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= U_0 e^{-\frac{t}{RC}}; \\ i &= C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-11)$$

Если цепь RC подключается к источнику синусоидальной э. д. с. $e = E_m \sin(\omega t \pm \psi)$, то на основании формул (7-2-2) и (9-1-10) с учетом равенства (9-2-9) изменения напряжения на конденсаторе и тока в цепи описываются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= \frac{E_m}{z} \frac{1}{\omega C} \left[-\cos(\omega t + \psi - \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right]; \\ i &= C \frac{du_C}{dt} = \frac{E_m}{z} \left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\omega \tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (9-2-12)$$

где

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}; \\ \varphi &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{1}{R\omega C} \right); \\ \tau_0 &= RC. \end{aligned}$$

Выражения эти получены из тех же начальных условий (при $t=0$, $u_C=0$). Как и в случае включения цепи RL характер переходного процесса и здесь зависит от мгновенного значения э. д. с. в момент включения, т. е. от начальной фазы ψ . Однако в цепи RC переходный процесс отсутствует, если $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$; при $\psi = \varphi$ напряжение на конденсаторе и ток в цепи могут достигать максимальных значений, которые почти вдвое превышают амплитуды напряжения и тока в установившемся режиме.

Заряд конденсатора постоянным напряжением U_0 через R и L (рис. 9-11). Переходный процесс при этом определяется решением уравнения

$$iR + L \frac{di}{dt} + u_C = U_0,$$

которое с подстановкой

$$i = \frac{dq_C}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

можно переписать в виде

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{U_0}{LC}. \quad (9-2-13)$$

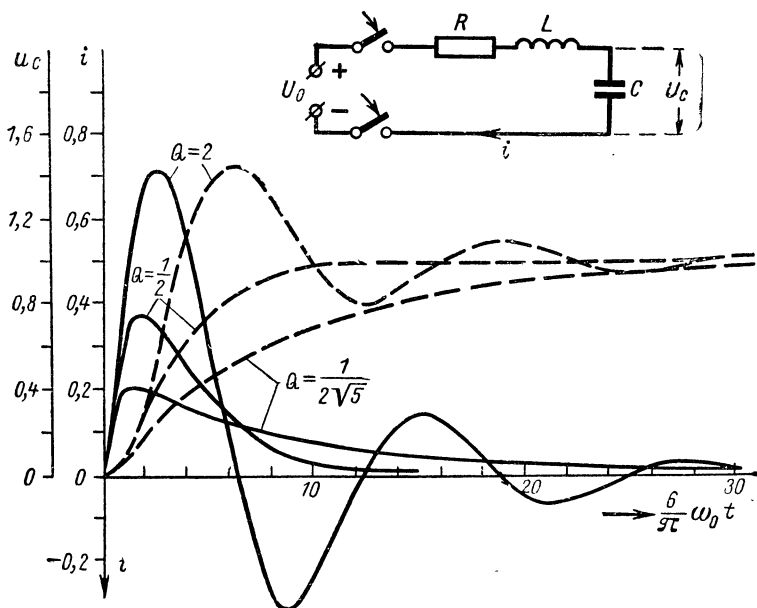


Рис. 9-11. Заряд конденсатора постоянным напряжением через сопротивление и индуктивность.

Сплошными линиями показано изменение тока в цепи, а пунктирными — изменение напряжения на конденсаторе.

Изменения тока в цепи и напряжения на конденсаторе во время переходного процесса можно согласно формулам (9-1-9) и (9-1-10) выразить так:

$$i = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}} = i_{\text{св}};$$

$$u_C = u_{\text{свын}} + u_{\text{ссв}} = U_0 + u_{\text{ссв}}.$$

Здесь величина $u_{\text{свын}}$ представляет частное решение уравнения (9-2-13), а $u_{\text{ссв}}$ — общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = 0, \quad (9-2-13a)$$

т. е.

$$u_{\text{св}} = U_1 e^{k_1 t} + U_2 e^{k_2 t}. \quad (9-2-14)$$

Здесь k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения

$$k^2 + 2\alpha k + \omega_0^2 = 0, \quad (9-2-14a)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{R}{2L}; \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}, \end{aligned} \right\} \quad (9-2-15)$$

т. е.

$$k_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (9-2-15a)$$

Очевидно, возможны три случая.

1. Аperiodический процесс имеет место, если $\alpha^2 > \omega_0^2$,

$$\begin{aligned} \text{т. е. } R &> 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{или} \\ Q &< \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (9-2-16)$$

В этом случае оба корня уравнения (9-2-14a) вещественны, но различны:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\alpha + \kappa \omega_0; \\ k_2 &= -\alpha - \kappa \omega_0, \end{aligned} \right\} \quad (9-2-17)$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}. \quad (9-2-17a)$$

Следовательно, решение уравнения (9-2-14) можно переписать в следующем виде:

$$u_{\text{св}} = U_1 e^{(-\alpha + \kappa \omega_0)t} + U_2 e^{(-\alpha - \kappa \omega_0)t}. \quad (9-2-18)$$

Так как в момент времени $t=0$ напряжение на конденсаторе и проходящий через индуктивность ток равны нулю,

то постоянные интегрирования U_1 и U_2 определяются из уравнений

$$U_0 + u_{C\text{св}}|_{t=0} = 0;$$

$$i = i_{\text{св}} = C \frac{du_{C\text{св}}}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

или

$$U_1 + U_2 = -U_0;$$

$$U_1(-\alpha + \kappa\omega_0) + U_2(-\alpha - \kappa\omega_0) = 0.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$U_1 = U_0 \frac{(-\alpha - \kappa\omega_0)}{2\kappa\omega_0};$$

$$U_2 = -U_0 \frac{(-\alpha + \kappa\omega_0)}{2\kappa\omega_0}.$$

Если подставить эти значения в формулу (9-2-18), то после соответствующих преобразований, при которых учитывают, что

$$\text{ch } \kappa\omega_0 t + \frac{1}{2Q\kappa} \text{sh } \kappa\omega_0 t = \frac{1}{\kappa} \text{sh } (\kappa\omega_0 t + \gamma),$$

где

$$\left. \begin{aligned} \text{ch } \gamma &= \frac{1}{2Q}; \\ \text{sh } \gamma &= \kappa; \\ \gamma &= \ln(\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 1}), \end{aligned} \right\} \quad (9-2-176)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= U_0 + u_{C\text{св}} = \\ &= U_0 \left\{ 1 - e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \frac{\text{sh } (\kappa\omega_0 t + \gamma)}{\text{sh } \gamma} \right\}; \\ i &= C \frac{du_{C\text{св}}}{dt} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\text{sh } (\kappa\omega_0 t)}{\text{sh } \gamma} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-19)$$

При $\kappa\omega_0 t = \gamma$

$$\left. \begin{aligned} i &= i_{\text{макс}} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{\gamma}{\sqrt{1-4Q^2}}}; \\ u_C &= U_0 \left(1 - \frac{1}{Q} e^{-\frac{\gamma}{\sqrt{1-4Q^2}}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9-2-19a)$$

Время переходного процесса [см. формулу (1-6-22)] найдем из решения уравнения

$$\frac{u_{C\text{св}}}{U_0} \Big|_{t=t_y} = 0,1.$$

При $Q \leq \frac{1}{6}$

$$\omega_0 t_y \approx \frac{2,3}{Q}. \quad (9-2-19б)$$

Следует отметить, что в момент включения ($t=0$).

$$\frac{du_C}{dt} \Big|_{t=0} = 0;$$

$$\frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = 1.$$

2. Критический случай, если $\alpha^2 = \omega_0^2$, т. е.

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{или}$$

$$Q = \frac{1}{2}. \quad (9-2-20)$$

При этом оба корня уравнения (9-2-14а) вещественны и одинаковы:

$$k_1 = k_2 = -\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} = \omega_0.$$

В этом случае решением уравнения (9-2-13а) является выражение

$$u_{C\text{св}} = (A+Bt)e^{-\omega_0 t}, \quad (9-2-21)$$

в котором постоянные A и B определяют из уравнений

$$u_{C\text{св}} \Big|_{t=0} = -U_0;$$

$$\frac{du_{C\text{св}}}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$A = -U_0;$$

$$B = \omega_0 A.$$

Подставляя полученные значения в правую часть выражения (9-2-21), находим:

$$\left. \begin{aligned} u_G &= U_0 - u_{C_{CB}} = U_0 \{ 1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \}; \\ i &= i_{CB} = C \frac{du_C}{dt} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \omega_0 t e^{-\omega_0 t}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-22)$$

При $\omega_0 t = 1$

$$\left. \begin{aligned} i &= i_{\text{макс}} = U_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{e}; \\ u_C &= U_0 \left(1 - \frac{2}{e} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9-2-22a)$$

Аналогично предыдущему находим, что

$$\omega_0 t_g \approx 3,9. \quad (9-2-22б)$$

3. Колебательный процесс возникает в цепи, если $\alpha^2 \leq \omega_0^2$,

$$\begin{aligned} \text{т. е. } R &< 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{или} \\ Q &> \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (9-2-23)$$

В этом случае оба корня уравнения (9-2-14а) комплексные и различные:

$$k_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_c; \quad (9-2-24)$$

здесь

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (9-2-25)$$

— собственная частота контура, причем

$$\left. \begin{aligned} j\omega_c &= \kappa\omega_0; \\ \kappa &= j \frac{\omega_c}{\omega_0}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-25a)$$

Заменяя в формулах (9-2-19) ω_0 на $j\omega_c$ и κ на $j \frac{\omega_c}{\omega_0}$, находим выражения, описывающие изменения напряжения u_c и тока i при колебательном процессе

$$\left. \begin{aligned} u_C &= U_0 \left[1 - \frac{\sin(\omega_c t + \varphi)}{\sin \varphi} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \right]; \\ i &= U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\sin \omega_c t}{\sin \varphi} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}; \end{aligned} \right\} \quad (9-2-26)$$

здесь

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\omega_c}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}; \\ \cos \varphi &= \frac{1}{2Q}; \\ \varphi &= \sin^{-1} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \end{aligned}$$

Если $\omega_c t = \varphi + n\pi$, т. е. когда

$$\omega_0 t = \frac{\varphi + n\pi}{\sin \varphi}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

$$\left. \begin{aligned} i &= i_{\text{макс}} = (-1)^n U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{\varphi + n\pi}{2Q \sin \varphi}}; \\ u_C &= U_0 \left[1 - (-1)^n \frac{e^{-\frac{\varphi + n\pi}{2Q \sin \varphi}}}{Q} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-26a)$$

Аналогично предыдущему находим, что в этом случае время переходного процесса определяется выражением

$$\omega_0 t_y = 2Q [2,3 - \ln \sin \varphi]. \quad (9-2-26б)$$

Если добротность $Q > 2$, то

$$\omega_0 t_y \approx 4,6Q.$$

Напряжение на конденсаторе достигает максимума при значениях $\omega_0 t$, определяемых из уравнения

$$\frac{d}{d\omega_0 t} \left[e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin(\sin \varphi \omega_0 t + \varphi) \right] = 0,$$

т. е. при $\omega_0 t = n\pi / \sin \varphi$, где $n = 1, 2, 3 \dots$

Подставляя в первую формулу (9-2-26) первое значение $\omega_0 t = \pi / \sin \varphi$, получаем:

$$u_{C \text{ макс}} = U_0 \left[1 + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}} \right] > U_0.$$

Следовательно, при колебательном процессе в цепи LCR на конденсаторе возникают перенапряжения — напряжения, превышающие э. д. с. источника.

Ток заряда конденсатора проходит через значение $i=0$ при $\omega_c t = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, т. е. в те же моменты времени, в которые напряжение на конденсаторе достигает максимальных значений. Если в момент времени, определяе-

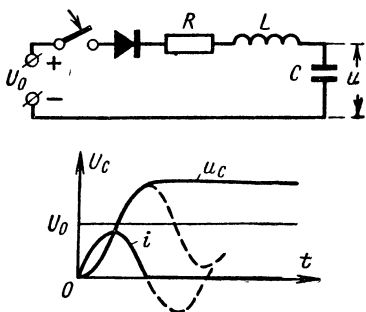


Рис. 9-12. Заряд конденсатора через вентиль.

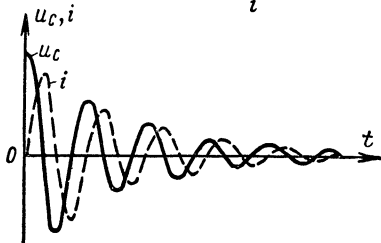
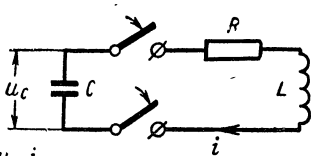


Рис. 9-13. Разряд конденсатора на цепь RL .

мый условием $\omega_c t = \pi$, источник э. д. с. отключается, например, с помощью вентиля (рис. 9-12), то переходный процесс в цепи заканчивается за время $t = \pi/\omega_c$, а энергия, поступившая от источника э. д. с., остается в конденсаторе. Величина этой энергии

$$W_9 = \frac{u_{C \text{ макс}}^2 C}{2} > W_{\text{расс}},$$

т. е. больше энергии, рассеиваемой при заряде; последняя с учетом значения тока i из второй формулы (9-2-26) равна:

$$W_{\text{расс}} = \int_0^{\pi} \frac{i^2 R}{\omega_c} d(\omega_c t) = \frac{U_0^2 C}{2} \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}} \right).$$

Если добротность цепи $Q \geq 10$, то

$$W_{\text{расс}}^* \approx \frac{U_0^2 C}{2} \frac{\pi}{Q}.$$

Следовательно, относительная величина потерь энергии, рассеиваемой при колебательном процессе заряда конденсатора через вентиль, может быть весьма малой. Действительно, при $Q > 10$

$$\frac{W_{\text{расс}}}{W_0} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}\right)}{\left(1 + e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}\right)^2} \approx \frac{\pi}{4Q} \ll 1.$$

Энергия, рассеянная за все теоретическое время заряда ($t \rightarrow \infty$) без вентилья, разумеется, равна $U_0^2 C/2$; это следует из формулы (1-6-21а). Действительно, используя вторую формулу (9-2-26), находим, что

$$W_{\text{расс}} = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Если $R \rightarrow 0$ ($Q \rightarrow \infty$), то выражения (9-2-26) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= U_0 (1 - \cos \omega_0 t); \\ i &= U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_0 t; \end{aligned} \right\} \quad (9-2-26\text{в})$$

следовательно, в этом случае максимальные значения напряжения на конденсаторе достигают значения $2U_0$ и в цепи сразу после включения устанавливается монохроматическое колебание без переходного процесса. При этом в течение одного полупериода колебания энергия от источника переходит в цепь, а в течение следующего полупериода полностью возвращается источнику.

Разряд конденсатора на цепь LR (рис. 9-13) описывается решением уравнений (9-2-13а) с учетом соответствующих начальных условий. Так как в этом случае в момент времени $t=0$ напряжение $u_C = U_0$, то в отличие от процесса заряда знаки перед постоянными интегрирования U_1 и U_2 меняются на обратные; при этом

$$U_1 = -U_0 \frac{-\alpha - \kappa\omega_0}{2\kappa\omega_0};$$

$$U_2 = +U_0 \frac{-\alpha + \kappa\omega_0}{2\kappa\omega_0}.$$

Вследствие этого ток в цепи и напряжение на конденсаторе при разряде определяются следующими выражениями.

1) при аperiодическом процессе

$$\left. \begin{aligned} u_c &= U_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \frac{\text{sh}(\kappa \omega_0 t + \gamma)}{\text{sh} \gamma}; \\ i &= -U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \frac{\text{sh} \kappa \omega_0 t}{\text{sh} \gamma}; \end{aligned} \right\} \quad (9-2-27)$$

2) в критическом случае

$$\left. \begin{aligned} u_c &= U_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}; \\ i &= -U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \omega_0 t e^{-\omega_0 t}; \end{aligned} \right\} \quad (9-2-28)$$

3) при колебательном процессе

$$\left. \begin{aligned} u_c &= U_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \frac{\sin(\omega_c t + \varphi)}{\sin \varphi}; \\ i &= -U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \frac{\sin \omega_c t}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-29)$$

Последние выражения представляют затухающие электрические колебания, частота которых при $Q \gg 1$ практически равна

$$\omega_c \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Соответствующая этой частоте длина волны в вакууме определяется формулой Томсона

$$\lambda = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \sqrt{LC} [м]. \quad (9-2-30)$$

Затухающие колебания характеризуются также декрементом затухания δ , который равен натуральному логарифму отношения амплитуд, разделенных одним периодом, т. е.

$$\delta = \ln \left(\frac{e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T)}} \right) = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \alpha T = \frac{\pi}{Q}. \quad (9-2-30a)$$

При больших значениях Q амплитуда затухающих колебаний медленно убывает, уменьшаясь в e раз за время $t=2Q/\omega_0$. В течение этого времени число периодов собственных колебаний равно $t/T=Q/\pi$. При сравнительно высоких частотах резонатор в виде контура с сосредоточенными постоянными CLR с большой добротностью, так же как и полый (объемный) резонатор (см. § 3-6), ис-

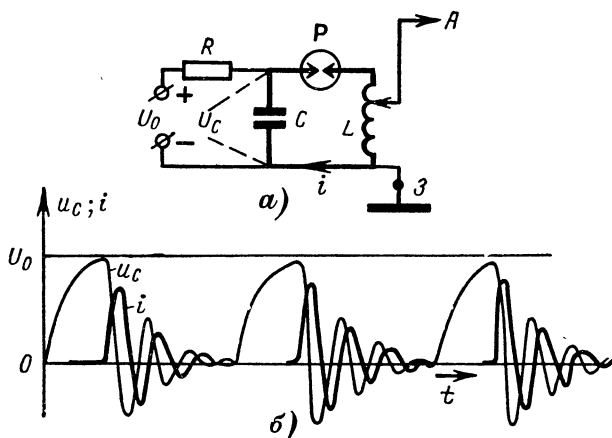


Рис. 9-14. Схема «искрового» радиопередатчика (а) и процесс в его колебательном контуре (б).

пользуют в качестве эталона частоты («электромагнитный камертон», «эхо-бокс»).

В контуре с малыми значениями L и C при разряде конденсатора возникают высокочастотные колебания. Устройство, состоящее из такого контура, разрядника и источника первичной энергии (рис. 9-14), использовалось на первом этапе развития радиопередающей техники как генератор высокочастотных колебаний.

Переходный процесс при выключении постоянного тока I_0 в цепи RCL (рис. 9-15), т. е. «разряд» дросселя на емкость через сопротивление, также описывается решением уравнения (9-2-13а) при соответствующем выборе начальных условий. В этом случае $u_{C \text{ вык}}=0$, $i_{\text{вык}}=0$ и, следовательно,

$$u_C = u_{C \text{ св}};$$

$$i = i_{\text{св}} = C \frac{du_C}{dt}.$$

При $t=0$ напряжение на конденсаторе $u_C=0$, а ток $i=I_0$. Поэтому при апериодическом процессе из выражения (9-2-8) имеем:

$$U_1 + U_2 = 0;$$

$$U_1(-\alpha + \kappa\omega_0) + U_2(-\alpha - \kappa\omega_0) = \frac{I_0}{C}$$

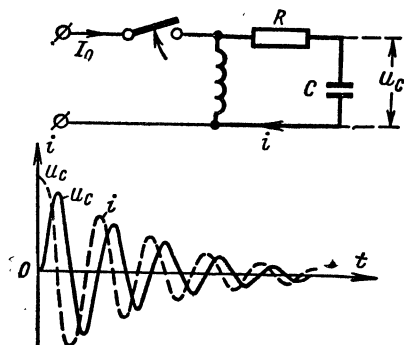


Рис. 9-15. «Разряд» индуктивности на цепь CR .

или

$$U_1 = \frac{I_0}{2\kappa\omega_0 C};$$

$$U_2 = -\frac{I_0}{2\kappa\omega_0 C}.$$

Подставляя эти значения в формулу (9-2-14) и учитывая соотношения (9-2-17б), получаем:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \frac{\text{sh } \kappa\omega_0 t}{\text{sh } \gamma}; \\ i &= -I_0 \frac{\text{sh } (\kappa\omega_0 t - \gamma)}{\text{sh } \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-31)$$

Для критического случая из выражения (9-2-21) имеем:

$$(A+Bt) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \Big|_{t=0} = 0;$$

$$C \frac{d}{dt} (A+Bt) e^{-\omega_0 t} \Big|_{t=0} = I_0,$$

откуда

$$A = 0, B = I_0/C.$$

Вследствие этого

$$\left. \begin{aligned} u_C &= I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \omega_0 t e^{-\omega_0 t}; \\ i &= C \frac{du_C}{dt} = I_0 [1 - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}]. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-32)$$

При периодическом процессе из формул (9-2-31) путем замены ω_0 на $j\omega_c$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \frac{\sin \omega_c t}{\sin \varphi}; \\ i &= -I_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \frac{\sin(\omega_c t - \varphi)}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-33)$$

На рис. 9-11, 9-13 и 9-15 даны кривые тока и напряжения при заряде и разряде конденсатора, а также при переходном процессе выключения постоянного тока. Кривые на рис. 9-11 построены по формулам (9-2-19), (9-2-22) и (9-2-26) для всех трех случаев:

$$Q < \frac{1}{2}, Q = \frac{1}{2} \text{ и } Q > \frac{1}{2};$$

при этом предполагается, что $\sqrt{\frac{L}{C}} = 1$, $U_0 = 1$ и $I_0 = 1$.

Включение синусоидального напряжения в цепь CLR. В этом случае дифференциальное уравнение, описывающее электромагнитный процесс, имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{U_m}{LC} \sin(\omega t + \psi). \quad (9-2-34)$$

Решением этого уравнения [с учетом соотношений (9-1-10) и (9-2-14)] является выражение

$$u_C = \frac{U_m}{z\omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + U_1 e^{k_1 t} + U_2 e^{k_2 t}, \quad (9-2-35)$$

в котором

$$z = R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right);$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R}.$$

Рассматривая только колебательный процесс [см. формулу (9-2-23)] как имеющий наибольшее практическое значение, корни $k_{1,2}$ характеристического уравнения (9-2-14а) выберем согласно выражениям (9-2-24) и (9-2-25): -

$$k_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_c,$$

где

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Постоянные интегрирования U_1 , U_2 находим из решения уравнений

$$\left. \begin{aligned} u_G &= \{ u_{G \text{ вын}} + U_1 e^{(-\alpha + j\omega_c)t} + \\ &\quad + U_2 e^{(-\alpha - j\omega_c)t} \}_{t=0} = 0; \\ i &= C \frac{du_G}{dt} = \left\{ C \frac{du_{G \text{ вын}}}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + C \frac{d}{dt} [U_1 e^{(-\alpha + j\omega_c)t} + U_2 e^{(-\alpha - j\omega_c)t}] \right\}_{t=0} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9-2-36)$$

определяемых начальными условиями

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \frac{U_m}{z\omega C} \left\{ -\sin(\psi - \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + j \frac{\omega}{\omega_c} \left[\cos(\psi - \varphi) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\psi - \varphi) \right] \right\}; \\ U_2 &= \frac{1}{2} \frac{U_m}{z\omega C} \left\{ -\sin(\psi - \varphi) - \right. \\ &\quad \left. - j \frac{\omega}{\omega_c} \left[\cos(\psi - \varphi) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\psi - \varphi) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (9-2-35), получаем выражение, описывающее изменение напряжения на конденса-

торе при включении синусоидального напряжения в цепь CLR

$$u_C = \frac{U_m}{z\omega C} \left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) + e^{-\alpha t} \left\{ \sin(\psi - \varphi) \cos \omega_c t - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\omega}{\omega_c} \left[\cos(\psi - \varphi) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\psi - \varphi) \right] \sin \omega_c t \right\} \right]. \quad (9-2-37)$$

При включении напряжения в момент, соответствующий $\psi = \varphi$,

$$u_C = \frac{U_m}{z\omega C} \left\{ \sin \omega t - e^{-\alpha t} \frac{\omega}{\omega_c} \sin \omega_c t \right\}. \quad (9-2-37a)$$

При этом ток и напряжение на индуктивности

$$\left. \begin{aligned} i &= C \frac{du_C}{dt}; \\ u_L &= L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2-38)$$

Из этих выражений следует, что ток и напряжение в цепи CLR при включении ее на синусоидальное напряжение состоят из суммы вынужденных колебаний с частотой ω и собственных колебаний с частотой ω_c . Когда $\omega_c \neq \omega$, то возникают биения — амплитуда суммарного колебания периодически изменяется с частотой $\Omega = |\omega - \omega_c|$. Так как собственные колебания затухают, то при $t \geq t_y$, определяемом формулой (9-2-26б), биения прекращаются.

При «малой» расстройке контура ($|\omega_c - \omega| \ll \omega$) и если при этом $Q > 5$, т. е. $\omega_c \approx \omega_0$, из выражения (9-2-37a) имеем:

$$u_C \approx \frac{QU_m}{\sqrt{1+a^2}} \left\{ \sin \omega t - e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \right\} = \\ = \frac{QU_m}{\sqrt{1+a^2}} \sqrt{(1+e^{-2\alpha t}) - 2e^{-\alpha t} \cos \Omega t \sin(\omega_0 t + \gamma)}; \quad (9-2-39)$$

здесь $\Omega = \omega - \omega_0$ — разностная частота; $a = 2Q \frac{\Omega}{\omega_0}$ — обобщенная расстройка [см. формулу (7-2-12б)];

$$\gamma = \arctg \frac{\sin \Omega t}{e^{-\alpha t} + \cos \Omega t}.$$

На рис. 9-16 выражение (9-2-39) представлено графически. Если частота питающего контур напряжения совпа-

дает с частотой его собственных колебаний ($\omega = \omega_c$), то выражение (9-2-39) принимает вид:

$$u_c = QU_m (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega t; \quad (9-2-40)$$

следовательно, при настройке контура на частоту питающего напряжения переходный процесс устанавливается

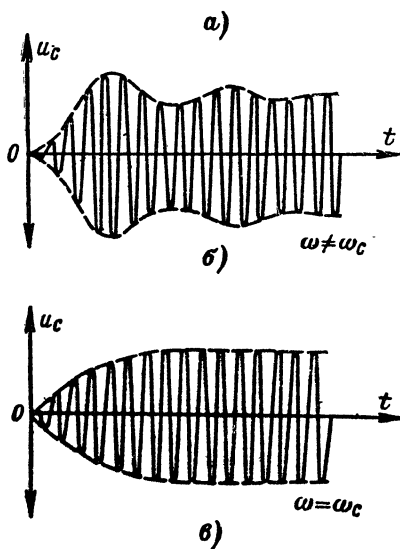
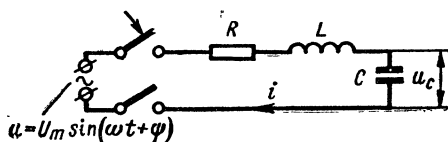


Рис. 9-16. Включение синусоидального напряжения в цепь, состоящую из последовательно соединенных емкости, индуктивности и сопротивления (а), и графики переходного процесса в этой цепи (б, в).

монотонно. Огибающая амплитуд в этом случае определяется выражением

$$U_{mc} = U_m Q (1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}); \quad (9-2-41)$$

здесь

$$\tau_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R} = \frac{2Q}{\omega_0} \quad (9-2-42)$$

— постоянная времени контура CLR .

Так как согласно соотношению (9-2-26б) при $Q > 5$ время установления $\omega_0 t_y \approx 4,6 Q$, то с учетом выражения (7-2-20)

$$t_y = \frac{2,3}{\alpha} = 2,3 \tau_0 = \frac{4,6 Q}{\omega_0} = \frac{0,7}{2\Delta f}, \quad (9-2-43)$$

где $2\Delta f$ — полоса пропускания.

Таким образом, время установления тем больше, чем уже полоса пропускания.

9-3. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАХ

Переходные процессы в сложных цепях описываются переходной характеристикой $h(t)$, определяемой выражением (9-1-25) на основе преобразования Лапласа; при этом сложная цепь представляется четырехполюсником. С помощью переходной характеристики определяют напряжение $u_2(t)$ на выходе четырехполюсника, возникающее при включении на его вход в момент $t=0$ входного напряжения $u_1(t)$.

Дифференцирующая цепь представляет собой четырехполюсник, напряжение на выходе которого пропорционально производной от напряжения на входе. Напряжения на входе и выходе идеальной дифференцирующей схемы связаны соотношением

$$u_2(t) = a \frac{du_1(t)}{dt},$$

где a — коэффициент пропорциональности — постоянная величина, не зависящая от частоты.

Если $\dot{U}_1 = Ue^{j\omega t}$, то $\dot{U}_2 = aj\omega \dot{U}_1$, и следовательно, коэффициент передачи идеальной дифференцирующей схемы в установившемся режиме

$$K_d(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = aj\omega. \quad (9-3-1)$$

В качестве реальных дифференцирующих цепей (рис. 9-17) используют цепочку LR (напряжение снимается с индуктивности) или цепочку CR (напряжение снимается с сопротивления). В установившемся режиме ко-

ээффициент передачи реальной дифференцирующей цепи согласно формуле (7-2-46)

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega\tau_0}{1 + j\omega\tau_0}; \quad (9-3-2)$$

при этом для цепи RC

$$\tau_0 = RC \quad (9-3-3)$$

и для цепи LR

$$\tau_0 = \frac{L}{R}. \quad (9-3-3a)$$

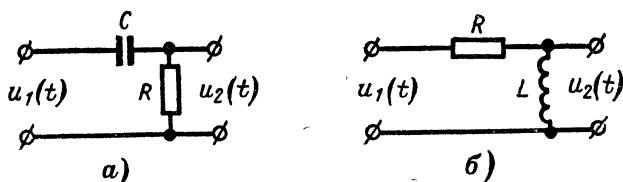


Рис. 9-17. Дифференцирующие цепи: типа RC (а) и типа RL (б).

Сравнивая формулы (9-3-2) и (9-3-1), находим, что при

$$\omega\tau_0 \ll 1 \quad (9-3-4)$$

коэффициент передачи

$$K(j\omega) \approx j\omega\tau_0 = K_d(j\omega) = aj\omega.$$

Заметим, что выполнимость условия (9-3-4) зависит не только от соотношения параметров схемы, но и от характера входной функции $u_1(t)$. Условие (9-3-4) характеризует «медленную» функцию.

Если

$$\omega\tau_0 \gg 1, \quad (9-3-4a)$$

что характеризует «быструю» функцию, то

$$K(j\omega) \approx 1,$$

т. е. «быстрая» функция не дифференцируется и, следовательно, $u_1(t) \approx u_2(t)$.

Для синусоидального колебания с частотой ω дифференцирование осуществляется при условии, если

$$\omega \ll \frac{1}{\tau_0}. \quad (9-3-5)$$

Функция, содержащая спектр частот, будет дифференцироваться, если наивысшая частота в ее спектре значительно меньше $1/\tau_0$.

Переходная характеристика $h(t)$ дифференцирующей цепочки согласно формуле (9-1-25) и (9-3-2) при замене в последней $j\omega$ на p является оригиналом изображения

$$h(t) \div \frac{p\tau_0}{p(p\tau_0 + 1)}. \quad (9-3-6)$$

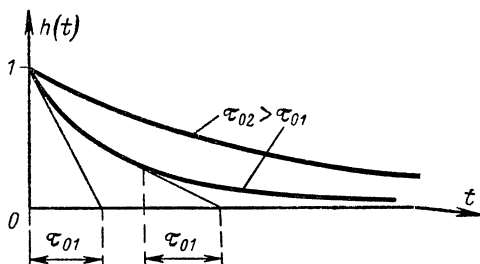


Рис. 9-18. Переходная характеристика дифференцирующей цепи.

Сравнивая правую часть этого выражения с формулой (Д-7-35), находим, что $H_1(p) = p\tau_0$ и $H_2(p) = (p\tau_0 + 1)$. Используя эти значения, по формуле Хевисайда (Д-7-36) находим переходную характеристику дифференцирующей цепи:

$$h(t) = e^{-\frac{t}{\tau_0}}; \quad (9-3-7)$$

график этой характеристики приведен на рис. 9-18. В соответствии с общим свойством экспоненциальной функции длина подкасательной в любой точке кривой $h(t)$ равна постоянной времени τ_0 , соответствующей промежутку времени, в течение которого $h(t)$ убывает в e раз. Переходная характеристика стремится к нулю тем быстрее, чем меньше постоянная времени τ_0 .

Переходная характеристика идеальной дифференцирующей схемы

$$u_2(t) = h_d(t) = \frac{d}{dt} \sigma(t) = \delta(t),$$

т. е. идеальная дифференцирующая схема превращает единичную функцию (9-1-16) в $\delta(t)$ — дельта-функцию

[см. выражение (Д-6-66а)], представляющую собой импульс, длительность которого бесконечно мала, а амплитуда бесконечно велика. Площадь такого импульса равна единице.

Дифференцирование единичного прямоугольного импульса напряжения. Такой импульс длительностью τ можно представить как результат включения единичного

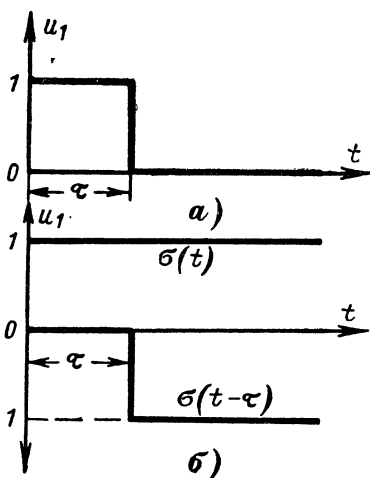


Рис. 9-19. Прямоугольный импульс с единичной амплитудой (а) и его представление в виде разности единичных функций (б).

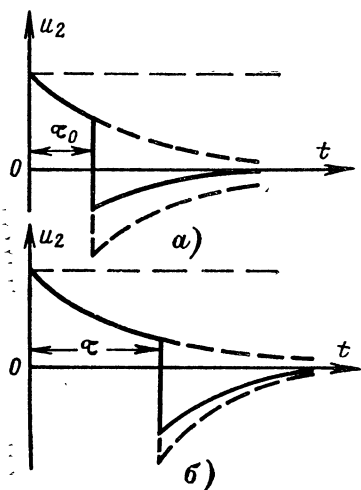


Рис. 9-20. Дифференцирование прямоугольных импульсов различной длительности.

напряжения на вход дифференцирующей цепи в момент $t=0$ и выключения его при $t=\tau$. Вместе с тем процесс выключения можно представить как процесс включения в момент $t=\tau$ второй единичной функции, противоположной первой по знаку (рис. 9-19). На основании этого аналитическое выражение единичного прямоугольного импульса имеет вид:

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t - \tau). \quad (9-3-8)$$

На основании формулы (9-1-23) напряжение на выходе дифференцирующей цепи

$$u_2(t) = h(t) - h(t - \tau); \quad (9-3-9)$$

с учетом формулы (9-3-7) при $0 \leq t \leq \tau$

$$u_2(t) = e^{-t/\tau_0}; \quad (9-3-10)$$

при $t \geq \tau$

$$u_2(t) = (1 - e^{\tau/\tau_0}) e^{-t/\tau_0}, \quad (9-3-10a)$$

т. е. форма кривой изменения напряжения на выходе цепи зависит от длительности импульса (рис. 9-20): короткий импульс практически не дифференцируется и лишь незначительно искажается его форма; длинный

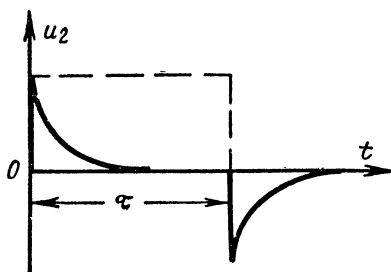


Рис. 9-21. Дифференцирование «длинного» импульса.

импульс хорошо дифференцируется — в начале и в конце дифференцируемого импульса получаются два экспоненциальных импульса противоположной полярности (рис. 9-21). Длительность экспоненциальных импульсов сокращается при уменьшении постоянной времени дифференцирующей цепи. Наличие напряжения на ее выходе при $t > \tau$, т. е. когда напряжение на входе равно нулю, обуславливается рассеянием энергии, запасенной в конденсаторе или индуктивности.

Дифференцирование трапецидального импульса. Рассмотрим предварительно дифференцирование вспомогательной функции $u_1(t)$ (рис. 9-22). Такую функцию можно представить как разность двух функций $u_1(t) = qt$ и $u_1(t-t_1) = q(t-t_1)$, где $q = U_0/t_1$ — наклон на участке $0 \leq t \leq t_1$.

При подаче на вход напряжения $u_1(t) = qt$ согласно формулам (9-1-20) и (9-1-21) напряжение $u_2(t)$ на выходе дифференцирующей схемы

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} K(p) S_1(p) e^{pt} dp.$$

Здесь

$$K(p) = \frac{\tau_0 p}{1 + \tau_0 p}$$

[получаем согласно формуле (9-3-2) при замене в ней $j\omega$ на p];

$$S_1(p) = \frac{q}{p^2}$$

— величина, являющаяся изображением $u_1(t) = qt$ согласно табл. Д-5.

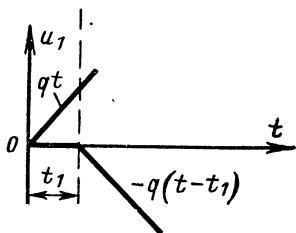
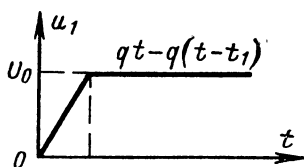


Рис. 9-22. Вспомогательная функция $u_1(t)$ и ее представление в виде разности двух функций.

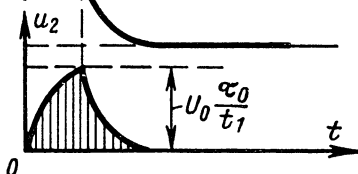
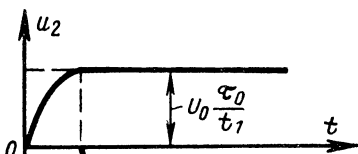
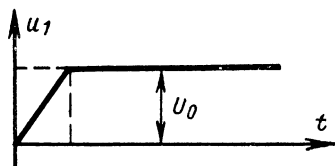
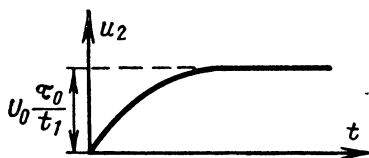


Рис. 9-23. Напряжение на выходе дифференцирующей цепи при напряжении на входе $u_1(t) = qt$.

Рис. 9-24. Дифференцирование вспомогательной функции $u_1(t)$.

Отсюда

$$u_2(t) = q\tau_0 \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{e^{pt}}{p(1 + \tau_0 p)} dp.$$

Сравнивая подынтегральное выражение с формулой (Д-7-35), имеем: $H_1(p) = 1$ и $H_2(p) = (1 + \tau_0 p)$. При этом на основании формулы Хевисайда (Д-7-36)

$$u_2(t) = \frac{U_0 \tau_0}{t_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right). \quad (9-3-11)$$

График этого выражения приведен на рис. 9-23. При наличии на входе дифференцирующей схемы напряжения, описываемого вспомогательной функцией $u_1(t) = qt - q(t-t_1)$ (см. рис. 9-22), напряжение на выходе при $t_1 \geq t \geq 0$ определяется выражением (9-3-11), а при $t \geq t_1$ — выражением

$$u_2(t) = \frac{U_0 \tau_0}{t_1} \left(e^{\frac{t}{\tau_0}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau_0}}. \quad (9-3-12)$$

График последнего выражения приведен на рис. 9-24. Очевидно, дифференцирование входного трапецеидального импульса напряжения дает выходное напряжение, состоящее из двух импульсов, определяемых выражениями (9-3-11) и (9-3-12) с противоположными полярностями (рис. 9-25). По мере уменьшения постоянной времени τ_0 цепочки выходное напряжение $u_2(t)$ приближается к точному значению производной (рис. 9-25, б), однако при этом уменьшается величина этого напряжения.

Интегрирующая цепь представляет четырехполюсник, напряжение на выходе которого пропорционально интегралу от напряжения на входе (рис. 9-26). В случае идеальной интегрирующей цепи

$$u_2(t) = b \int_0^t u_1(t) dt,$$

где b — коэффициент пропорциональности — постоянная величина, не зависящая от частоты.

При подаче на вход такой цепи напряжения $U_1 = U_1 e^{j\omega t}$ напряжение на ее выходе

$$\dot{U}_2 = \frac{b}{j\omega} \dot{U}_1.$$

Следовательно, коэффициент передачи идеальной интегрирующей цепи

$$K_n(j\omega) = \frac{b}{j\omega}. \quad (9-3-13)$$

Для схем, изображенных на рис. 9-26, коэффициент передачи согласно формуле (7-2-47)

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_0}; \quad (9-3-14)$$

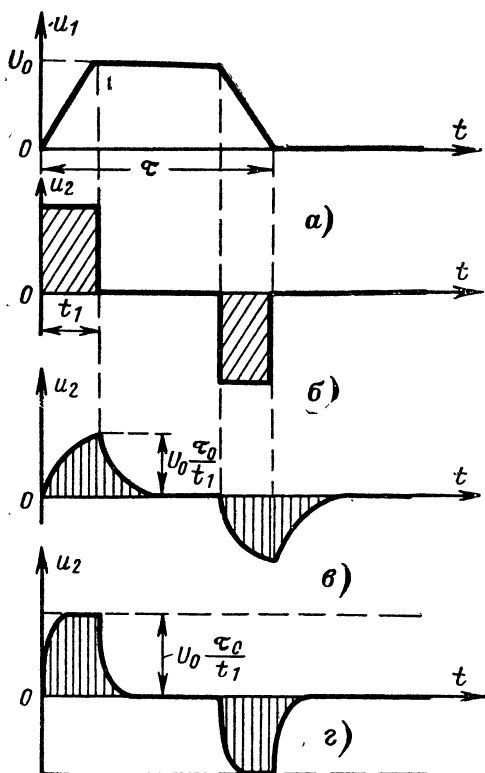


Рис. 9-25. Дифференцирование трапецидального импульса.

a — напряжение на входе дифференцирующей цепи; *б* — напряжение на выходе идеальной дифференцирующей цепи; *в* — то же на выходе дифференцирующей цепи с большой постоянной времени; *г* — то же при малой постоянной времени цепи.

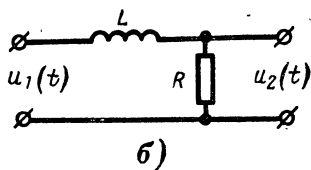
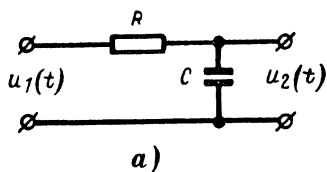


Рис. 9-26. Интегрирующие цепи типа *RC* (*a*) и типа *RL* (*б*).

при этом для цепи RC

$$\tau_0 = RC$$

и для цепи LR

$$\tau_0 = \frac{L}{R}.$$

Сравнивая выражения (9-3-13) и (9-3-14), находим, что при соблюдении условия (9-3-4а) коэффициент передачи

$$K(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega} \frac{1}{\tau_0} = K_n(j\omega) = \frac{b}{j\omega};$$

следовательно, с повышением частоты интегрирование происходит точнее.

Переходная характеристика $h(t)$ интегрирующей цепи (рис. 9-26) согласно выражениям (9-1-25) и (9-3-14) при замене в последнем $j\omega$ на p является оригиналом изображения

$$h(t) \div \frac{1}{p(1 + p\tau_0)}. \quad (9-3-15)$$

Пользуясь формулами (Д-7-35) и (Д-7-36) находим, что переходная характеристика интегрирующей цепи

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}. \quad (9-3-15a)$$

Переходная характеристика идеальной интегрирующей цепи определяется выражением

$$u_2(t) = h_n(t) = b \int_0^t \sigma(t) dt = bt\sigma(t). \quad (9-3-16)$$

Сравнивая переходные характеристики реальной и идеальной схем, видим что интегрирование происходит тем точнее, чем больше постоянная времени цепи τ_0 (рис. 9-27).

Интегрирование прямоугольного единичного импульса длительностью τ , который описывается выражением $u_1(t) = \sigma(t) - \sigma(t - \tau)$ [см. (9-3-9)]. Согласно формуле (9-3-10) напряжение на выходе интегрирующей цепи

$$u_2(t) = h(t) - h(t - \tau);$$

с учетом выражения (9-3-15а) при $0 \leq t \leq \tau$

$$u_2(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \quad (9-3-17)$$

и при $t \geq \tau$.

$$u_2(t) = (e^{\tau/\tau_0} - 1) e^{-\frac{t}{\tau_0}}. \quad (9-3-17a)$$

График изменения напряжения $u_2(t)$ дан на рис. 9-28.

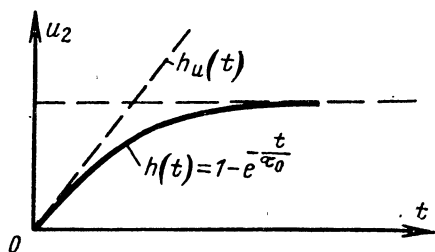


Рис. 9-27. Переходные характеристики:
 $h_u(t)$ — идеальной интегрирующей и
 $h(t)$ — реальной интегрирующей цепи.

Интегрирование любой функции напряжения $u_1(t)$.
Напряжения $u_2(t)$ на выходе интегрирующей цепи можно определить и с помощью интеграла Дюамеля. На основании формулы (9-1-176) с учетом (9-3-15a) при

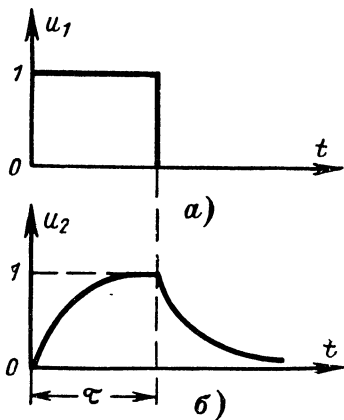


Рис. 9-28. Интегрирование
прямоугольного импульса.

a — напряжение на входе интегрирующей цепи; b — напряжение на ее выходе.

любом напряжении на входе $u_1(t)$ напряжение на выходе такой цепи

$$u_2(t) = u_1(0) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right) + \int_0^t u_1'(t_1) \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau_0}} \right) dt_1. \quad (9-3-18)$$

Если на вход интегрирующей цепи включается постоянное напряжение $u_1(t) = U_0$ (рис. 9-29), то

$$u_2(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right). \quad (9-3-18a)$$

Если напряжение на входе линейно зависит от времени $u_1(t) = At$ (рис. 9-30), то

$$u_2(t) = \int_0^t A \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_0}} \right) dt_1 = A \left[t - \tau_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right) \right]. \quad (9-3-18б)$$

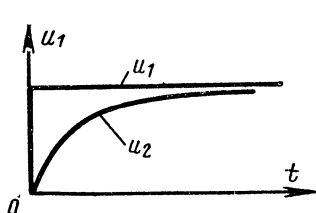


Рис. 9-29. Интегрирование фронта постоянного напряжения.

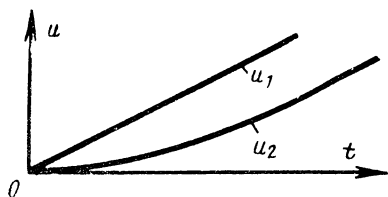
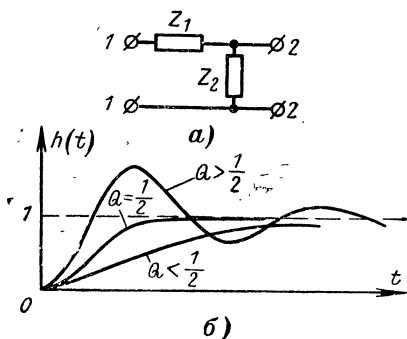


Рис. 9-30. Интегрирование линейно нарастающего напряжения.

Рис. 9-31. Обобщенная схема Г-образного четырехполюсника со входом типа Т (а) и его переходная характеристика (б).



Г-образный четырехполюсник со входом типа Т («последовательный контур» — рис. 9-31,а). Если в этой схеме коэффициент передачи согласно формуле (7-2-14)

$$K(j\omega) = \frac{Q \frac{\omega_0}{\omega}}{j \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]},$$

то заменяя в этом выражении $j\omega$ на p , получим комплексный коэффициент передачи четырехполюсника

$$K(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q} p + \omega_0^2}. \quad (9-3-19)$$

Согласно выражению (9-1-25) с учетом (9-3-19) переходная характеристика рассматриваемого четырехполюсника

$$h(t) \div \frac{\omega_0^2}{p(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)} = \frac{H_1(p)}{pH_2(p)}, \quad (9-3-20)$$

где

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{R}{2L}.$$

Оригинал изображения переходной характеристики находим с помощью формулы Хевисайда (Д-7-36), в которой согласно (Д-7-35)

$$H_1(p) = \omega_0^2,$$

$$H_2(p) = p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2,$$

а корни характеристического уравнения $H_2(p) = 0$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

В случае колебательного процесса [см. соотношение (9-2-23)], когда $\alpha < \omega_0$, $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ и $Q > \frac{1}{2}$,

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_c,$$

где

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

— частота собственных колебаний [см. формулу (9-2-25)]. Следовательно,

$$H_1(p_1) = \omega_0^2;$$

$$H_1(0) = \omega_0^2;$$

$$H_2(0) = \omega_0^2;$$

$$H_2(p) = 2p + 2\alpha = 2(p + \alpha);$$

$$H'_2(p_1) = 2(-\alpha + j\omega_c + \alpha) = j2\omega_c;$$

$$H'_2(p_2) = 2(-\alpha - j\omega_c + \alpha) = -j2\omega_c.$$

Подставляя эти значения в формулу (Д-7-36), получаем, что при $t \geq 0$

$$h(t) = 1 + \frac{\omega_0^2 e^{(-\alpha + j\omega_c)t}}{(-\alpha + j\omega_c) 2j\omega_c} - \frac{\omega_0^2 e^{(-\alpha - j\omega_c)t}}{(-\alpha - j\omega_c) 2j\omega_c},$$

или

$$h(t) = 1 - e^{\frac{\omega_0 t}{2Q}} \frac{\sin(\omega_c t + \varphi)}{\sin \varphi}, \quad (9-3-21)$$

где

$$\sin \varphi = \frac{\omega_c}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \text{ и } \varphi = \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right).$$

Это выражение, как и следовало ожидать, совпадает с выражением (9-2-26).

Аналогичным путем находим выражение переходной характеристики рассматриваемого четырехполюсника при критическом условии, т. е. когда $\alpha = \omega_0$, $R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ и $Q = 1/2$ [см. формулу (9-2-20)]:

$$h(t) = 1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}. \quad (9-3-22)$$

Это выражение, как и следовало ожидать, совпадает с (9-2-22).

В случае апериодического процесса, т. е. когда $\alpha > \omega_0$,

$$R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q < \frac{1}{2} \text{ [см. формулу (9-2-16)], имеем}$$

следующее выражение переходной характеристики:

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \frac{\text{sh}(\kappa \omega_0 t + \gamma)}{\text{sh } \gamma}, \quad (9-3-23)$$

совпадающее с (9-2-19). Здесь согласно формуле (9-2-17)

$$\kappa = \text{sh } \gamma = \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}.$$

Кривые $h(t)$ для всех трех случаев переходного процесса даны на рис. 9-31, б.

Выражения (9-3-21) — (9-3-23) позволяют определить характер изменения напряжения $u_2(t)$ на выходе четы-

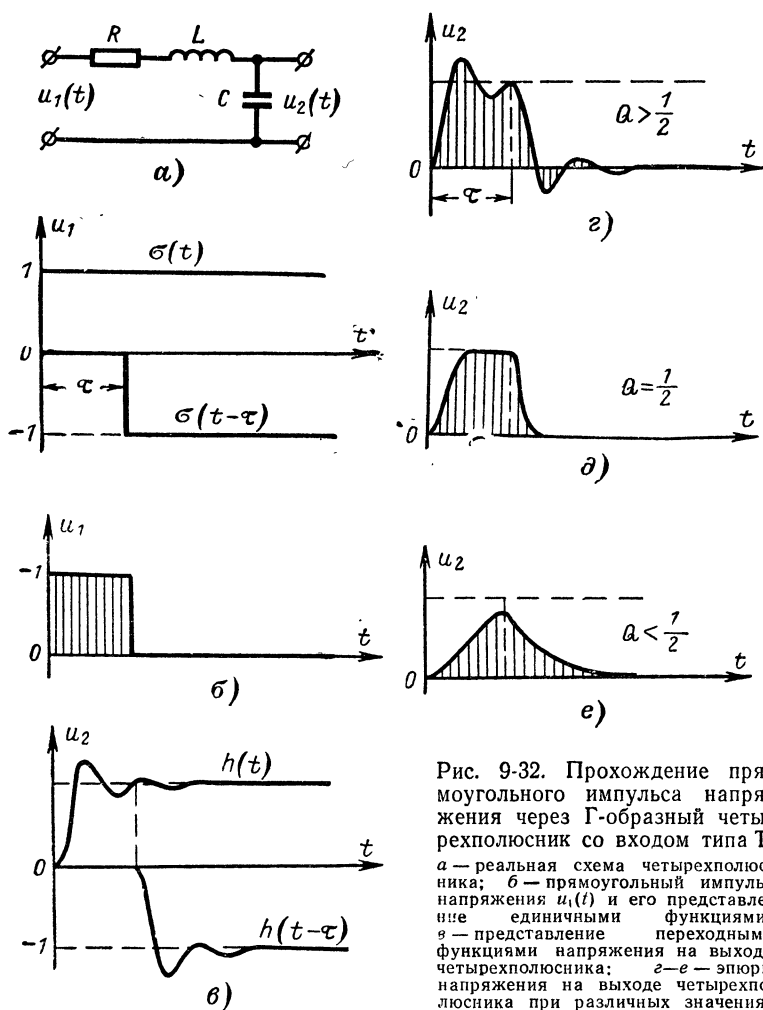


Рис. 9-32. Прохождение прямоугольного импульса напряжения через Г-образный четырехполюсник со входом типа Т. а — реальная схема четырехполюсника; б — прямоугольный импульс напряжения $u_1(t)$ и его представление единичными функциями; в — представление переходными функциями напряжения на выходе четырехполюсника; г—е — эскизы напряжения на выходе четырехполюсника при различных значениях его добротности.

рехполюсника (рис. 9-32, г—е) при включении на его вход напряжения $u_1(t)$ в виде прямоугольного импульса

(рис. 9-32, б). Действительно, при включении импульсного напряжения $u_1(t) = \sigma(t) - \sigma(t - \tau)$ [см. формулу (9-3-8)] напряжение на выходе четырехполосника согласно формуле (9-3-9) будет определяться выражениями:

$$u_2(t) = h(t) \text{ при } 0 \leq t \leq \tau;$$

$$u_2(t) = h(t) - h(t - \tau) \text{ при } t \geq \tau,$$

т. е. в интервале времени $0 \leq t \leq \tau$ напряжение $u_2(t)$ совпадает с переходной функцией, определяемой выражениями (9-3-21) — (9-3-23), а при $t > \tau$ оно равно сумме переходных функций с амплитудами противоположного знака.

При колебательном процессе [условие (9-2-16)] напряжение $u_2(t)$ зависит от соотношения фаз свободных колебаний, если $\tau < t_y$ [t_y — время переходного процесса, определяемое выражениями (9-2-19б), (9-2-22б) и (9-2-26б)]. Если $Q \geq 5$, то при $0 \leq t \leq \tau$

$$u_2(t) = h(t) \approx 1 - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t-\tau)} \cos[\omega_c(t-\tau)]; \quad (9-3-24)$$

при $t \geq \tau$

$$u_2(t) = h(t) - h(t - \tau) \approx e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t-\tau)} \cos[\omega_c(t-\tau)]. \quad (9-3-24a)$$

Если на вход четырехполосника поступает радиопульс (рис. 9-33, а), описываемый формулами:

$$u_1(t) = \sin \omega t \text{ при } 0 \leq t \leq \tau;$$

$$u_1(t) = 0 \text{ при } t > \tau,$$

то напряжение $u_2(t)$ на выходе четырехполосника можно определить с помощью переходной характеристики $h(t)$, представляя данное напряжение $u_1(t)$ как включение синусоидального напряжения в момент $t=0$ и включение в момент $t=\tau$ другого синусоидального напряжения с такой же амплитудой, но сдвинутого по фазе на π (рис. 9-33, в). Легко видеть, что при сложении этих двух синусоидальных напряжений получается прямоугольный импульс с высокочастотным «заполнением» или «радиоимпульс» с длительностью τ . Если, как это часто бывает в системах электросигнализации, $Q > 5$ и $\omega = \omega_c \approx \omega_0$, то

на основании формулы (9-3-9) и с учетом формулы (9-2-40) при $0 \leq t \leq \tau$ напряжение на выходе

$$u_2(t) = U_m Q (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega t \quad (9-3-25)$$

и при $t \geq \tau$

$$u_2(t) = U_m Q (e^{-\alpha t} - 1) e^{-\alpha t} \sin \omega t. \quad (9-3-25a)$$

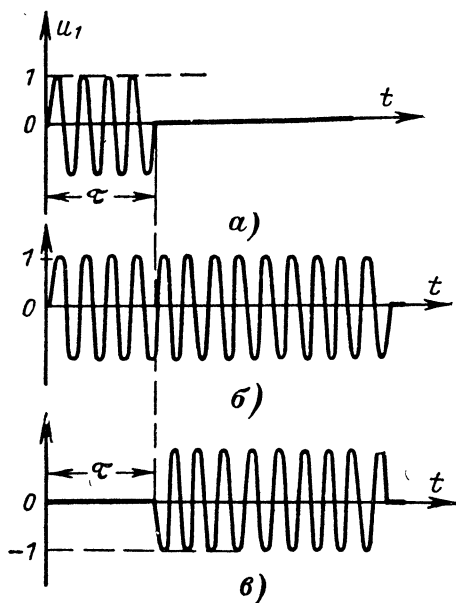


Рис. 9-33. Представление прямоугольного радиоимпульса (а) в виде разности двух синусоидальных функций (б, в).

Из этих выражений следует, что после выключения напряжения $u_1(t)$ в контуре возникают затухающие колебания, поскольку за время τ [т. е. за время действия напряжения $u_1(t)$] контур накопил энергию.

Если длительность τ радиоимпульса, поступающего на вход схемы по рис. 9-33, а, достаточно велика, т. е. согласно формуле (9-2-43) $\tau > t_y$, то в контуре устанавливается синусоидальное переменное напряжение $u_2(t)$ с частотой ω . Время нарастания его амплитуд t_Φ (рис. 9-34) называется длительностью фронта импульса, а время затухания колебаний t_c — длительностью спада

импульса. Так как $t_{\phi} \approx t_c \approx t_y$, то согласно формуле (9-2-43) крутизна фронта и спада импульса возрастает с уменьшением добротности контура. Зависимость эта иллюстрируется приведенными на рис. 9-35 кривыми огибающих высокочастотных колебаний. При малой добротности контура переходные процессы кратковременны, длительности фронта и спада малы, т. е. импульс претерпевает небольшие искажения, а амплитуда колебаний сравнительно невелика. Увеличение добротности контура сопровождается увеличением амплитуды напряжения, длительности фронта и спада, т. е. искажения импульса возрастают.

При несовпадении частот ($\omega \neq \omega_0$) биения возникают только в течение отрезка времени $t = \tau$. На спа-

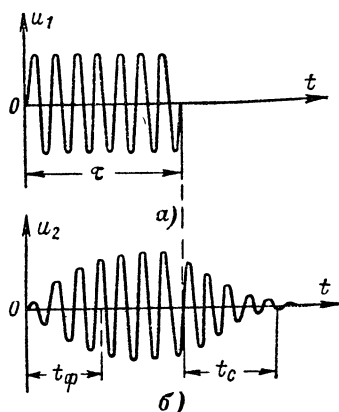


Рис. 9-34. Прохождение прямоугольного радиоимпульса через Г-образный четырехполюсник по схеме на рис. 9-32, а с добротностью $Q \geq 5$ при $\omega = \omega_c$. а — входной импульс; б — выходной импульс.

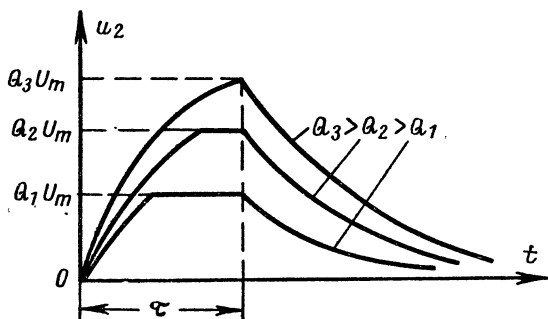


Рис. 9-35. Огибающие прямоугольного радиоимпульса, прошедшего через Г-образный четырехполюсник с различными добротностями, при $\omega = \omega_c$.

де импульса при $t > \tau$ амплитуда затухающих колебаний изменяется монотонно, так как в течение этого интервала времени вынужденные колебания отсутствуют (рис. 9-36).

Переходные процессы в Г-образном четырехполюснике, содержащем параллельный контур (рис. 9-37), аналогичны рассмотренным процессам в схеме с последовательным контуром. Действительно, сравнивая коэффициент передачи контура при малой расстройке ($\omega - \omega_0 = \Delta\omega \ll \omega_0$)

$$K(j\omega) = \frac{Q \frac{\omega_0}{\omega}}{i \left[1 + iQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} \approx \frac{Q}{\sqrt{1 + a^2}} e^{j\varphi},$$

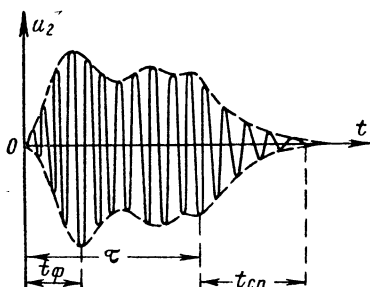


Рис. 9-36. Изменение напряжения на выходе Г-образного четырехполюсника с добротностью $Q \geq 5$ при подаче на его вход прямоугольного радиопульса для случая $\omega = \omega_0$.

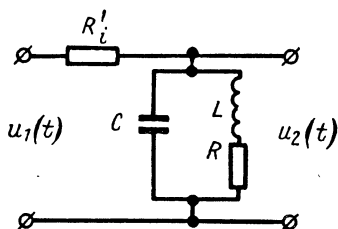


Рис. 9-37. Г-образный четырехполюсник, представляющий параллельный резонансный контур.

где $a = 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} Q$ и $\varphi = \text{tg}^{-1} a$ [см. формулу (9-3-19)], с коэффициентом передачи параллельного контура, определяемым по формуле (7-2-38a)

$$K(j\omega) \approx \frac{R_{\Sigma r}}{R_{\Sigma r} + R_i} \frac{e^{-j\varphi}}{\sqrt{1 + a'^2}},$$

замечаем, что они отличаются лишь постоянными множителями и в последней формуле величина a заменена величиной a' — обобщенной расстройкой с учетом шунтирующего действия внутреннего сопротивления R_i источника э. д. с.:

$$a' \approx 2Q' \frac{\Delta\omega}{\omega_0},$$

где Q' — приведенная добротность контура, определяемая выражением (7-2-38z).

Из этого сравнения следует, что в случае малых потерь ($Q > 5$) переходная характеристика параллельного контура

$$h(t) \approx 1 - e^{-\alpha' t} \cos \omega_c' t.$$

Это соотношение аналогично (9-3-24а), в котором

$$\omega_c' = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha'^2} \text{ и } \alpha' = \omega_0 / 2Q'.$$

При включении на вход четырехполюсника по схеме на рис. 9-37 синусоидального напряжения, частота которого

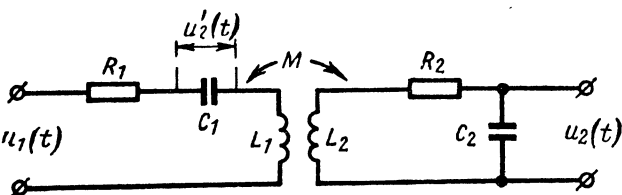


Рис. 9-38. К исследованию переходных процессов в связанных контурах.

совпадает с частотой собственных колебаний контура, напряжение на его выходе при $t \geq 0$ описывается формулой

$$u_2(t) \approx \frac{U_m(1 - e^{-\alpha' t})}{\left(1 + \frac{R_i}{R_{\Sigma r}}\right)} \sin \omega t,$$

которая аналогична формулам (9-2-40) и (9-3-25).

При подаче на вход прямоугольного радиоимпульса напряжение $u_2(t)$ на выходе аналогично напряжению, выраженному формулой (9-3-25).

Переходные процессы в четырехполюснике, образованном связанными контурами (рис. 9-38), описываются переходной характеристикой, которую находят также согласно формуле (9-1-25). Действительно, пренебрегая затуханием контуров и считая их одинаковыми, с учетом выражения (7-4-23а) получаем:

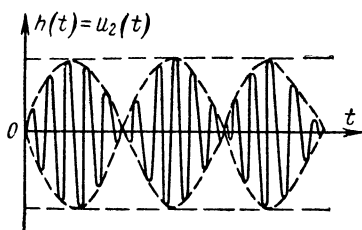
$$h(t) = \frac{1}{2} (\cos \omega_{r1} t - \cos \omega_{r2} t)$$

или, после тригонометрического преобразования,

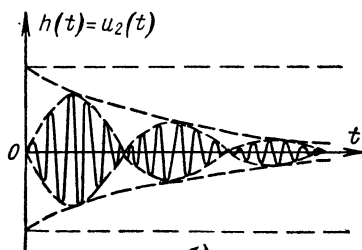
$$h(t) = \sin \frac{\omega_{r2} - \omega_{r1}}{2} t \sin \frac{\omega_{r2} + \omega_{r1}}{2} t; \quad (9-3-26)$$

здесь

$$\begin{aligned}\omega_{r1} &\approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - \frac{1}{Q^2}} \right); \\ \omega_{r2} &\approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - \frac{1}{Q^2}} \right);\end{aligned}$$



а)



б)

Рис. 9-39. Переходные характеристики связанных контуров: без учета потерь (а) и с учетом потерь (б).

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}; \\ k &= \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.\end{aligned}$$

Из выражения (9-3-26) следует, что напряжение на выходе двух связанных контуров содержит два колебания с частотами связи. В результате их сложения полу-

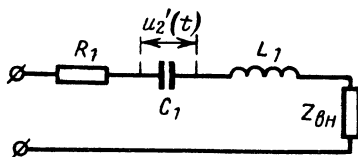


Рис. 9-40. Эквивалентная схема двух связанных контуров.

чаются биения, т. е. колебания с частотой $\frac{1}{2} (\omega_{r1} + \omega_{r2})$ и амплитудой, меняющейся с частотой $\frac{1}{2} (\omega_{r2} - \omega_{r1})$.

График функции (9-3-26) приведен на рис. 9-39, а. Если учитывать потери в системе, то амплитуда биений убывает по экспоненте (рис. 9-39, б).

При включении на вход четырехполюсника (рис. 9-38) единичного напряжения $u_1(t) = \sigma(t)$, выражение (9-3-26) описывает напряжение $u_2(t)$ на его выходе. Напряжение $u'_2(t)$ на конденсаторе первого контура (C_1 на рис. 9-38) можно найти с помощью эквивалентной схемы (рис. 9-40):

$$u'_2(t) = 1 - \frac{1}{2} (\cos \omega_{r1} t + \cos \omega_{r2} t),$$

или

$$u_2'(t) = 1 - \cos\left(\frac{\omega_{r2} - \omega_{r1}}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_{r2} + \omega_{r1}}{2} t\right).$$

При слабой связи ($k < 1$)

$$\omega_{r1} + \omega_{r2} \approx 2\omega_0$$

и

$$u_2'(t) \approx 1 - \cos\left(\frac{\omega_{r2} - \omega_{r1}}{2} t\right) \cos \omega_0 t. \quad (9-3-27)$$

Полученное напряжение графически представлено на рис. 9-41, а. Сравнивая графики $u_2(t)$ и $u_2'(t)$, приведенные на рис. 9-39 и 9-41, а, видим, что огибающие кривых сдвинуты на угол $\frac{\pi}{2(\omega_{r2} - \omega_{r1})}$.

Это означает, что энергия периодически переходит из одного контура в другой. Действительно, в тот момент, когда в одном контуре амплитуда достигает максимального значения, в другом она равна нулю.

При включении на вход четырехполосника, состоящего из двух связанных контуров (рис. 9-38), синусоидального напряжения с частотой ω_0 напряжение на выходе устанавливается не сразу; вследствие возникновения в системе свободных колебаний огибающая напряжения будет совершать затухающие колебания около установившегося значения (рис. 9-42). Максимальное значение амплитуд и частота биений (при $Q > 5$ равная $k\omega_0$) возрастают при увеличении k .

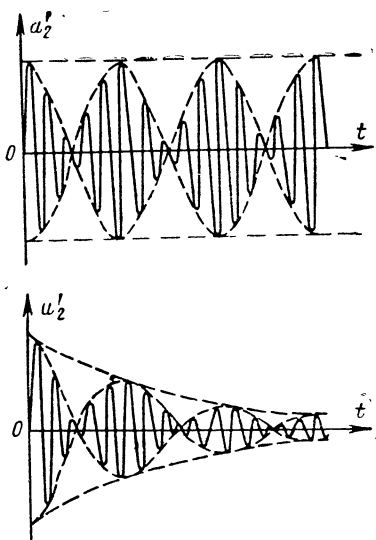


Рис. 9-41. Напряжение на конденсаторе первого контура четырехполосника по схеме на рис. 9-38 при включении на его вход единичного напряжения: в отсутствие потерь в четырехполоснике (верхний график) и при наличии потерь.

При подаче на вход четырехполюсника по схеме на рис. 9-38 напряжения $u_1(t)$ в виде прямоугольного радиоимпульса на выходе его получится напряжение $u_2(t)$,

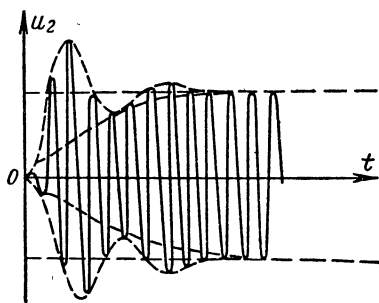


Рис. 9-42. Напряжение на выходе четырехполюсника по схеме на рис. 9-38 при включении на его вход синусоидального напряжения с частотой $\omega = \omega_0$.

график которого приведен на рис. 9-43. Наличие колебаний после отключения напряжения на входе обусловлено энергией, запасенной в индуктивностях и конденсаторах контуров и переходом ее из одного контура в другой. Эти колебания постепенно затухают из-за наличия потерь в контурах.

Многозвенный фильтр нижних частот (рис. 9-44) для переходного процесса яв-

ляется «искусственной линией задержки»: при поступлении на его вход напряжения $u_1(t)$ на выходе получается напряжение $u_2(t-t_3)$, т. е. оно

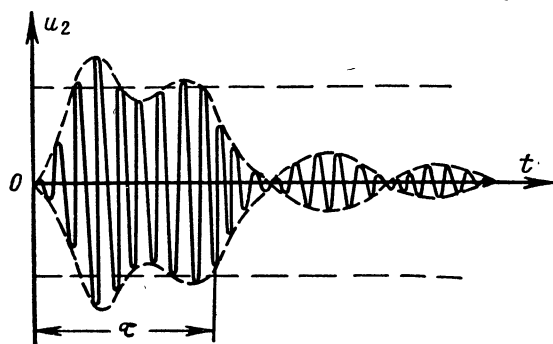


Рис. 9-43. Напряжение на выходе четырехполюсника по схеме на рис. 9-38, на вход которого подан прямоугольный радиоимпульс ($\omega = \omega_0$).

запаздывает (задерживается) по отношению к входному напряжению на некоторое определенное время t_3 . Следовательно, в искусственной линии задержки произ-

ходит процесс, аналогичный процессу в длинной линии с распределенными постоянными, напряжение на конце которой появляется спустя промежуток времени l/v после включения напряжения в начале линии (здесь l — длина отрезка длинной линии, а v — скорость распространения волны напряжения в ней). Однако на выходе искусственной линии задержки, являющейся цепью с сосредоточенными постоянными, напряжение появляется в тот же самый момент, в который оно подается на вход,

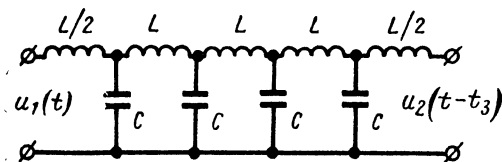


Рис. 9-44. Линия задержки в виде многозвенного фильтра нижних частот.

но достигает значений, соответствующих значениям входного напряжения по истечении лишь определенного времени t_3 . Этот процесс практически эквивалентен запаздыванию выходного напряжения относительно входного на время t_3 .

Для сохранения характеристик фильтра в полосе частот входного напряжения частота среза [см. § 7-5] выбирается значительно больше наивысшей частоты входного напряжения ($\omega_{cp} > \omega$) и со стороны входа и выхода фильтр нагружается на сопротивления, равные его характеристическому (волновому) сопротивлению. Если элементы фильтра не имеют потерь, то в полосе прозрачности ($0 < \omega \leq \omega_{cp}$) коэффициент передачи многозвенного фильтра

$$K(j\omega) = e^{-jn\beta_0} = e^{-j\omega n t_0}, \quad (9-3-28)$$

а вне этой полосы ($\omega > \omega_{cp}$)

$$K(j\omega) = 0; \quad (9-3-28a)$$

здесь n — число звеньев фильтра;

$$\beta_0 \approx 2 \arcsin \frac{\omega}{\omega_{cp}} \bigg|_{\omega \ll \omega_{cp}} \approx \omega t_0 \quad (9-3-29)$$

— постоянная распространения в полосе прозрачности [см. формулу (7-5-9)];

$$t_0 = \left. \frac{d\beta_0}{d\omega} \right|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{cp}} \right)^2}} \frac{1}{\omega_{cp}} \Big|_{\omega \rightarrow 0} \approx \frac{2}{\omega_{cp}} = \sqrt{LC} \quad (9-3-29a)$$

— время задержки одного звена;

$$\omega_{cp} = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

— частота среза.

Переходную характеристику искусственной линии задержки как многозвенного фильтра нижних частот можно найти с помощью преобразования Фурье (9-1-15). Учитывая выражения (9-3-28) и (9-3-28a), пределы интегрирования в выражении (9-1-15) выбираем от нуля до бесконечности. Если напряжение на входе определяется единичной функцией [см. выражение (9-1-16)], т. е. $u_1(t) = \sigma(t)$, то согласно формуле (9-1-12) спектральная характеристика входного напряжения

$$S_1(j\omega) = \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-j\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{j\omega}.$$

Подставляя найденное значение $S_1(j\omega)$ в формулу (9-1-15) и учитывая выражение (9-3-28), находим:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) S_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{cp}} e^{-j\omega n t_0} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{cp}} \frac{e^{j\omega(t - nt_0)}}{j\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{cp}} \frac{\cos [\omega (t - nt_0)]}{j\omega} d\omega + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{cp}} \frac{\sin [\omega (t - nt_0)]}{\omega} d\omega; \end{aligned}$$

далее, учитывая, что $\omega_{\text{ср}} \gg \omega$, окончательно имеем:

$$h(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(z), \quad (9-3-30)$$

где $\text{Si}(z)$ — интегральный синус, аргумент которого z с учетом соотношения (9-3-29a) равен:

$$z(t) = \omega_{\text{ср}}(t - nt_0) = (\omega_{\text{ср}} t - 2n) = 2 \left(\frac{t}{t_0} - n \right). \quad (9-3-30a)$$

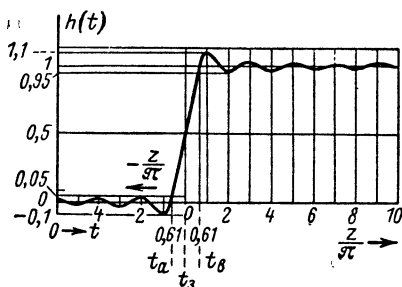


Рис. 9-45. Переходная характеристика искусственной линии задержки.

Функция $h(t)$ представлена графически на рис. 9-45. При $\text{Si}(z) < -\frac{\pi}{2}$, т. е. при $z < -1,92$ или $t < t_a = nt_0 - \frac{1,92 \dots}{\omega_{\text{ср}}}$, функция $h(t)$ осциллирует около оси абсцисс, а при $\text{Si}(z) > \pm \frac{\pi}{2}$, т. е. при $z > +1,92$ или $t > t_b = nt_0 + \frac{1,92 \dots}{\omega_{\text{ср}}}$, около оси $h(t) = 1$, причем амплитуды этих колебаний много меньше единицы. Эти колебания являются следствием идеализации и в реальных линиях задержки, обладающих хотя бы малыми потерями, отсутствуют. Далее находим, что

$$\left. \begin{aligned} h(t) &= 0 \text{ при } \text{Si}(z) = -\frac{\pi}{2}, \quad z = -1,92, \\ t &= t_a = nt_0 - \frac{1,92 \dots}{\omega_{\text{ср}}}; \\ h(t) &= \frac{1}{2} \text{ при } \text{Si}(z) = 0, \quad z = 0; \end{aligned} \right\} \quad (9-3-31)$$

$$\left. \begin{aligned} t &= t_3 = nt_0; \\ h(t) &= 1 \text{ при } \operatorname{Si}(z) = +\frac{\pi}{2}, \quad z = +1,92, \\ t &= t_B = nt_0 + \frac{1,92 \dots}{\omega_{\text{ср}}} \end{aligned} \right\} \quad (9-3-31)$$

На практике моментом появления напряжения (сигнала) на выходе искусственной линии задержки считается $t = t_3$, т. е. тот момент, когда это напряжение достигает половины своего значения в установившемся режиме. При этом условии время задержки

$$t_3 = nt_0 = n \sqrt{LC}. \quad (9-3-32)$$

Из этой формулы следует, что время задержки пропорционально числу звеньев фильтра. Длительность фронта переходной характеристики

$$t_{\Phi} = t_3 - t_a \approx \frac{3,84 \dots}{\omega_{\text{ср}}} = 1,92 \dots \sqrt{LC} = 1,92 \dots t_0, \quad (9-3-33)$$

т. е. длительность фронта обратно пропорциональна частоте среза. Отсюда следует, что чем шире полоса пропускания фильтра, тем меньше искажается форма кривой входного напряжения (сигнала). Это понятно, так как при более широкой полосе прозрачности через фильтр пройдет большая часть составляющих спектра частот входного напряжения (сигнала).

На основе выражения (9-3-30) можно определить напряжение $u_2(t)$ на выходе искусственной линии задержки при включении на ее вход напряжения $u_1(t)$ в виде единичного прямоугольного импульса с длительностью τ . Как и ранее [см. формулы (9-3-8) и (9-3-9)], будем полагать, что при входном напряжении

$$u_1(t) = \sigma(t) - \sigma(t - \tau)$$

напряжение на выходе

$$u_2(t) = h(t) - h(t - \tau).$$

Тогда с учетом выражения (9-3-30) при $0 < t \leq \tau$

$$u_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}[z(t)] \quad (9-3-34)$$

и при $t \geq \tau$

$$u_2(t) = \frac{1}{\pi} \{ \operatorname{Si}[z(t - \tau)] - \operatorname{Si}[z(t)] \}. \quad (9-3-34a)$$

Эти выражения графически представлены на рис. 9-46. Из графика видно, что длительности фронта и спада выходного импульса $u_2(t)$ одинаковы, а длительность само-

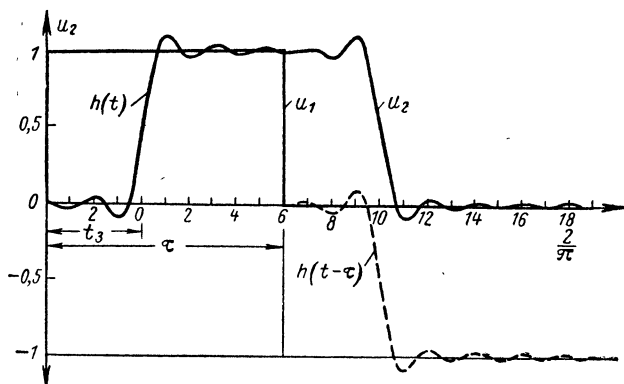


Рис. 9-46. Прохождение прямоугольного импульса напряжения через искусственную линию задержки.

го импульса при $u_2(t) = \frac{1}{2}$ равна длительности входного импульса.

9-4. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНИЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

Электромагнитный процесс в линии с распределенными постоянными описывается уравнениями (6-2-16):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i = 0;$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} + g_0 u = 0.$$

Если использовать операторный метод (см. стр. 694—695), то эти уравнения можно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U(p, x)}{\partial x} + (R_0 + pL_0) I(p, x) &= 0; \\ \frac{\partial I(p, x)}{\partial x} + (g_0 + pC_0) U(p, x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9-4-1)$$

Ток и напряжение в этих уравнениях являются функциями координаты x и переменной p , которая с точки зрения дифференцирования рассматривается как параметр. Поэтому частную производную $\partial/\partial x$ в уравнениях (9-4-1) можно заменить полной производной d/dx ; тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU(p, x)}{dx} + (R_0 + pL_0) I(p, x) &= 0, \\ \frac{dI(p, x)}{dx} + (g_0 + pC_0) U(p, x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9-4-1a)$$

Последние два выражения подобны уравнениям (8-2-2), выражающим изменения синусоидального тока и напряжения по длине линии. Уравнения (9-4-1a) можно получить из уравнений (8-2-2), если в последних заменить $j\omega$ на p . Поэтому решения уравнений (9-4-1a) на основании выражения (8-2-11) будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} U(x, p) &= U_{\text{п}}(p) e^{-jk_0 x} + U_{\text{от}}(p) e^{jk_0 x}; \\ I(x, p) &= \frac{1}{Z_0(p)} [U_{\text{п}}(p) e^{-jk_0 x} - U_{\text{от}}(p) e^{jk_0 x}]; \end{aligned} \right\} \quad (9-4-2)$$

здесь $k_0 = \beta - ja$ — комплексная постоянная распространения и $Z_0(p)$ — операторное выражение волнового сопротивления линии; постоянные $U_{\text{п}}(p)$ и $U_{\text{от}}(p)$ определяются граничными условиями на концах линии.

В линии без потерь

$$\begin{aligned} Z_0(p) &= Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \\ k_0 &= \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}; \\ v &= \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \end{aligned}$$

Вследствие этого решения (9-4-2) имеют вид:

$$U(p, x) = U_{\text{п}}(p) e^{-p \frac{x}{v}} + U_{\text{от}}(p) e^{p \frac{x}{v}}; \quad (9-4-3)$$

$$I(p, x) = \frac{1}{Z_0} \left\{ U_{\text{п}}(p) e^{-p \frac{x}{v}} - U_{\text{от}}(p) e^{p \frac{x}{v}} \right\}. \quad (9-4-3a)$$

Коэффициенты отражения на конце линии выражаются в операторной форме на основании формулы (8-3-1) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_U(p) &= \frac{\tilde{Z}_2(p) - 1}{\tilde{Z}_2(p) + 1}; \\ \Gamma_i(p) &= \frac{1 - \tilde{Z}_2(p)}{1 + \tilde{Z}_2(p)}, \end{aligned} \right\} \quad (9-4-4)$$

где $\tilde{Z}_2(p) = Z_2(p)/Z_0$ — операторное выражение нормированного сопротивления нагрузки на конце линии.

Если линия разомкнута на конце ($Z_2(p) = \infty$), то

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_U(p) &= +1; \\ \Gamma_i(p) &= -1. \end{aligned} \right\} \quad (9-4-4a)$$

Когда же линия короткозамкнута ($Z_2(p) = 0$), то

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_U(p) &= -1; \\ \Gamma_i(p) &= +1. \end{aligned} \right\} \quad (9-4-4б)$$

Если линия без потерь длиной l , нагруженная на конце сопротивлением R_2 , подключается в момент $t=0$ к источнику единичного постоянного напряжения $U_0 = u_1(t) = U_0 \sigma(t)$ с внутренним сопротивлением, равным нулю, то постоянные интегрирования $U_n(p)$ и $U_{от}(p)$ находят из граничных условий с учетом табл. Д-5: при $x=0$

$$U(p, 0) = U_n(p) + U_{от}(p) = \frac{1}{p};$$

при $x=l$

$$\frac{U(p, l)}{I(p, l)} = Z_0 \frac{e^{-p \frac{l}{v}} + \frac{U_{от}(p)}{U_n(p)} e^{p \frac{l}{v}}}{e^{-p \frac{l}{v}} - \frac{U_{от}(p)}{U_n(p)} e^{p \frac{l}{v}}}.$$

Из совместного решения этих уравнений с учетом соотношений (9-4-4) имеем:

$$U_n(p) = \frac{1}{p \left[1 + \Gamma_U(p) e^{-p \frac{2l}{v}} \right]};$$

$$U_{от}(p) = \frac{\Gamma_U(p) \cdot e^{-p \frac{2l}{v}}}{p \left[1 + \Gamma_U(p) e^{-p \frac{2l}{v}} \right]}.$$

Подставляя эти значения в выражения (9-4-3) и (9-4-3а), получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{matrix} U(p, x) \\ Z_0 I(p, x) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{p} \left[e^{-p \frac{x}{v}} \pm \Gamma_U(p) e^{-p \frac{2l-x}{v}} \right] \left[1 + \Gamma_U(p) e^{-p \frac{2l}{v}} \right]^{-1}.$$

В первых квадратных скобках этого выражения, как и в дальнейших, верхний знак (плюс) относится к определению напряжения, а нижний знак (минус) — к определению тока. Воспользовавшись формулой Ньютона

$$(1+y)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-y)^k,$$

в которой для рассматриваемого случая

$$y = \Gamma_U(p) e^{-p \frac{2l}{v}},$$

найдем окончательный вид выражений, представляющих в операторной форме напряжение и ток в длинной линии при ее включении на постоянное напряжение:

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} U(p, x) \\ Z_0 I(p, x) \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{p} \left\{ e^{-p \frac{x}{v}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Gamma_U^k(p) e^{-p \frac{k2l}{v}} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \Gamma_U(p) e^{-p \frac{2l-x}{v}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Gamma_U^k(p) e^{-p \frac{k2l}{v}} \right\} = \\ &= \frac{e^{-p \frac{x}{v}}}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Gamma_U^k(p) \left\{ \frac{e^{-p \frac{k2l+x}{v}}}{p} \mp \frac{e^{-p \frac{k2l-x}{v}}}{p} \right\}. \quad (9-4-5) \end{aligned}$$

На основании табл. Д-5 находим оригиналы этих изображений, т. е. мгновенные значения напряжения и тока

в любой точке линии при включении ее на постоянное напряжение:

$$\left. \begin{aligned} u(t, x) \\ Z_0 i(t, x) \end{aligned} \right\} = \sigma \left(t - \frac{x}{v} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Gamma_U^k(p) \left\{ \sigma \left(t - \frac{k2l+x}{v} \right) \mp \right. \\ \left. \mp \sigma \left(t - \frac{k2l-x}{v} \right) \right\} \quad (9-4-6)$$

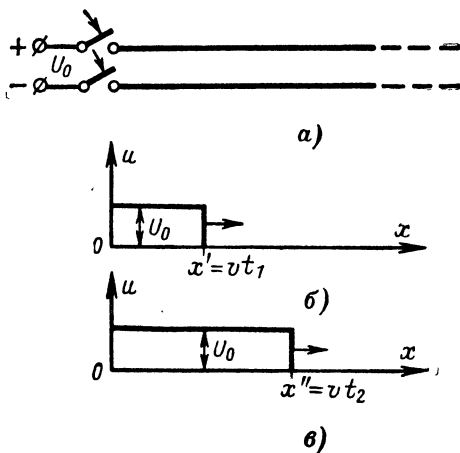


Рис. 9-47. Включение бесконечно длинной линии на постоянное напряжение (а) и положение фронтов напряжения на линии в последовательные моменты времени (б, в).

или в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} u(t, x) \\ Z_0 i(t, x) \end{aligned} \right\} = \sigma \left(t - \frac{x}{v} \right) - \Gamma_U(p) \sigma \left(t - \frac{2l+x}{v} \right) + \\ + \Gamma_U^2(p) \sigma \left(t - \frac{4l+x}{v} \right) - \Gamma_U^3(p) \sigma \left(t - \frac{6l+x}{v} \right) + \\ + \dots \pm \Gamma_U(p) \sigma \left(t - \frac{2l-x}{v} \right) \mp \Gamma_U^2(p) \sigma \left(t - \frac{4l-x}{v} \right) \pm \\ \pm \Gamma_U^3(p) \sigma \left(t - \frac{6l-x}{v} \right) \mp \dots \quad (9-4-6a)$$

Пользуясь найденными выражениями, определим переходные процессы при включении длинной линии для случаев $\infty \geq R_2 \geq 0$.

Бесконечно длинная линия без потерь (рис. 9-47, а). Если длина линии $l \rightarrow \infty$, то независимо от значения R_2 из формулы (9-4-6) получаем выражения для напряжения

$$u(t, x) = \sigma \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (9-4-7)$$

и для тока

$$i(t, x) = \frac{1}{Z_0} \sigma \left(t - \frac{x}{v} \right); \quad (9-4-7a)$$

здесь x/v — время распространения волн напряжения и тока в линии от ее начала до точки x .

Распределение напряжения по линии согласно этому выражению в некоторый момент t_1 иллюстрирует рис. 9-47, б, а в более поздний t_2 — рис. 9-47, в. Рисунки эти показывают, что распространяющееся вдоль линии напряжение характеризуется отвесным фронтом, перемещающимся со скоростью v . Перед фронтом напряжение равно нулю, позади фронта оно везде равно единице. Возмущение такого вида называют единичной волной.

Включение постоянного напряжения на разомкнутую на конце линию. В этом случае $Z_2(p) = \infty$ и, следовательно, согласно формуле (9-4-4а) $\Gamma_U(p) = +1$. При таком значении коэффициента отражения из выражений (9-4-6) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{u(t, x)}{Z_0 i(t, x)} \} = & \sigma \left(t - \frac{x}{v} \right) - \sigma \left(t - \frac{2l+x}{v} \right) + \\ & + \sigma \left(t - \frac{4l+x}{v} \right) - \sigma \left(t - \frac{6l+x}{v} \right) + \dots \pm \sigma \left(t - \frac{2l-x}{v} \right) \mp \\ & \mp \sigma \left(t - \frac{4l-x}{v} \right) \pm \sigma \left(t - \frac{6l-x}{v} \right) \mp \dots \end{aligned} \quad (9-4-8)$$

Из этих выражений следует, что при включении постоянного напряжения на разомкнутую линию возникает переходный процесс, состоящий из четырех тактов (рис. 9-48), определяемых следующими условиями:

$$\text{такт I: } 0 \leq t \leq \frac{l}{v};$$

$$\text{такт II: } \frac{l}{v} \leq t \leq \frac{2l}{v};$$

$$\text{такт III: } \frac{2l}{v} \leq t \leq \frac{3l}{v};$$

$$\text{такт IV: } \frac{3l}{v} \leq t \leq \frac{4l}{v}.$$

В течение такта *I* от начала линии к ее концу распространяются единичные волны напряжения $\sigma\left(t - \frac{x}{v}\right)$ и тока $\frac{1}{Z_0} \sigma\left(t - \frac{x}{v}\right)$. На разомкнутом конце линии согласно (9-4-4а) происходит отражение волны напряжения без перемены знака, а волны тока — с переменной знака. В результате этого в течение такта *II* происходит движение к началу линии (справа налево) отраженной положительной волны напряжения, складывающейся с падающей волной, и движение отраженной отрицательной волны тока, вычитающейся из падающей волны. Так как мы положили, что внутреннее сопротивление источника равно нулю, то начало линии для волн, распространяющихся по направлению к нему (справа налево), является короткозамкнутым. Поэтому согласно выражениям (9-4-4б) отражение волны напряжения от источника происходит с переменной знака, а волны тока — без изменения знака. В результате этого во время такта *III* от начала линии (слева направо) распространяются отрицательные (обратной полярности) волны напряжения и тока. После отражения их от разомкнутого конца в течение такта *IV* справа налево движутся отрицательная волна напряжения и положительная волна тока. После этого появляются новые положительные волны, т. е. повторяется такт *I*.

На конце линии напряжение $u_2(t)$ появляется только в течение тактов *II* и *III*, достигая при этом двойной величины подключенного напряжения ($2U_0$). Ток $i(t)$ в начале линии имеет положительное значение в течение тактов *I* и *II* и отрицательное — в течение тактов *III* и *IV*; величина его равна U_0/Z_0 .

На основании выражений (9-4-8) находим, что для любого момента времени при напряжении на входе линии ($x=0$)

$$u(t, 0) = u_1(t) = \sigma(t)$$

напряжение на разомкнутом конце линии ($x=l$)

$$u(t, l) = u_2(t) = 2 \left[\sigma\left(t - \frac{l}{v}\right) - \sigma\left(t - \frac{3l}{v}\right) + \sigma\left(t - \frac{5l}{v}\right) - \dots \right], \quad (9-4-9)$$

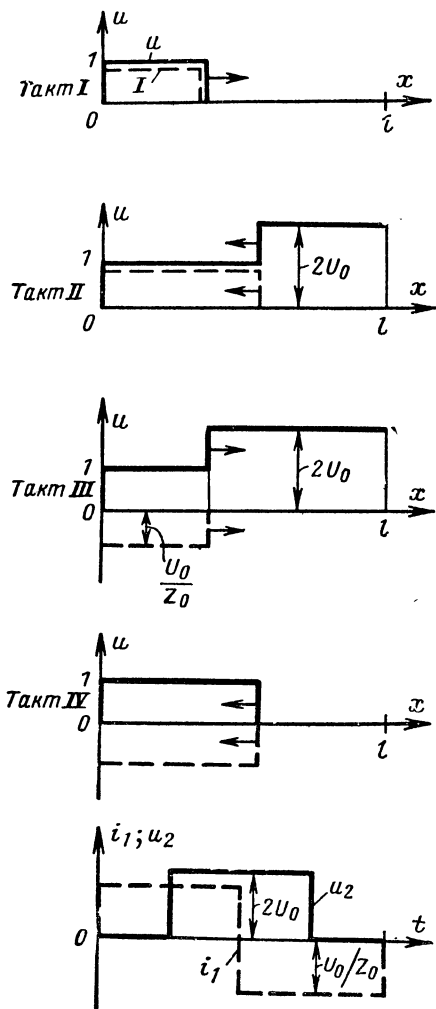


Рис. 9-48. Распространение волн напряжения (сплошные линии) и тока (пунктирные линии) вдоль разомкнутой на конце линии при включении на ее вход постоянного напряжения.

а ток на входе линии

$$Z_0 i(t, 0) = Z_0 i_1(t) = \sigma(t) - 2 \left[\sigma\left(t - \frac{2l}{v}\right) - \sigma\left(t - \frac{4l}{v}\right) + \sigma\left(t - \frac{6l}{v}\right) - \dots \right]. \quad (9-4-9a)$$

Графики этих функций приведены на рис. 9-49, а и 9-50, а. Из них видно, что при включении разомкнутой длинной

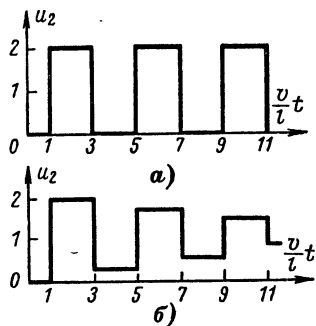


Рис. 9-49. Графики напряжения на конце разомкнутой линии при включении на нее единичного постоянного напряжения без учета потерь в линии (а) и при наличии потерь (б).

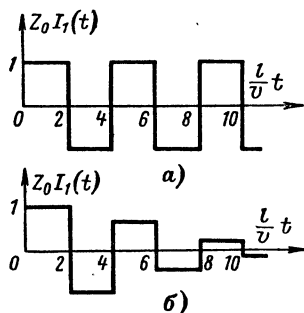


Рис. 9-50. Ток на входе разомкнутой на конце линии при включении на нее единичного постоянного напряжения: без учета потерь в линии (а) и при наличии потерь в ней (б).

линии на постоянное напряжение U_0 в ней возникают собственные колебания с частотой

$$\omega_c = 2\pi \frac{v}{2l}, \quad (9-4-10)$$

с амплитудами напряжения $2U_0$ и амплитудами тока U_0/Z_0 . Отсюда следует, что такая линия может быть использована для формирования электрических импульсов длительностью

$$\tau = \frac{2l}{v}. \quad (9-4-11)$$

Из выражений (9-4-9) и (9-4-10) можно видеть, что процесс, возникающий при включении разомкнутой линии, аналогичен процессу, происходящему при включении контура CLR [см. § 9-2, формула (9-2-26в)].

В линии, обладающей потерями ($\alpha \neq 0$) и, следовательно, дисперсией, переходный процесс усложняется. Лишь в частном случае линии с потерями, удовлетворяющей условию $L_0 g_0 = C_0 R_0$ [см. формулу (8-2-20)], дисперсии нет и волна при распространении изменяется лишь по амплитуде без изменения формы. При каждом прохождении всей линии длиной l амплитуда единичной волны будет уменьшаться в $e^{-\alpha \frac{l}{v}}$ раз. Вследствие этого напряжение на конце линии и ток в начале линии, удовлетворяющей условию (8-2-20), определяются выражениями

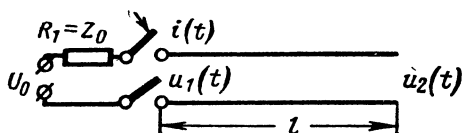
$$\left. \begin{aligned} u_2(t) &= 2 \left[e^{-\alpha \frac{l}{v}} \sigma\left(t - \frac{l}{v}\right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\alpha \frac{3l}{v}} \sigma\left(t - \frac{3l}{v}\right) + e^{-\alpha \frac{5l}{v}} \sigma\left(t - \frac{5l}{v}\right) - \dots \right]; \\ Z_0 i_1(t) &= \sigma(t) - 2 \left[e^{-\alpha \frac{2l}{v}} \sigma\left(t - \frac{2l}{v}\right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\alpha \frac{4l}{v}} \sigma\left(t - \frac{4l}{v}\right) + e^{-\alpha \frac{6l}{v}} \sigma\left(t - \frac{6l}{v}\right) - \dots \right]; \end{aligned} \right\} \quad (9-4-12)$$

здесь согласно формуле (8-2-21) $\alpha = \sqrt{R_0 g_0}$.

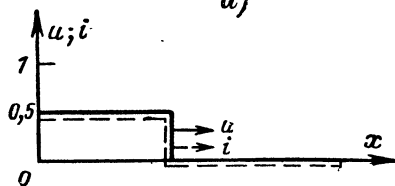
При $t \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} u_2(t) &= 2 \frac{e^{-\alpha \frac{l}{v}}}{1 + e^{-\alpha \frac{2l}{v}}}; \\ Z_0 i_1(t) &= \frac{1 - e^{-\alpha \frac{2l}{v}}}{1 + e^{-\alpha \frac{2l}{v}}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-4-12a)$$

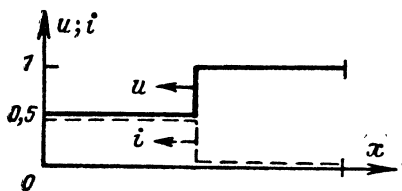
При $l \rightarrow \infty$ $u_2(t) \rightarrow 0$, а $Z_0 i_1(t) \rightarrow U_0$. На рис. 9-49, б и 9-50, б приведены графики для случая $g_0 = 0$, $R_0 \neq 0$. Они показывают, что напряжение $u_2(t)$ убывает, стремясь к значению напряжения, подключенного к началу линии. Вместе с тем ток $i_1(t)$ убывает, стремясь к нулю.



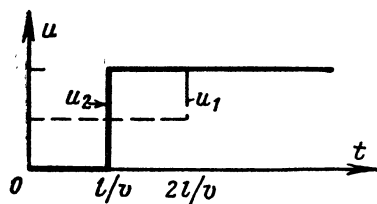
а)



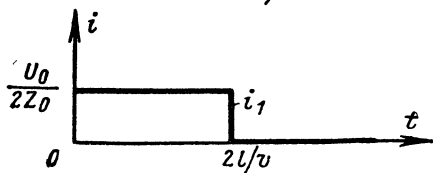
б)



в)



г)



д)

Рис. 9-51. Переходный процесс в разомкнутой на конце длинной линии при включении на ее вход постоянного напряжения через сопротивление $R_1 = Z_0$.

а — схема включения; б — распространение волн напряжения и тока; в — напряжения в начале и в конце линии; г — ток в начале линии.

Включение длинной линии через сопротивление, равное ее волновому сопротивлению (рис. 9-51). В этом случае переходный процесс заканчивается за два такта, т. е. за время, равное $2l/v$. Действительно, единичная

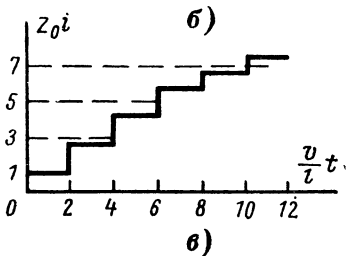
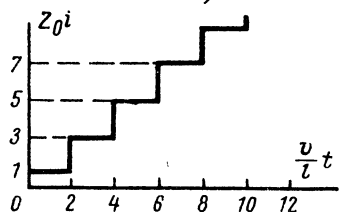
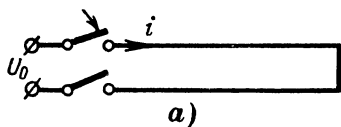


Рис. 9-52. Переходный процесс в короткозамкнутой на конце линии при включении на ее вход постоянного напряжения.

a — схема включения; *б* — график тока на входе линии без потерь; *в* — то же при наличии потерь в линии.

волна, движущаяся от конца линии к ее началу в течение такта l/v , не претерпевает отражения у начала линии, поскольку здесь включено сопротивление $R_1 = Z_0$ (внутреннее сопротивление источника напряжения предполагается равным нулю). Напряжение между проводами линии в этом случае не превосходит напряжения на зажимах источника, а амплитуда тока на входе линии равна $U_0/2Z_0$, т. е. в 2 раза меньше, чем при отсутствии сопротивления R_1 .

Включение постоянного напряжения на короткозамкнутую на конце линию (рис. 9-52). В этом случае $Z_2(p) = 0$ и, следовательно, $\Gamma_U(p) = -1$

[см. формулу (9-4-46)]; при этом условии из выражений (9-4-6а) имеем:

$$\left. \begin{aligned} u(t, x) \\ Z_0 i(t, x) \end{aligned} \right\} = \sigma\left(t - \frac{x}{v}\right) + \sigma\left(t - \frac{2l+x}{v}\right) + \\ + \sigma\left(t - \frac{4l+x}{v}\right) + \sigma\left(t - \frac{6l+x}{v}\right) - \dots - \sigma\left(t - \frac{2l-x}{v}\right) - \\ - \sigma\left(t - \frac{4l-x}{v}\right) - \sigma\left(t - \frac{6l-x}{v}\right) - \dots \quad (9-4-13)$$

Последние выражения отличаются от выражений (9-4-8) знаком членов с нечетной степенью. На основании этого находим, что при включении короткозамкнутой линии на единичное постоянное напряжение ток в начале линии ($x=0$) определяется выражением

$$Z_0 i_1(t) = \sigma(t) + 2\sigma\left(t - \frac{2l}{v}\right) + 2\sigma\left(t - \frac{4l}{v}\right) + \dots, \quad (9-4-14)$$

а на конце линии ($x=l$) выражением

$$Z_0 i_2(t) = 2\sigma\left(t - \frac{l}{v}\right) + 2\sigma\left(t - \frac{3l}{v}\right) + \\ + 2\sigma\left(t - \frac{5l}{v}\right) + \dots, \quad (9-4-14a)$$

т. е. ток на обоих концах линии неограниченно нарастает ступенями (рис. 9-52).

Токи в короткозамкнутой линии, не обладающей дисперсией с учетом потерь при условии (8-2-20), определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} Z_0 i_1(t) &= \sigma(t) + 2e^{-\alpha \frac{2l}{v}} \sigma\left(t - \frac{2l}{v}\right) + \\ &+ 2e^{-\alpha \frac{4l}{v}} \sigma\left(t - \frac{4l}{v}\right) + \dots; \\ Z_0 i_2(t) &= 2e^{-\alpha \frac{l}{v}} \sigma\left(t - \frac{l}{v}\right) + \\ &+ 2e^{-\alpha \frac{3l}{v}} \sigma\left(t - \frac{3l}{v}\right) + 2e^{-\alpha \frac{5l}{v}} \sigma\left(t - \frac{5l}{v}\right) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (9-4-15)$$

здесь $\alpha = \sqrt{R_0 g_0}$.

При $t \rightarrow \infty$ токи на концах короткозамкнутой линии достигают значений, определяемых выражениями:

$$\left. \begin{aligned} Z_0 i_1(t) &= \frac{1 + e^{-\alpha \frac{2l}{v}}}{1 - e^{-\alpha \frac{2l}{v}}}; \\ Z_0 i_2(t) &= \frac{e^{-\alpha \frac{l}{v}}}{1 - e^{-\alpha \frac{2l}{v}}}. \end{aligned} \right\} \quad (9-4-15a)$$

При $l \rightarrow \infty$ величина $Z_0 i_1(t) \rightarrow U_0$, а величина $i_2(t) \rightarrow 0$.

Включение постоянного напряжения на нагруженную линию (рис. 9-53). Если нагрузка с линией согласована ($R_2 = Z_0$), то $\Gamma_U(p) = 0$ и из выражений (9-4-6) следует:

$$\left. \begin{aligned} u(t, x) \\ Z_0 i(t, x) \end{aligned} \right\} = \sigma \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

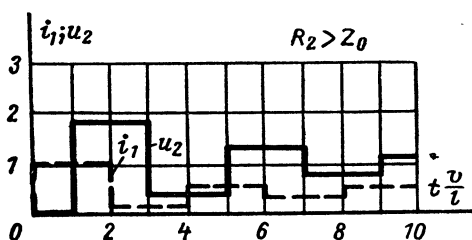
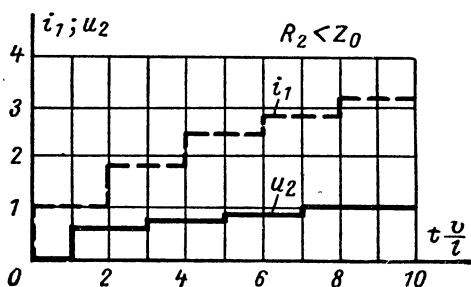
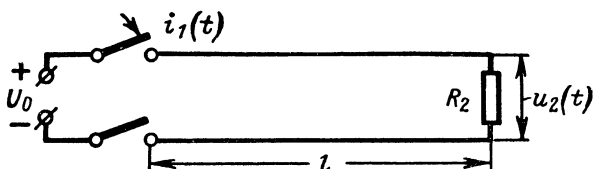


Рис. 9-53. Переходный процесс в длинной линии, нагруженной сопротивлением, не равным волновому сопротивлению линии, при включении на ее вход постоянного напряжения.

Это означает, что при включении линии с согласованной нагрузкой переходного процесса в линии не происходит

Если линия нагружена на несогласованное сопротивление, т. е. когда $R_2 \neq Z_0$, то напряжение $u_2(t)$ на конце линии и ток $i_1(t)$ в начале линии согласно формуле (9-4-6) определяются выражениями

$$u_2(t) = [1 + \Gamma_U(p)] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Gamma_U^k(p) \sigma\left(t - \frac{(2k+1)l}{v}\right); \quad (9-4-16)$$

$$Z_0 i_1(t) = \sigma(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Gamma_U^k(p) \sigma\left(t - \frac{k 2l}{v}\right). \quad (9-4-17)$$

В установившемся режиме ($t \rightarrow \infty$)

$$\left. \begin{aligned} u_2(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \sigma(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = 1; \\ i_1(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \frac{\sigma(t)}{\tilde{Z}_2} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{\tilde{Z}_2}. \end{aligned} \right\} \quad (9-4-18)$$

Эти значения, естественно, можно получить также и из выражений (9-4-16) и (9-4-17), если воспользоваться формулами

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Gamma_U^k(p) &= \frac{1}{1 + \Gamma_U(p)}; \\ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Gamma_U^k(p) &= \frac{1 - \Gamma_U(p)}{1 + \Gamma_U(p)} = \frac{1}{\tilde{Z}_2}, \end{aligned}$$

вытекающими из разложения в ряд Тейлора — Маклорена функции

$$(1 + y)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-y)^k.$$

Из графиков на рис. 9-53, которые построены на основе формул (9-4-16) и (9-4-17), видно, что при включении «сильно нагруженной» линии [$R_2 < Z_0$ и, согласно формуле (9-4-4), $\Gamma_U(p) < 0$] напряжение и ток в ней нарастают степенями до установившихся значений, определяемых выражениями (9-4-18). Когда же включается «слабо нагруженная» линия [$R_2 > Z_0$, $\Gamma_U(p) > 0$], то на ее конце

возникает перенапряжение, а в начале линии «бросок» тока, превышающие напряжение и ток установившегося режима. В течение переходного процесса перенапряжение и бросок тока ступенями уменьшаются до установившихся значений [см. формулы (9-4-18)].

Время t_y переходного процесса [см. формулу (1-6-22)] находится из решения уравнений, написанного с учетом рис. 9-53 и выражения (9-4-16), т. е.

$$|\Gamma_U(\rho)|^k \sigma\left(t_y - \frac{2(k+1)l}{v}\right) = 0,1;$$

из него следует:

$$t_y \geq \frac{(2k+1)l}{v};$$

$$k = \frac{\lg 0,1}{\lg |\Gamma_U(\rho)|} = \frac{1}{\lg (1/|\Gamma_U(\rho)|)}.$$

Окончательно имеем:

$$t_y \geq \left\{ \frac{2}{\lg (1/|\Gamma_U(\rho)|)} + 1 \right\} \frac{l}{v}. \quad (9-4-19)$$

Включение длинной линии на импульсное напряжение.

Если на вход длинной линии поступает прямоугольный импульс напряжения с длительностью τ , то в этом случае, как мы уже говорили [см. формулу (9-3-8)], напряжение на входе линии можно представить в виде

$$u_1(t) = \sigma(t) - \sigma(t - \tau).$$

С учетом этого на основе выражения (9-4-6) находим, что в данном случае напряжение и ток в длинной линии в интервале времени $0 \leq t \leq \tau$ определяются выражением (9-4-6), а при $t > \tau$ выражениями:

$$\left. \begin{aligned} u(t, x) \\ Z_0 i(t, x) \end{aligned} \right\} = \sigma\left(t - \frac{x}{v}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Gamma_U^k(\rho) \left[\sigma\left(t - \frac{k2l+x}{v}\right) \mp \right. \\ \left. \mp \sigma\left(t - \frac{k2l-x}{v}\right) \right] - \left\{ \sigma\left(t - \tau - \frac{x}{v}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Gamma_U^k(\rho) \left[\sigma\left(t - \tau - \frac{k2l+x}{v}\right) \mp \right. \right. \\ \left. \left. \mp \sigma\left(t - \tau - \frac{k2l-x}{v}\right) \right] \right\}. \quad (9-4-20)$$

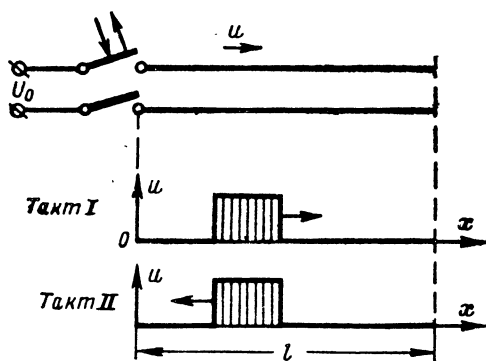


Рис. 9-54. Распространение прямоугольного импульса напряжения в линии без потерь, разомкнутой на конце.

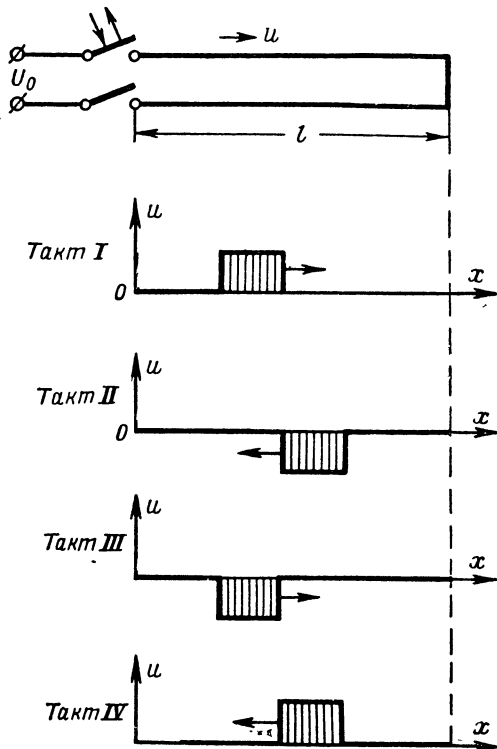


Рис. 9-55. Распространение прямоугольного импульса в линии без потерь, короткозамкнутой на конце.

Из последних выражений следует, что если на вход разомкнутой линии поступает импульс «малой» длительности $\left(\tau \ll \frac{l}{v}\right)$, то распространяющийся в течение такта $I \left(t < \frac{l}{v}\right)$ импульс напряжения может быть представлен суммой двух единичных волн с противоположными знаками (противоположной полярности):

$$u(t, x) = \sigma \left(t - \frac{x}{v}\right) - \sigma \left(t - \tau - \frac{x}{v}\right).$$

Если в разомкнутой на конце линии без потерь импульс создается замыканием ключа (рис. 9-54) в момент $t=0$ и размыканием в момент $t=\tau$, то после первого отражения импульса от конца линии он распространяется в обратном направлении, не изменив ни знака, ни формы. Если к моменту прихода отраженной волны ключ в начале линии уже разомкнут, то импульс от начала линии снова отражается. В результате импульс напряжения в разомкнутой линии совершает периодическое движение взад и вперед в два такта.

Если же линия без потерь коротко замкнута на конце, то при отражении от конца линии импульс напряжения совершает периодическое движение в четыре такта (рис. 9-55).

Если линия без потерь замкнута на сопротивление $R_2 \neq Z_0$, $|\Gamma_U(p)| < 1$, то при каждом отражении от конца линии импульс уменьшается пропорционально величине $|\Gamma_U(p)|$, в результате чего амплитуда импульса убывает в геометрической прогрессии до нуля.

Если учесть потери в линии, то амплитуда импульса убывает в процессе его распространения по закону $e^{-\alpha x}$. В общем случае форма импульса искажается из-за дисперсии линии с потерями.



ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

Д-0. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

При исследовании линейных электромагнитных процессов в средах и в цепях используется обширный математический аппарат.

Матричное исчисление значительно упрощает описание электромагнитных процессов в цепях.

Тензорное исчисление является основным при изучении электромагнитных процессов в средах.

На специальной теории относительности и четырехмерном представлении характеристик электромагнитного поля основано изучение электромагнитных процессов в движущихся средах.

Теория функций комплексного переменного лежит в основе символического метода при изучении монохроматических процессов и метода конформного отображения при расчете статических и квазистатических полей.

Специальные уравнения и функции математической физики используются при решении краевых задач в ограниченных средах и в линиях конечной длины.

Преобразования Лапласа, ряды и интеграл Фурье являются основой спектрального анализа электромагнитных линейных процессов.

В настоящих дополнениях даны в конспективной форме основные понятия и формулы перечисленных разделов математики, использованные при изложении материала в предыдущих главах книги.

Д-1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из коэффициентов линейных уравнений, называемых элементами матрицы. Так, системе линейных алгебраических уравнений.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0;$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

соответствует матрица

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11}a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1}a_{m2} & . & . & . & . & a_{mn} \end{array} \right\| = \|a_{ik}\|.$$

Коэффициенты a_{ik} расположены в таблице в таком же порядке, как и в уравнениях; первый индекс i обозначает номер строки, второй — k — номер столбца. Элементы, у которых $i=k$, называются диагональными; они образуют главную диагональ матрицы. Элементы матрицы могут быть комплексными величинами.

В отличие от определителя, ограничиваемого парой одинарных линий, матрица ограничивается парой двойных линий.

Так как матрица является таблицей размещения определенного числа элементов, то никакая числовая величина с ней не связывается, в отличие от определителя, который при данных значениях элементов равен определенной числовой величине.

Матрица с m строками и n столбцами имеет порядок $m \times n$. Если число строк m равно числу столбцов n , то матрица называется квадратной. Любую матрицу можно сделать квадратной путем добавления нулей взамен недостающих элементов. Число строк квадратной матрицы называется ее порядком. Далее рассматриваются только квадратные матрицы.

Две матрицы одинакового порядка $\|a_{ik}\|$ и $\|b_{ik}\|$ равны, если равны их соответствующие элементы $a_{ik}=b_{ik}$ при любых i и k .

Каждой квадратной матрице $\|a_{ik}\|$ соответствует свой определитель. Если он равен нулю, то матрица называется вырожденной.

Минором матрицы называется определитель, полученный вычеркиванием из матрицы одинакового числа строк и столбцов.

Ранг матрицы определяется числом независимых переменных системы уравнений, для которой составляется матрица. Ранг матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля миноров матрицы.

Единичной матрицей называется матрица, диагональные элементы которой равны единицам, а остальные — нулям:

$$\|\delta_{ik}\| = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \end{array} \right\|, \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases}; \quad (\text{Д-1-1})$$

δ_{ik} называется символом Кронекера

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Если в матрице

$$\|a_{ik}\| = \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11}a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}a_{n2} & . & . & . & . & a_{nn} \end{array} \right\|$$

столбцы заменить строками и наоборот, то получится новая матрица

$$\|a_{ki}\| = \left\| \begin{matrix} a_{11}a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12}a_{22} & \dots & a_{n2} \\ a_{1n}a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| = \|a_{ik}^t\|, \quad (\text{Д-1-1a})$$

которая называется транспонированной.

Матрица, элементы которой удовлетворяют условию $a_{ik} = a_{ki}$, называется симметричной, например:

$$\left\| \begin{matrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ a^2 & a & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Матрица, элементы которой удовлетворяют условию $a_{ik} = -a_{ki}$, называется антисимметричной или кососимметричной. Диагональные элементы такой матрицы равны нулю. Пример:

$$\left\| \begin{matrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Всякая матрица может быть представлена как сумма симметричной и антисимметричной матриц:

$$\|b_{ik}\| = \|s_{ik}\| + \|a_{ik}\|,$$

где

$$s_{ik} = \frac{b_{ik} + b_{ki}}{2} = s_{ki}; \quad a_{ik} = \frac{b_{ik} - b_{ki}}{2} = -a_{ki}.$$

Матрица, некоторые элементы которой являются комплексными величинами и удовлетворяют условию $a_{ik} = a_{ki}^*$ (значок * означает комплексную сопряженность), называется самосопряженной или эрмитовой матрицей. Пример:

$$\left\| \begin{matrix} a & a+jb & 0 \\ a-jb & b & a-jc \\ 0 & a+jc & c \end{matrix} \right\|.$$

Суммой двух матриц одинакового порядка $\|a_{ik}\|$ и $\|b_{ik}\|$, элементы которых соответственно a_{ik} и b_{ik} , называется матрица $\|c_{ik}\|$, элементы которой $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$. Пример:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} b_{11}b_{12} \\ b_{21}b_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{matrix} \right\|. \quad (\text{Д-1-2})$$

Сложение матриц обладает свойством коммутативности (независимостью от перестановки), т. е.

$$\|a_{ik}\| + \|b_{ik}\| = \|b_{ik}\| + \|a_{ik}\|$$

и ассоциативности (независимостью от сочетаний):

$$\|a_{ik}\| + (\|b_{ik}\| + \|c_{ik}\|) = (\|a_{ik}\| + \|b_{ik}\|) + \|c_{ik}\|.$$

Складывать можно только матрицы одинакового порядка.

Произведением матрицы a_{ik} на число ρ называется матрица, каждый элемент которой равен соответствующему элементу матрицы a_{ik} , умноженному на ρ :

$$\|a_{ik}\| \rho = \|\rho a_{ik}\|. \quad (\text{Д-1-3})$$

Очевидно, что

$$\|a_{ik}\| \rho = \rho \|a_{ik}\| = \|\rho a_{ik}\|.$$

Произведением двух матриц $\|a_{ik}\|$ и $\|b_{ik}\|$ одного и того же порядка называется матрица $\|c_{ik}\|$ того же порядка, элементы которой определяются выражением

$$c_{ik} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} = a_{il} b_{lk}. \quad (\text{Д-1-4})$$

Знак суммирования можно опустить, так как повторение индекса l дважды означает суммирование от 1 до n . Таким образом, элемент c_{ik} получается умножением каждого элемента, стоящего в i -й строке матрицы $\|a_{ik}\|$, на соответствующий элемент из k -го столбца матрицы $\|b_{ik}\|$ и сложением этих произведений.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}. \quad (\text{Д-1-4a})$$

В общем случае произведение двух матриц не обладает коммутативным свойством, т. е.

$$\|a_{ik}\| \|b_{ik}\| \neq \|b_{ik}\| \|a_{ik}\|, \quad (\text{Д-1-4б})$$

но имеет место ассоциативность:

$$\|a_{ik}\| (\|b_{ik}\| \|c_{ik}\|) = (\|a_{ik}\| \|b_{ik}\|) \|c_{ik}\|$$

и дистрибутивность (независимость от распределения):

$$(\|a_{ik}\| + \|b_{ik}\|) \|c_{ik}\| = \|a_{ik}\| \|c_{ik}\| + \|b_{ik}\| \|c_{ik}\|.$$

Любая матрица при умножении на единичную матрицу (Д-1-1) не изменяется.

Произведение любой матрицы на нулевую матрицу равно нулю.

Матрица $\|a_{ik}\|^{-1}$ называется обратной матрицей $\|a_{ik}\|$, если выполняется условие $\|a_{ik}\| \cdot \|a_{ik}\|^{-1} = \|\delta_{ik}\|$. Такая матрица существует, если $|a_{ik}| \neq 0$. Если алгебраическое дополнение элемента a_{ik} обозначить через Δ_{ik} , то обратная матрица будет иметь структуру

$$\|a_{ik}\|^{-1} = \frac{1}{|a_{ik}|} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \dots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\|\Delta_{ik}^t\|}{|a_{ik}|}. \quad (\text{Д-1-5})$$

Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} получается из определителя матрицы путем вычеркивания строки и столбца, пересекающихся на этом элементе, и умноженного на $(-1)^{i+k}$. В случае матрицы

$$\text{второго порядка } \|a_{ik}\|^{-1} = \frac{1}{|a_{ik}|} \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix}. \quad (\text{Д-1-5a})$$

Деление матрицы $\|a_{ik}\|$ на $\|b_{ik}\|$ представляется как умножение на матрицу $\|b_{ik}\|^{-1}$, обратную $\|b_{ik}\|$.

Возведение матрицы второго порядка в степень n . Правило умножения матриц можно использовать для возведения матрицы в степень. При условии $|a_{ik}| = 1$ и $a_{11} + a_{22} \neq \pm 2$ возведение матрицы в n -ю степень определяется формулой

$$\|a_{ik}\|^n = \frac{1}{s_1} \left\| \begin{array}{cc} s_{n+1} - a_{22}s_n & a_{12}s_n \\ a_{21}s_n & s_{n+1} - a_{11}s_n \end{array} \right\|, \quad (\text{Д-1-6})$$

где $s_n = \text{sh } n\alpha$ ($n=0, 1, 2 \dots$), а аргумент α определяется соотноше-
нием

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}.$$

Следует отметить, что во всех рассмотренных операциях ранг матрицы не изменяется.

Любую матрицу $\|a_{ik}\|$ можно рассматривать как составленную из нескольких подматриц

$$||A|| = ||a_{ik}|| = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{k,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|$$

Матрица, каждый элемент которой в свою очередь является матрицей, называется сложной; такие матрицы складываются, перемножаются и т. д. как обычные.

Матричное исчисление облегчает решение системы линейных уравнений, особенно когда требуется найти только некоторые неизвестные. Действительно, систему линейных уравнений

$$\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n; \\ \dots \\ y_k = a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n; \\ y_{k+1} = a_{k+1,1}x_1 + \dots + a_{k+1,n}x_n; \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{array}$$

МОЖНО ЗАПИСАТЬ В ВИДЕ

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \\ \hline a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc|cc} a_{1,k+1} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,k+1} & \dots & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,k+1} & \dots & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \hline x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\|$$

или

$$\left\| \begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} \right\|; \quad Y_1 = A_1 X_1 + A_2 X_2, \\ Y_2 = A_3 X_1 + A_4 X_2.$$

Пусть требуется найти неизвестные x_1, \dots, x_k . Исключая из этой системы X_2 , получаем:

$$Y_1 - A_2 A_4^{-1} Y_2 = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) X_1. \quad (\text{Д-1-7})$$

Это матричное уравнение не содержит неизвестных $x_{k+1} \dots x_n$ и решение его упрощается.

Д-2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ. ТЕНЗОРЫ

Обозначим оси прямоугольной правой декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 . Тогда расстояние Δl между двумя точками в этой системе определяется выражением

$$\Delta l^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2,$$

где Δx_i — соответствующая разность координат точек ($i=1, 2, 3$). Расстояние это называется интервалом, а величина Δl — длиной интервала.

При переходе от одной системы координат к другой абсциссы и ординаты точек изменяются. Такой переход называется преобразованием координат; оно может заключаться в изменении начала координат, повороте координатных осей или в одновременном повороте осей и переносе начала координат.

Если при преобразовании координат меняются абсциссы и ординаты точек, но не меняются расстояния между этими точками, то пространство называется эвклидовым.

Величины, не зависящие от преобразования координат, называются инвариантами. Для эвклидова пространства свойство инвариантности выполняется и в случае бесконечно малого интервала

$$dl^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2. \quad (\text{Д-2-1})$$

Рассмотрим вектор \mathbf{A} в прямоугольной системе координат $K(0, x_1, x_2, x_3)$. Обозначим компоненты вектора в этой системе через

A_1, A_2, A_3 (рис. Д-1). Компоненты того же вектора в системе $K'(0, x'_1, x'_2, x'_3)$ обозначим соответственно через A'_1, A'_2, A'_3 (рис. Д-2). При этом связь между компонентами вектора в обеих системах определяют следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} A'_1 &= A_1 \cos(\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_1) + A_2 \cos(\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_2) + A_3 \cos(\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_3), \\ A'_2 &= A_1 \cos(\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_1) + A_2 \cos(\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_2) + A_3 \cos(\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_3), \\ A'_3 &= A_1 \cos(\mathbf{e}'_3 \mathbf{e}_1) + A_2 \cos(\mathbf{e}'_3 \mathbf{e}_2) + A_3 \cos(\mathbf{e}'_3 \mathbf{e}_3), \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-2-2})$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — орты (единичные векторы) системы K ;
 $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ — орты системы K' .

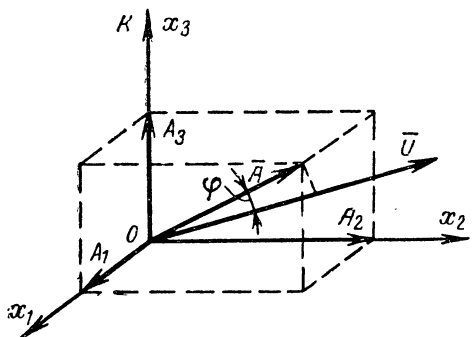


Рис. Д-1. Разложение вектора \mathbf{A} на составляющие по координатным осям.

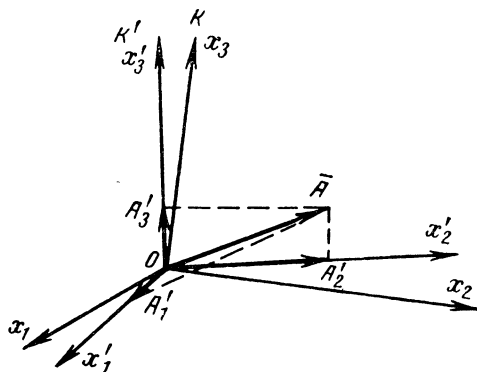


Рис. Д-2. Переход от системы K к системе K' .

Чтобы упростить написание этих формул, косинусы девяти углов, образованных осями системы K' с осями системы K (направляющие косинусы), обозначим согласно табл. Д-1. Тогда выражения (Д-2-2) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} A'_1 &= \alpha_{11} A_1 + \alpha_{12} A_2 + \alpha_{13} A_3, \\ A'_2 &= \alpha_{21} A_1 + \alpha_{22} A_2 + \alpha_{23} A_3, \\ A'_3 &= \alpha_{31} A_1 + \alpha_{32} A_2 + \alpha_{33} A_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-2-3})$$

Т а б л и ц а Д-1
Обозначения косинусов углов в системах
уравнений (Д-2-3) и (Д-2-4)

$a_{ik} = \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k)$		Орты системы координат K		
		\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3
Орты системы координат K'	\mathbf{e}'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
	\mathbf{e}'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
	\mathbf{e}'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Таблица коэффициентов

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \right\|$$

называется матрицей преобразования.

Угол между направлениями двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{U} определяется формулой

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(\mathbf{AU}) = \cos(\mathbf{Ae}_1) \cos(\mathbf{Ue}_1) + \\ &+ \cos(\mathbf{Ae}_2) \cos(\mathbf{Ue}_2) + \cos(\mathbf{Ae}_3) \cos(\mathbf{Ue}_3). \end{aligned}$$

С помощью этой формулы и табл. Д-1 получим следующие зависимости между направляющими косинусами.

$$\left. \begin{aligned} \cos(\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_1) &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \\ \cos(\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_2) &= \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1, \\ \cos(\mathbf{e}'_3 \mathbf{e}'_3) &= \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, \\ \cos(\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2) &= \alpha_{11} \alpha_{21} + \alpha_{12} \alpha_{22} + \alpha_{13} \alpha_{23} = 0, \\ \cos(\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_3) &= \alpha_{11} \alpha_{31} + \alpha_{12} \alpha_{32} + \alpha_{13} \alpha_{33} = 0, \\ \cos(\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3) &= \alpha_{21} \alpha_{31} + \alpha_{22} \alpha_{32} + \alpha_{23} \alpha_{33} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-2-4})$$

Система (Д-2-4) записывается сокращенно в следующем виде:

$$\sum_{l=1}^3 \alpha_{il} \alpha_{kl} = \delta_{ik}, \quad (\text{Д-2-5})$$

где δ_{ik} — символ Кронекера (Д-1-1).

Применяя условия Эйнштейна о суммировании, перепишем выражение (Д-2-5) в следующем виде:

$$\alpha_{il} \alpha_{kl} = \delta_{ik}. \quad (\text{Д-2-6})$$

В трехмерном пространстве согласно этим условиям:

1. Индекс, встречающийся в произведении дважды, означает суммирование от 1 до 3;

2. Индекс, встречающийся в произведении дважды, можно заменить любым другим без изменения значения рассматриваемого выражения (по этой причине повторяющийся индекс часто называют «немым»);

3. Никакой индекс не может встречаться в произведении более двух раз;

4. Неповторяющийся индекс называется свободным и принимает значения от 1 до 3.

Эти условия можно применить к сумме вида (Д-2-5), но ни в каких случаях они не относятся к отдельным слагаемым. Учитывая эти условия, выражения (Д-2-3) можно привести к виду

$$A'_i = \alpha_{ik} A_k \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{Д-2-7})$$

Следовательно, компоненты вектора в системе K' являются линейными комбинациями компонент в системе K . Такие преобразования называются афинными ортогональными, а соотношение (Д-2-6) — условием ортогональности (пересечения координатных осей под прямыми углами).

Обратное преобразование осуществляется с помощью выражения

$$A_k = \alpha_{ki} A'_i. \quad (\text{Д-2-7а})$$

Два вектора, один из которых определен в системе $K(0, x_1, x_2, x_3)$ и имеет проекции A_k , а другой — в системе $K'(0, x'_1, x'_2, x'_3)$ и имеет проекции A'_i , связанные с A_k линейными соотношениями (Д-2-7), совершенно тождественны. Поэтому можно дать еще такое определение вектора. *Вектором в трехмерном пространстве называется совокуп-*

ность трех величин A_i , преобразующихся при поворотах системы координат по формуле (Д-2-7).

Радиус-вектор, представляющий собой вектор, проведенный из начала координат в исследуемую точку, называется совокупность трех величин x_i , преобразующихся при поворотах системы координат по формулам (Д-2-7), т. е.

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k, \quad x_k = \alpha_{ki} x'_i. \quad (\text{Д-2-8})$$

Вектор является тензором первого ранга и определяется тремя проекциями, т. е. скалярными величинами или тензорами нулевого ранга $A_i = (A_1, A_2, A_3)$.

Обобщая данное определение, введем понятие тензора второго ранга. Тензором второго ранга T_{ik} в трехмерном пространстве называется совокупность трех векторов — тензоров первого ранга. Так как компоненты вектора преобразуются согласно (Д-2-7), то компоненты тензора T_{ik} преобразуются по формуле

$$T'_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} T_{lm}. \quad (\text{Д-2-9})$$

Выражение это можно рассматривать как обобщение выражения (Д-2-7). В связи с этим можно дать следующее определение тензора второго ранга. Тензором второго ранга в трехмерном пространстве называется совокупность девяти величин, преобразующихся при повороте системы координат согласно формуле (Д-2-9).

Тензор второго ранга можно записать в виде квадратной матрицы

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}. \quad (\text{Д-2-10})$$

Сходство между матрицей $\| \alpha_{ik} \|$ и тензором второго ранга $\| T_{ik} \|$ состоит только в том, что они представляются таблицами из девяти элементов. Но в отличие от матрицы $\| \alpha_{ik} \|$ — таблицы коэффициентов, связывающих две системы координат, тензор второго ранга определяет физическую или геометрическую величину, которая представляется девятью величинами в одной системе координат. В другой системе координат тензор второго ранга также определяется девятью, но уже другими величинами, связанными с первыми соотношением (Д-2-9). Нельзя говорить о преобразовании матрицы $\| \alpha_{ik} \|$ в системах координат, так как это выражение не имеет смысла.

В общем случае тензором r -ранга называется физическая или геометрическая величина, определяемая системой чисел или функций $T_{i_1 i_2 \dots i_r}$, которые преобразуются при повороте системы координат, согласно формуле

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_r} = \alpha_{i_1 i'_1} \alpha_{i_2 i'_2} \dots \alpha_{i_r i'_r} T_{i'_1 i'_2 \dots i'_r}.$$

В трехмерном пространстве тензор r -ранга имеет 3^r компонент.

Скаляр можно рассматривать как тензор нулевого ранга, вектор — как тензор первого ранга. Ранг тензора определяется числом индексов.

При изучении линейных электромагнитных процессов пользуются тензорами не выше второго ранга.

Тензор второго ранга называется симметричным, если $T_{ik} = T_{ki}$, т. е. когда равны компоненты, симметричные относительно главной диагонали. Симметричный тензор второго ранга определяется шестью величинами.

Тензор называется антисимметричным, если $T_{ik} = -T_{ki}$. Компоненты такого тензора, стоящие на главной диагонали, равны нулю. Следовательно, такой тензор определяется тремя компонентами.

Тензор называется самосопряженным или эрмитовым, если $T_{ik} = T_{ki}^*$. Эрмитов тензор второго ранга в общем случае определяется шестью компонентами.

Магнитная проницаемость ферритов и диэлектрическая проницаемость плазмы при подмагничивании являются эрмитовыми тензорами вида

$$\begin{vmatrix} \mu & -j\mu_\alpha & 0 \\ j\mu_\alpha & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}. \quad (\text{Д-2-11})$$

Тензор, компоненты которого не изменяются при преобразованиях координат, называется изотропным. Скаляр — это изотропный тензор нулевого ранга.

Тензорная алгебра изучает инвариантные операции, т. е. такие операции, в результате которых получается вполне определенный тензор, не зависящий от того, в какой системе координат операция выполнена.

Алгебраической суммой двух тензоров A_{ik} и B_{ik} второго ранга называется тензор C_{ik} того же ранга, компоненты которого равны алгебраической сумме компонент слагаемых тензоров:

$$C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}.$$

Это правило сложения относится к любому числу тензоров, но складывать можно только тензоры одного ранга.

Произведением двух тензоров A_{ik} и B_{lm} называется тензор C_{iklm} , компоненты которого равны произведению соответствующих компонент перемножаемых тензоров:

$$C_{iklm} = A_{ik} B_{lm}.$$

Ранг произведения двух тензоров равен сумме рангов этих тензоров. Произведение двух тензоров некоммутативно, т. е.

$$A_{ik} B_{lm} \neq B_{lm} A_{ik}.$$

Правило умножения относится к любому числу тензоров любых рангов.

Свертывание тензора. Полагая два индекса тензора одинаковыми, т. е. суммируя по этим индексам, получим из тензора r -ранга тензор $(r-2)$ -ранга. Эта операция называется свертыванием. Операцию свертывания можно применять к тензору несколько раз. При этом тензор нечетного ранга может быть свернут до вектора, четного — до скаляра.

Пример 1. Свертывая тензор второго ранга

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix},$$

получаем скаляр

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}.$$

Пример 2. Свертывая тензор

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix},$$

получаем скаляр $T_{ii} = 10$.

Взаимное свертывание или свертывание произведения тензоров. Если перемножить два тензора рангов r и s , и полученный тензор свернуть по индексам, принадлежащим различным тензорам, то получим тензор ранга $(r+s-2)$. Эта операция называется взаимным свертыванием. При взаимном свертывании можно свертывать и несколько раз.

Пример 3. $B_i = \mu_{ik} H_k$ — вектор магнитной индукции; здесь μ_{ik} — тензор магнитной проницаемости (тензор второго ранга) и H_k — вектор напряженности магнитного поля (тензор первого ранга). Вообще произведение тензора второго ранга на тензор первого ранга есть тензор третьего ранга, но $\mu_{ik} H_k$ — тензор первого ранга, так как в этом случае производится взаимное свертывание.

Пример 4. Скалярное произведение двух векторов является произведением двух тензоров первого ранга с последующим свертыванием

$$AB = A_i B_i$$

Пример 5. Перемножая тензор

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

с вектором $A_i = (2, 1, 4)$ и свертывая это произведение по первому индексу T_{ik} , получаем вектор

$$B_k = T_{ik} A_i = (13, 16, 21);$$

свертывая произведение по второму индексу T_{ik} , получаем вектор

$$B_i = T_{ik} A_k = (10, 14, 23).$$

Разложение тензора на симметричную и антисимметричную части. Любой тензор второго ранга можно разложить на симметричную и антисимметричную части, причем единственным образом. Действительно, тензор T_{ik} можно представить так:

$$T_{ik} = S_{ik} + A_{ik},$$

где $S_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki})$ — симметричная часть тензора (так как $S_{ik} = S_{ki}$), а $A_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki})$ — его антисимметричная часть (так как $A_{ik} = -A_{ki}$).

Пример 6. Тензор

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

можно разложить на симметричную и антисимметричную части следующим образом:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Приведение тензора к главным осям. Произведение

$$T_{ik} \cdot A_k = B_i \quad (\text{Д-2-12})$$

представляет взаимное свертывание и является вектором. Вообще B_i не совпадает по направлению с A_k , но для заданного T_{ik} можно подобрать такой вектор A_i , который при умножении на T_{ik} изменяет только свою величину, не изменяя своего направления, т. е. B_i пропорционален A_i :

$$B_i = \eta A_i, \quad (\text{Д-2-13})$$

где η — скаляр.

Подставляя последнее выражение в (Д-2-12), получаем:

$$T_{ik} A_k = \eta A_i,$$

что соответствует трем линейным однородным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} T_{11} A_1 + T_{12} A_2 + T_{13} A_3 &= \eta A_1; \\ T_{21} A_1 + T_{22} A_2 + T_{23} A_3 &= \eta A_2; \\ T_{31} A_1 + T_{32} A_2 + T_{33} A_3 &= \eta A_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-2-14})$$

Эта система уравнений может иметь решения, отличные от нуля, если определитель ее равен нулю:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \eta & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \eta & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \eta \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{Д-2-15})$$

Кубическое уравнение (Д-2-15) называется характеристическим. Корни его η_n ($n=1, 2, 3$) вещественны, если T_{ik} является симметричным вещественным или эрмитовым тензором, и называются характеристическими числами тензора.

Если характеристические числа η_n подставить в уравнения системы (Д-2-14), то получим три системы уравнений, определяющих три вектора $A_k^{(n)}$. Так как эти системы линейны и однородны, то

они определяют эти векторы только по направлению. Эти направления взаимно перпендикулярны и называются главными осями тензора.

Если в качестве осей координат выбрать главные оси тензора, то тензор будет иметь вид:

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{vmatrix}.$$

Характеристические числа тензора определяют его компоненты после приведения тензора к главным осям. Эта операция называется также приведением тензора к диагональному виду.

Пример 7. Магнитная проницаемость намагниченного феррита (Д-2-11) представляет собой эрмитов тензор:

$$\mu_{ik} = \begin{vmatrix} \mu & -j\mu_\alpha & 0 \\ j\mu_\alpha & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{vmatrix}.$$

Характеристические числа этого тензора определяются из характеристического уравнения (Д-2-15)

$$\begin{vmatrix} \mu - \eta & -j\mu_\alpha & 0 \\ j\mu_\alpha & \mu - \eta & 0 \\ 0 & \mu & \mu_3 - \eta \end{vmatrix} = 0;$$

отсюда

$$\eta_1 = (\mu + \mu_\alpha), \quad \eta_2 = (\mu - \mu_\alpha), \quad \eta_3 = \mu_3.$$

Приведенный к диагональному виду тензор μ_{ik} имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \mu + \mu_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \mu_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{vmatrix}.$$

Главные оси тензора определяются системой уравнений (Д-2-14) для трех значений η_n . Положив $\eta = \eta_1 = (\mu + \mu_\alpha)$, получим систему, определяющую ось $A_i^{(1)} = (A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)})$ по направлению

$$\begin{aligned} \frac{A_1^{(1)}}{\begin{vmatrix} \mu - (\mu + \mu_\alpha) & 0 \\ 0 & \mu_3 - (\mu + \mu_\alpha) \end{vmatrix}} &= \frac{A_2^{(1)}}{\begin{vmatrix} 0 & j\mu_\alpha \\ \mu_3 - (\mu + \mu_\alpha) & 0 \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{A_3^{(1)}}{\begin{vmatrix} j\mu_\alpha & \mu - (\mu + \mu_\alpha) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

или

$$\frac{A_1^{(1)}}{-\mu_\alpha (\mu_3 - \mu - \mu_\alpha)} = \frac{A_2^{(1)}}{-j\mu_\alpha (\mu_3 - \mu - \mu_\alpha)} = \frac{A_3^{(1)}}{0}.$$

Аналогично направление $A_i^{(2)}$ определится соотношением

$$\frac{A_1^{(2)}}{\mu_\alpha (\mu_3 - \mu + \mu_\alpha)} = \frac{A_2^{(2)}}{-j\mu_\alpha (\mu_3 - \mu + \mu_\alpha)} = \frac{A_3^{(2)}}{0}.$$

Из полученных соотношений очевидно, что векторы $A_i^{(1)}$ и $A_i^{(2)}$ не имеют составляющей по оси x_3 , т. е. оба лежат в плоскости Ox_1x_2 :

$$\left. \begin{aligned} A_1^{(1)} &= -jA_2^{(1)} \\ A_1^{(2)} &= jA_2^{(2)} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{Д-2-16})$$

Эти выражения характеризуют векторы $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$, вращающиеся в противоположные стороны. Вектор $\mathbf{A}^{(3)}$ перпендикулярен плоскости Ox_1x_2 .

Каждому тензору второго ранга можно однозначно сопоставить поверхность второго порядка, характеризующую его свойства

$$T_{ik} x_i x_k = 1,$$

где x_i , x_k — координаты поверхности. Эта поверхность называется тензорным эллипсоидом. При повороте системы координат и совпадении ее осей с главными осями тензора получим уравнение поверхности эллипсоида:

$$\eta_1 x_1'^2 + \eta_2 x_2'^2 + \eta_3 x_3'^2 = 1$$

или

$$\frac{x_1'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\eta_1}}\right)^2} + \frac{x_2'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\eta_2}}\right)^2} + \frac{x_3'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\eta_3}}\right)^2} = 1,$$

причем полуоси эллипсоида $a_i = \frac{1}{\sqrt{\eta_i}}$ ($i = 1, 2, 3$).

Возможны три случая.

1. Если все величины η_i различны, то имеем трехосный эллипсоид (рис. Д-3, а). Среда, характеризующаяся таким тензором, полностью анизотропна, т. е. свойства ее в разных направлениях различны:

$$\frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} + \frac{x_3'^2}{c^2} = 1. \quad (\text{Д-2-17})$$

2. Если $\eta_1 = \eta_2 \neq \eta_3$, то получим эллипсоид вращения (рис. Д-3, б):

$$\frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{a^2} + \frac{x_3'^2}{c^2} = 1. \quad (\text{Д-2-18})$$

Среда, характеризуемая таким тензором, анизотропна не во всех направлениях.

3. Если $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$, то получим сферу (рис. Д-3, в). Среда, характеризуемая таким тензором, изотропна, т. е. свойства ее от направления не зависят:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = a^2. \quad (\text{Д-2-19})$$

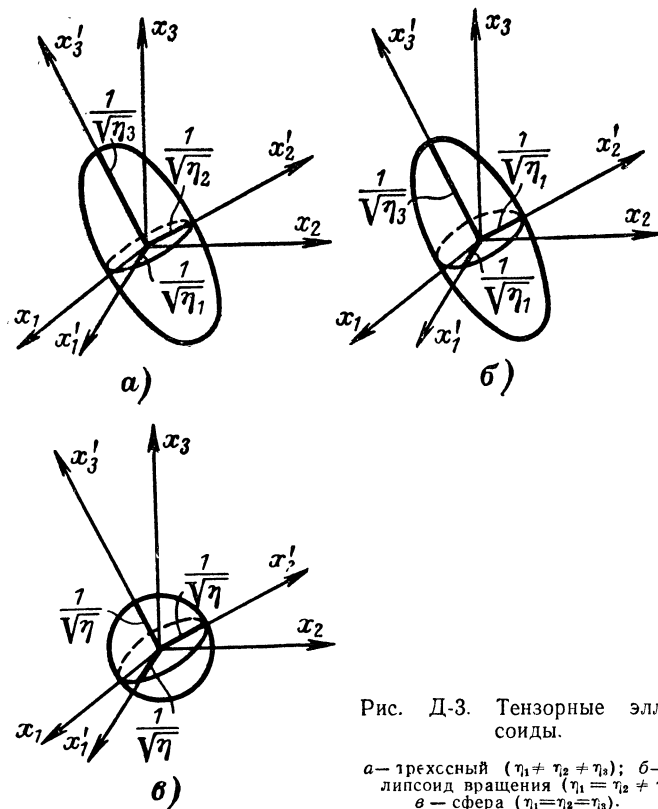


Рис. Д-3. Тензорные эллипсоиды.

а — трехосный ($\eta_1 \neq \eta_2 \neq \eta_3$); б — эллипсоид вращения ($\eta_1 = \eta_2 \neq \eta_3$); в — сфера ($\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$).

Тензор в этом случае имеет вид:

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{vmatrix} = \delta_{ik} \eta. \quad (\text{Д-2-20})$$

Умножение вектора на такой тензор изменяет только его величину, не изменяя направления. Любые направления здесь являются главными. Такой тензор называется **изотропным**.

Тензор δ_{ik} , компоненты которого могут иметь только два значения:

$$\begin{aligned} &+1, \text{ когда } i = k, \\ &-1, \text{ когда } i \neq k, \end{aligned}$$

называется единичным тензором второго ранга:

$$\delta_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (\text{Д-2-21})$$

Свертывая δ_{ik} , получаем $\delta_{ii} = 3$. Очевидно, что

$$\delta_{ik} A_k = A_i, \quad (\text{Д-2-21a})$$

т. е., составляя скалярное произведение $\delta_{ik} A_k$, мы меняем индекс k на i . Это можно использовать для вынесения векторов и тензоров за скобки

$$T_{ik} A_k + A_i = T_{ik} A_k + \delta_{ik} A_k = A_k (T_{ik} + \delta_{ik}). \quad (\text{Д-2-22})$$

Единичный тензор третьего ранга ϵ_{ikl} , компоненты которого могут иметь только три значения $+1$, -1 и 0 , определяется следующим образом:

$$\epsilon_{ikl} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1k} & \delta_{1l} \\ \delta_{2i} & \delta_{2k} & \delta_{2l} \\ \delta_{3i} & \delta_{3k} & \delta_{3l} \end{vmatrix}. \quad (\text{Д-2-23})$$

ϵ_{ikl} называется символом Леви-Чивита.

Произведение двух тензоров ϵ_{ikl} и ϵ_{mnp} представляет тензор шестого ранга:

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lp} \end{vmatrix}.$$

Свертывая его по индексам l и p , получаем:

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{mnl} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}. \quad (\text{Д-2-24})$$

Свертывая еще раз по индексам k и n , получаем:

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{mkl} = 2\delta_{im};$$

свертывая по всем индексам, получаем:

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{ikl} = 6.$$

Д-3. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Скалярное произведение двух векторов является скаляром и определяется выражением

$$(\mathbf{AB}) = AB \cos (\mathbf{AB}). \quad (\text{Д-3-1})$$

Очевидно, что $(\mathbf{AB}) = (\mathbf{BA})$.

Скалярное произведение двух векторов можно рассматривать как взаимное свертывание двух тензоров первого ранга. В декартовой системе координат

$$(\mathbf{A}\mathbf{B}) = A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3. \quad (\text{Д-3-1a})$$

Векторное произведение $[\mathbf{A}\mathbf{B}]$ векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} является вектором, перпендикулярным к \mathbf{A} и \mathbf{B} и по абсолютной величине равным площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Векторное произведение можно вычислить с помощью определителя. В декартовой системе координат

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (\text{Д-3-2})$$

и в тензорной форме

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}]_i = \varepsilon_{ikl} A_k B_l,$$

где ε_{ikl} — единичный тензор третьего ранга, определяемый выражением (Д-2-23).

Абсолютная величина векторного произведения равна:

$$|[\mathbf{A}\mathbf{B}]| = AB \sin(\mathbf{A}\mathbf{B}). \quad (\text{Д-3-3})$$

Направление вектора $[\mathbf{A}\mathbf{B}]$ определяется из условия образования правой системы с векторами \mathbf{A} и \mathbf{B} . Векторное произведение не подчиняется закону коммутативности и при перестановке векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} изменяет знак на обратный, т. е.

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}] = -[\mathbf{B}\mathbf{A}].$$

Смешанное или векторно-скалярное произведение трех векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} является скалярным и численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$(\mathbf{A} [\mathbf{B}\mathbf{C}]) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{Д-3-4})$$

При перестановке

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} [\mathbf{B}\mathbf{C}]) &= (\mathbf{B} [\mathbf{C}\mathbf{A}]) = -(\mathbf{A} [\mathbf{C}\mathbf{B}]) = -(\mathbf{C} [\mathbf{B}\mathbf{A}]) = - \\ &= -(\mathbf{B} [\mathbf{A}\mathbf{C}]) = (\mathbf{C} [\mathbf{A}\mathbf{B}]). \end{aligned}$$

Двойное векторное произведение векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} определяется выражением

$$[\mathbf{A} [\mathbf{B}\mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (\text{Д-3-5})$$

Тензорное поле. Это область пространства, в каждой точке которой задано значение некоторой тензорной величины. Компоненты поля в различных точках пространства различны и в общем случае

$$T_{i_1 i_2 \dots i_r} = T_{i_1 i_2 \dots i_r}(x_1, x_2, x_3).$$

В зависимости от ранга тензора поле называется скалярным (тензорное поле нулевого ранга), векторным (тензорное поле первого ранга) или тензорным r -ранга.

Если компоненты поля зависят не только от координат, но и от времени t , то поле называется нестационарным; если они от t не зависят, то поле называется стационарным.

Если можно так выбрать систему координат, что

$$T_{i_1 i_2} \dots i_r = T_{i_1 i_2} \dots i_r (x_1, x_2),$$

то поле называется плоскопараллельным.

Скалярное поле — область пространства, каждая точка которого характеризуется некоторым значением скаляра. Так как каждая точка определяется радиусом-вектором \mathbf{r} , то задание поля определяется заданием скалярной функции $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x_i)$. Примером скалярного поля является поле температур.

Если поле зависит от времени, то

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(x_i, t).$$

Рассмотрим точки поля, где $\varphi(x_i)$ имеет одинаковые значения. Эти точки образуют поверхность, которая называется поверхностью равного уровня или эквипотенциальной поверхностью:

$$\varphi(x_i) = \text{const} = c.$$

Придавая c различные значения, получим семейство поверхностей, распределение которых в пространстве характеризует поле.

Вектор, численно равный $d\varphi/dn$ и направленный по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания скаляра φ , носит название градиента скаляра, т. е.

$$\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dn} \mathbf{n}_0, \quad (\text{Д-3-6})$$

где \mathbf{n}_0 — орт внешней нормали.

Скорость изменения скаляра в любом другом направлении \mathbf{l} равна проекции градиента на это направление

$$\frac{d\varphi}{dl} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{l} = \text{grad}_l \varphi. \quad (\text{Д-3-7})$$

Направление градиента \mathbf{n}_0 есть направление наиболее быстрого возрастания скаляра φ , а $-\mathbf{n}_0$ — направление наиболее быстрого убывания φ . В направлениях касательных к поверхности равного уровня значение φ вовсе не изменяется, т. е. $d\varphi/d\tau = 0$.

Согласно выражению (Д-3-7) проекции градиента на оси декартовой системы координат:

$$\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dx_1} \mathbf{e}_1 + \frac{d\varphi}{dx_2} \mathbf{e}_2 + \frac{d\varphi}{dx_3} \mathbf{e}_3.$$

Введем оператор¹ Гамильтона («набла»):

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{d}{dx_1} + \mathbf{e}_2 \frac{d}{dx_2} + \mathbf{e}_3 \frac{d}{dx_3}. \quad (\text{Д-3-8})$$

Тогда

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \quad \text{grad}_i \varphi = \nabla_i \varphi = \frac{d\varphi}{dx_i}, \quad (\text{Д-3-9})$$

¹ Оператором называется символическое изображение совокупности математических операций, производимых над функцией.

где ∇_i — составляющие векторного оператора ∇ , т. е.

$$\nabla_i = \frac{d}{dx_i}. \quad (\text{Д-3-10})$$

Выражение (Д-3-9) является дифференциальной характеристикой скалярного поля.

Векторное поле — область пространства, каждая точка которого характеризуется некоторым значением вектора. Так как каждая точка

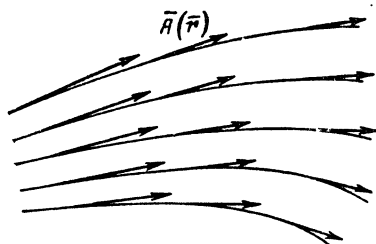


Рис. Д-4. Графическое представление векторного поля.

ка определяется радиус-вектором \mathbf{r} , то задание поля определяется заданием векторной функции $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(x_i)$. Если поле зависит от времени, то $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(x_i, t)$. Примерами векторных полей являются магнитное, электрическое и гравитационное. Поле градиента скалярного поля также является векторным.

Векторное поле графически можно характеризовать векторными или силовыми линиями. Векторной или силовой линией называется кривая, касательная к которой в каждой

точке совпадает с направлением векторного поля (рис. Д-4).

Каждая точка кривой определяется радиус-вектором \mathbf{r} . Касательная к кривой определяется вектором $d\mathbf{r}$. По определению векторной линии векторы $d\mathbf{r}$ и \mathbf{A} должны быть параллельны, т. е. проекции этих векторов пропорциональны. Следовательно, система

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \frac{dx_3}{A_3}$$

представляет систему векторных линий. Векторные линии характеризуют направление поля в точках, через которые они проведены. Однако с помощью этих линий можно характеризовать и модуль вектора, проводя векторные линии гуще там, где абсолютная величина вектора больше.

Дифференциальными характеристиками векторного поля являются:

1) дивергенция или расходимость вектора \mathbf{A} — скалярная функция, аргументом которой является векторная функция точки, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = (\nabla \mathbf{A}) \quad (\text{Д-3-11})$$

или с учетом (Д-3-8) в декартовой системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla_i A_i = \frac{dA_i}{dx_i}, \quad (\text{Д-3-12})$$

2) ротор или вихрь вектора \mathbf{A} — векторная функция, аргументом которой является векторная функция точки, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}]$$

или с учетом выражения (Д-3-2)

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dx_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{Д-3-13})$$

В тензорной форме согласно (Д-3-2а)

$$\operatorname{rot}_i \mathbf{A} = \varepsilon_{ikl} \nabla_k A_l = \varepsilon_{ikl} \frac{dA_l}{dx_k}. \quad (\text{Д-3-13a})$$

Производные второго порядка:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = (\nabla \nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi, \quad (\text{Д-3-14})$$

где $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа (лапласиан).

В декартовой системе координат

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_2^2} + \frac{d^2}{dx_3^2}. \quad (\text{Д-3-15})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = [\nabla \nabla \varphi] = 0 \quad (\text{Д-3-16})$$

согласно выражению (Д-3-3) вследствие параллельности векторов ∇ и $\nabla \varphi$.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = (\nabla [\nabla \mathbf{A}]) = 0 \quad (\text{Д-3-17})$$

согласно выражению (Д-3-1) вследствие перпендикулярности векторов ∇ и $[\nabla \mathbf{A}]$.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla [\nabla \mathbf{A}]] = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \quad (\text{Д-3-18})$$

так как согласно (Д-3-5) и с учетом выражений (Д-3-9), (Д-3-11), (Д-3-15)

$$[\nabla [\nabla \mathbf{A}]] = \nabla (\nabla \mathbf{A}) - (\nabla \nabla) \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A},$$

Из формулы (Д-3-18) следует:

$$\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (\text{Д-3-18a})$$

Производные произведения скаляра на скаляр или на вектор.

В этом случае дифференциальный оператор ∇ следует применить к каждому сомножителю отдельно, считая другой при этом постоянным:

$$\operatorname{grad} (\varphi \psi) = \nabla (\varphi \psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi; \quad (\text{Д-3-19})$$

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{A}) = (\nabla (\varphi \mathbf{A})) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi; \quad (\text{Д-3-20})$$

$$\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{A}) = [\nabla (\varphi \mathbf{A})] = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + [\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{A}]. \quad (\text{Д-3-21})$$

Производные произведения двух векторов.

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} (\mathbf{A} \mathbf{B}) &= \nabla (\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} + \\ &+ [\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}] + [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A}]; \end{aligned} \quad (\text{Д-3-22})$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{A} \mathbf{B}] = (\nabla [\mathbf{A} \mathbf{B}]) = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}; \quad (\text{Д-3-23})$$

$$\operatorname{rot} [\mathbf{A} \mathbf{B}] = [\nabla [\mathbf{A} \mathbf{B}]] = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}; \quad (\text{Д-3-24})$$

$$[\operatorname{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{A}]_i = \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik} - A_i \frac{\partial}{\partial x_k} A_k. \quad (\text{Д-3-24a})$$

Здесь

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} A_1^2 - \frac{1}{2} A^2 & A_1 A_2 & A_1 A_3 \\ A_2 A_1 & A_2^2 - \frac{1}{2} A^2 & A_2 A_3 \\ A_3 A_1 & A_3 A_2 & A_3^2 - \frac{1}{2} A^2 \end{vmatrix} \quad (\text{Д-3-24б})$$

— тензор второго ранга, называемый тензором натяжений векторного поля. Выражение (Д-3-24а) получено на основе формул (Д-3-2а) и (Д-3-13а) с учетом (Д-2-21) и (Д-2-24). В развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} [\text{rot } \mathbf{A} \times \mathbf{A}]_1 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_1^2 - \frac{1}{2} A^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 A_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} (A_1 A_3) \right\} - A_1 \text{div } \mathbf{A}; \\ [\text{rot } \mathbf{A} \times \mathbf{A}]_2 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(A_2^2 - \frac{1}{2} A^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} (A_2 A_3) \right\} - A_2 \text{div } \mathbf{A}; \\ [\text{rot } \mathbf{A} \times \mathbf{A}]_3 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_3 A_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(A_3^2 - \frac{1}{2} A^2 \right) \right\} - A_3 \text{div } \mathbf{A}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-3-24в})$$

Если ось x_1 совпадает с направлением вектора \mathbf{A} , то согласно (Д-3-24б)

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} A^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} A^2 \end{vmatrix},$$

т. е. тензор натяжений приводится к диагональному виду. К аналогичному виду тензор (Д-3-24б) приводится при совпадении направления \mathbf{A} с x_2 или x_3 .

Криволинейным интегралом векторной функции $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называется интеграл от скалярного произведения вида

$$\int_L \mathbf{A} d\mathbf{l}, \quad (\text{Д-3-25})$$

где L — кривая, являющаяся путем интегрирования; $d\mathbf{l}$ — направленный элемент кривой. Выражение (Д-3-25) является скаляром и представляет работу векторного поля \mathbf{A} вдоль кривой L .

Если контур L (рис. Д-5), расположенный на плоскости P , замкнутый, то интеграл, взятый по замкнутому контуру L , называется циркуляцией вектора, которая записывается в виде:

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (\text{Д-3-25a})$$

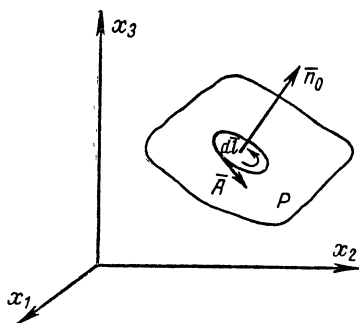


Рис. Д-5. К определению циркуляции вектора.

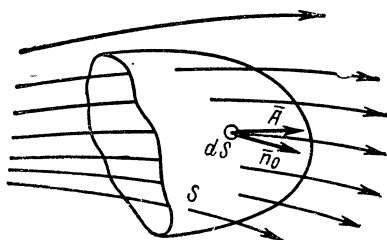


Рис. Д-6. К определению потока вектора через поверхность S .

Если одно из направлений нормали \mathbf{n}_0 к плоскости P принять за положительное, то за положительное направление обхода контура L принимается правое вращение по отношению к этому направлению нормали.

Потоком N вектора \mathbf{A} через поверхность S (рис. Д-6) называется поверхностный интеграл от скалярного произведения

$$N = \int_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_S A_n dS, \quad (\text{Д-3-26})$$

где S — поверхность интегрирования; $d\mathbf{S}$ — направленный элемент поверхности, направление которого совпадает с направлением внешней нормали к поверхности, а величина равна численному значению площади dS , т. е. $d\mathbf{S} = \mathbf{n}_0 dS$. Поток вектора, как видно из (Д-3-26), представляет собой скалярную величину и характеризуется числом векторных линий, пронизывающих поверхность.

Если поверхность замкнута, то

$$N = \oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_S A_n dS. \quad (\text{Д-3-27})$$

Теорема Стокса. Циркуляция вектора \mathbf{A} по замкнутому контуру равна потоку $\text{rot } \mathbf{A}$ через поверхность, опирающуюся на этот контур, т. е.

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} \quad (\text{Д-3-28})$$

или

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot}_n \mathbf{A} dS, \quad (\text{Д-3-28a})$$

где $\text{rot}_n \mathbf{A}$ — проекция $\text{rot} \mathbf{A}$ на направление нормали \mathbf{n}_0 к поверхности S .

Если поверхность ΔS столь мала, что во всех точках ее $\text{rot}_n \mathbf{A}$ можно считать постоянной величиной, то

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} \approx \text{rot}_n \mathbf{A} \Delta S.$$

Эта формула справедлива в предельном случае бесконечно малой поверхности ΔS , т. е.

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}}{\Delta S}. \quad (\text{Д-3-29})$$

Проекция $\text{rot}_n \mathbf{A}$ будет наибольшей, когда \mathbf{n} совпадает по направлению с $\text{rot} \mathbf{A}$. Очевидно, направление вектора $\text{rot} \mathbf{A}$ совпадает с направлением нормали к плоскости, в которой циркуляция вектора \mathbf{A} наибольшая. Модуль ротора вектора \mathbf{A} в данной точке поля равен пределу отношения циркуляции вектора \mathbf{A} по границе площадки, проходящей через эту точку и совпадающей с плоскостью, где циркуляция максимальна, к величине площадки, когда она стягивается в эту точку. Величина $\text{rot} \mathbf{A}$ характеризует вращательную способность поля.

Теорема Остроградского — Гаусса. Поток вектора \mathbf{A} через замкнутую поверхность S равен интегралу от $\text{div} \mathbf{A}$, взятому по объему V , ограниченному этой поверхностью, т. е.

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{A} dV \quad (\text{Д-3-30})$$

или

$$\oint_S A_n dS = \int_V \text{div} \mathbf{A} dV,$$

где A_n — проекция вектора \mathbf{A} на направление нормали \mathbf{n}_0 к поверхности S .

Если поверхность S столь мала, что во всех лежащих внутри нее точках $\text{div} \mathbf{A}$ можно считать постоянной, то

$$\oint_S A_n dS \approx \text{div} \mathbf{A} \Delta V.$$

Эта формула справедлива в предельном случае бесконечно малой поверхности, т. е.

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S A_n dS}{\Delta V}. \quad (\text{Д-3-31})$$

Следовательно, дивергенция вектора \mathbf{A} в данной точке равна пределу отношения потока вектора \mathbf{A} через замкнутую поверхность S , содержащую внутри себя эту точку, к объему ΔV , ограниченному поверхностью S , когда она стягивается в точку.

Дивергенция является скалярной величиной, характеризующей интенсивность источников или стоков поля. Те точки поля, где $\operatorname{div} \mathbf{A} < 0$, называются стоками поля; векторные линии сходятся к этим точкам; те точки, где $\operatorname{div} \mathbf{A} > 0$, называются источниками поля, векторные линии расходятся из этих точек. Если $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, то поле не имеет ни источников, ни стоков.

Тензорный аналог теоремы Остроградского — Гаусса имеет вид:

$$\int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint_S T_{ik} ds_k. \quad (\text{Д-3-30a})$$

Формулы Грина. Если $\mathbf{A} = \varphi \nabla \psi$, где φ и ψ — скаляры, то

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} (\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \Delta \psi.$$

Подставляя это выражение в (Д-3-30), получаем первую формулу Грина:

$$\oint_S \varphi \nabla \psi dS = \int_V (\nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \Delta \psi) dV. \quad (\text{Д-3-32})$$

Переставляя φ и ψ , получаем:

$$\oint_S \psi \nabla \varphi dS = \int_V (\nabla \psi \nabla \varphi + \psi \Delta \varphi) dV. \quad (\text{Д-3-32a})$$

Вычитая последнее выражение из (Д-3-32), получаем вторую формулу Грина:

$$\oint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) dS = \int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV. \quad (\text{Д-3-33})$$

Классификация векторных полей.

Если

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (\text{Д-3-34})$$

то поле вектора \mathbf{E} называется безвихревым. Если рассматриваемая область является односвязной¹, то поле, удовлетворяющее условию (Д-3-34), называется потенциальным и может быть представлено в виде

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (\text{Д-3-35})$$

так как согласно выражению (Д-3-16) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$. Функция φ называется потенциальной функцией или потенциалом поля. Очевидно, что потенциал определяется неоднозначно, так как $\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} (\varphi + c)$, где c — постоянная, не зависящая от координат пространства.

Знак минус в выражении (Д-3-35) выбран из тех соображений, что векторные линии поля \mathbf{E} направлены в сторону убывания потенциала. В потенциальном поле

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0, \quad (\text{Д-3-36})$$

т. е. существуют источники и стоки поля и линии поля не замкнуты.

Так как согласно (Д-3-14) $\operatorname{div} \mathbf{E} = -\Delta \varphi$, то скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta \varphi \neq 0. \quad (\text{Д-3-37})$$

¹ Область называется односвязной, если любой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно стянуть в точку.

Из условия (Д-3-34) согласно равенству (Д-3-28) следует, что

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \quad (\text{Д-3-37a})$$

т. е. циркуляция вектора вдоль любой замкнутой кривой равна нулю. Физически это означает, что в потенциальном поле работа вдоль замкнутого контура равна нулю.

Согласно теореме Остроградского — Гаусса (Д-3-30) и выражению (Д-3-36)

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{E} dV \neq 0, \quad (\text{Д-3-37б})$$

т. е. поток вектора \mathbf{E} через замкнутую поверхность не равен нулю.

Поле вектора \mathbf{B} называется соленоидальным, если в нем нет источников и стоков, т. е. если в любой точке

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (\text{Д-3-38})$$

Для соленоидального поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, так как согласно (Д-3-17) $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$. Функция A называется векторным потенциалом.

Полагая $\text{div } \mathbf{A} = 0$ (что возможно, так как вектор \mathbf{A} вспомогательный) с учетом (Д-3-18a), получим уравнение Пуассона в векторной форме:

$$\Delta \mathbf{A} \neq 0.$$

Согласно выражению (Д-3-28) при $\text{rot } \mathbf{A} \neq 0$ циркуляция вектора \mathbf{A} для соленоидального поля не равна нулю

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} \neq 0.$$

Следовательно, работа вектора поля вдоль замкнутого контура также не равна нулю. Этим соленоидальное поле отличается от потенциального.

Согласно теореме Остроградского — Гаусса (Д-3-30) и определению соленоидального поля [выражение (Д-3-38)] имеем:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{B} dV = 0,$$

т. е. поток вектора \mathbf{B} через замкнутую поверхность равен нулю. Если выделить в поле векторную трубку, т. е. часть объема, ограниченную векторными линиями (рис. Д-7), то из условия

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$$

следует, что в соленоидальном поле векторные линии являются замкнутыми или уходят в бесконечность. При условии

$$\text{rot } \mathbf{C} = 0 \text{ и } \text{div } \mathbf{C} = 0$$

поле вектора \mathbf{C} является безвихревым, не имеет источников и стоков. Такое поле называется лапласовым, характеризуется оно одновременно векторным и скалярным потенциалом

$$\mathbf{C} = -\text{grad } \varphi = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (\text{Д-3-39})$$

которые согласно выражениям (Д-3-14) и (Д-3-18) при условии $\text{div } \mathbf{A} = 0$ удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad \Delta \mathbf{A} = 0. \quad (\text{Д-3-40})$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими.

Дифференцирование в криволинейных ортогональных координатах. Положение точки M в пространстве определяется радиус-век-

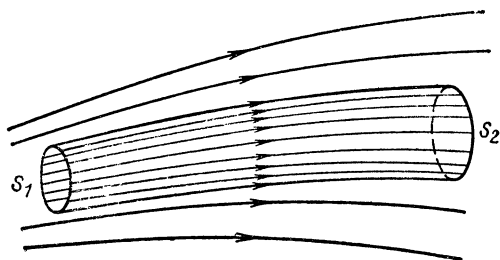


Рис. Д-7. Векторная трубка.

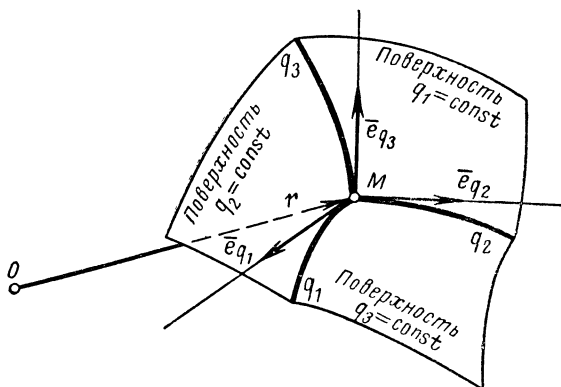


Рис. Д-8. Координатные поверхности, линии и оси ортогональной криволинейной системы координат.

тором \mathbf{r} , координаты которого q_1, q_2, q_3 зависят от принятой системы координат. Положение точки в пространстве можно однозначно определить пересечением трех поверхностей (рис. Д-8), которые называются координатными. Пересечение двух поверхностей дает линию, называемую координатной, значения двух координат на этой линии постоянны, а третья меняется. Координаты точки q_1, q_2, q_3 называются криволинейными.

Наиболее распространены ортогональные криволинейные системы, в которых касательные к координатным линиям в каждой точке

пересекаются под прямыми углами. Эти касательные называются координатными осями; направление их меняется от точки к точке.

В общем случае координаты точки в обобщенной криволинейной системе связаны с координатами прямоугольной декартовой системы уравнениями

$$q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3);$$

$$q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3);$$

$$q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3);$$

обратно

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3);$$

$$x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3);$$

$$x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3).$$

В криволинейной системе координат изменение координаты q_i на dq_i приводит к перемещению dl_i вдоль координатной линии:

$$dl_i = h_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{Д-3-41})$$

где h_i зависит от вида координат и называется коэффициентом Ламэ. (Повторение индекса i не означает суммирования.) Действительно, элемент длины dl_i координатной линии можно записать как

$$dl_i = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \quad (q_2 = \text{const}, q_3 = \text{const}),$$

где

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} dq_1, \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial q_1} dq_1, \quad dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial q_1} dq_1.$$

Отсюда

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)^2} dq_1 = h_1 dq_1.$$

Аналогично

$$dl_2 = h_2 dq_2, \quad dl_3 = h_3 dq_3.$$

На основании этого коэффициенты Ламэ можно записать в виде

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}. \quad (\text{Д-3-42})$$

Интервал между двумя точками dl определится как

$$dl = \sqrt{h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2}. \quad (\text{Д-3-43})$$

Элементы координатной поверхности:

$$\left. \begin{aligned} dS_1 &= dl_2 dl_3 = h_2 h_3 dq_2 dq_3; \\ dS_2 &= dl_1 dl_3 = h_1 h_3 dq_1 dq_3; \\ dS_3 &= dl_1 dl_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-3-44})$$

Элемент объема

$$dV = dS_1 dl_1 = dS_2 dl_2 = dS_3 dl_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (\text{Д-3-45})$$

С помощью полученных соотношений произведем дифференцирование в криволинейной системе координат. В соответствии с выражением (Д-3-7) получим:

$$\left. \begin{aligned} \text{grad}_1 \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial l_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}; \\ \text{grad}_2 \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial l_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}; \\ \text{grad}_3 \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial l_3} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-3-46})$$

С учетом равенства (Д-3-31)

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right], \end{aligned} \quad (\text{Д-3-47})$$

Согласно (Д-3-29)

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_1 \mathbf{A} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial q_3} \right]; \\ \text{rot}_2 \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial q_1} \right]; \\ \text{rot}_3 \mathbf{A} &= \frac{1}{h_2 h_1} \left[\frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial q_2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-3-48})$$

Согласно выражениям (Д-3-14), (Д-3-46) и (Д-3-47)

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Д-3-49})$$

Выражения (Д-3-46) — (Д-3-49), переписанные в цилиндрической, сферической и эллипсоидальной системах координат, имеют широкое применение в теории электромагнитного поля.

Цилиндрическая система координат (рис. Д-9). Координатными поверхностями являются: плоскости ($z = \text{const}$), круговые цилиндры ($r = \text{const}$) и полуплоскости ($\alpha = \text{const}$), проходящие через ось z под углом α к фиксированной полуплоскости. Координатными линиями являются: прямые ($r = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, $z = \text{const}$) и окружности ($r = \text{const}$, $z = \text{const}$). Направление координатных осей определяется ортами \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_α , \mathbf{e}_z . В этой системе $q_1 = r$, $q_2 = \alpha$ и $q_3 = z$.

Цилиндрические координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями: $x_1 = r \cos \alpha$, $x_2 = r \sin \alpha$ и $x_3 = z$.

Коэффициенты Ламэ: $h_r = 1$, $h_\alpha = r$, $h_z = 1$.

Согласно формулам (Д-3-46) — (Д-3-49) получаем:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (\text{Д-3-50})$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{Д-3-51})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\alpha + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{Д-3-52})$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (\text{Д-3-53})$$

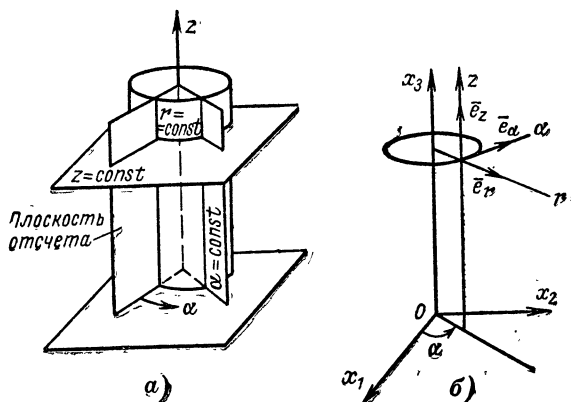


Рис. Д-9. Цилиндрическая система координат.

a — координатные поверхности; *б* — координатные линии, оси и их орты.

Согласно выражению (Д-3-18а)

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} = & \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right) \mathbf{e}_r + \\ & + \left(\Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right) \mathbf{e}_\alpha + \Delta A_z \mathbf{e}_z; \end{aligned} \quad (\text{Д-3-53a})$$

здесь ΔA_r , ΔA_α и ΔA_z — лапласианы скалярных величин, определяемые формулой (Д-3-53).

Сферическая система координат (рис. Д-10). Координатными поверхностями являются сферы радиуса r , конусы с углом раствора 2ϑ и полуплоскости, проходящие через ось z под углом α к фиксирован-

ной полуплоскости. Координатными линиями являются: окружности ($r=\text{const}$, $\alpha=\text{const}$, и $r=\text{const}$, $\vartheta=\text{const}$) и прямые ($\alpha=\text{const}$, $\vartheta=\text{const}$). Направление координатных осей определяется ортами \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_α , \mathbf{e}_ϑ . В этой системе $q_1=r$, $q_2=\vartheta$ и $q_3=\alpha$.

Сферические координаты связаны с декартовыми соотношениями:

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \alpha, \quad x_2 = r \sin \vartheta \sin \alpha, \quad x_3 = r \cos \vartheta.$$

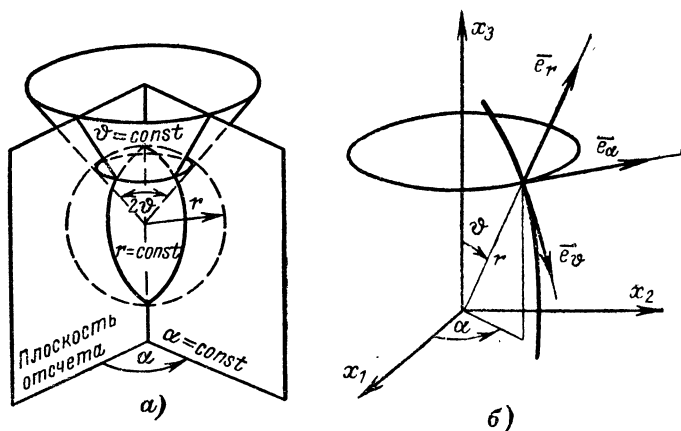


Рис. Д-10. Сферическая система координат.

а — координатные поверхности; б — координатные линии, оси и их орты.

Коэффициенты Ламэ: $h_r=1$, $h_\vartheta=r$, $h_\alpha=r \sin \vartheta$. Согласно формулам (Д-3-46) — (Д-3-49) получаем:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha; \quad (\text{Д-3-54})$$

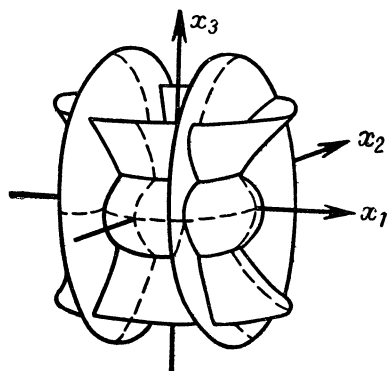
$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + \\ & + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}; \end{aligned} \quad (\text{Д-3-55})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\alpha \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_r + \\ & + \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\vartheta + \\ & + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{e}_\alpha; \end{aligned} \quad (\text{Д-3-56})$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \quad (\text{Д-3-57})$$

Согласно формуле (Д-3-18а)

$$\begin{aligned} \Delta A = & \left[\Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_r + \left[\Delta A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \right. \\ & \left. - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_\vartheta + \left[\Delta A_\alpha - \frac{A_\alpha}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} + \right. \\ & \left. + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_\alpha; \end{aligned} \quad (\text{Д-3-57а})$$



здесь ΔA_r , ΔA_α и ΔA_ϑ — лапласианы скалярных величин, определяемые формулой (Д-3-57).

Эллипсоидальная система координат (рис. Д-11). Координатные поверхности представляют собой трехосные эллипсоиды, двуполостные и однополостные гиперболоиды с общими главными осями. В этой системе:

$$q_1 = \xi, \quad q_2 = \eta, \quad q_3 = \zeta.$$

Рис. Д-11. Эллипсоидальные координаты.

Эллипсоидальные координаты связаны с декартовыми соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \pm \sqrt{\frac{(a^2 + \xi)(a^2 + \eta)(a^2 + \zeta)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}}; \\ x_2 &= \pm \sqrt{\frac{(b^2 + \xi)(b^2 + \eta)(b^2 + \zeta)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)}}; \\ x_3 &= \pm \sqrt{\frac{(c^2 + \xi)(c^2 + \eta)(c^2 + \zeta)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-3-58})$$

Коэффициенты Ламэ:

$$h_{\xi} = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2g(\xi)};$$

$$h_{\eta} = \frac{\sqrt{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}}{2g(\eta)};$$

$$h_{\zeta} = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2g(\zeta)}.$$

Согласно формулам (Д-3-46) и (Д-3-49) получаем:

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi = 2 \left[\frac{g(\xi)}{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \mathbf{e}_{\xi} + \right. \\ \left. + \frac{g(\eta)}{\sqrt{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \mathbf{e}_{\eta} + \frac{g(\zeta)}{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \mathbf{e}_{\zeta} \right]; \quad (\text{Д-3-59}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\eta - \zeta) \frac{g(\xi)}{g(\eta)g(\zeta)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\zeta - \xi) \frac{g(\eta)}{g(\zeta)g(\xi)} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right] + \frac{d}{d\zeta} \left[(\xi - \eta) \frac{g(\zeta)}{g(\eta)g(\xi)} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right]. \quad (\text{Д-3-60}) \end{aligned}$$

Здесь

$$g(\xi) = \sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)};$$

$$g(\eta) = \sqrt{(a^2 + \eta)(b^2 + \eta)(c^2 + \eta)};$$

$$g(\zeta) = \sqrt{(a^2 + \zeta)(b^2 + \zeta)(c^2 + \zeta)}.$$

Д-4. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Для описания события необходимо связать его с определенной системой отсчета, т. е. указать, в каком месте и в какое время оно происходит. Место определяется с помощью координат, время — с помощью часов. Системы координат, в которых движение тел, не находящихся под действием внешних сил, происходит с постоянной скоростью, называются инерциальными. Если две системы координат движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно и одна из них является инерциальной, то и другая является инерциальной. Если тело покоится в одной инерциальной системе координат, то оно может двигаться в другой инерциальной системе, вместе с тем двигаться с иной скоростью в третьей. Но ни в одной инерциальной системе тело не будет двигаться с ускорением.

Принцип относительности заключается в том, что уравнение, описывающее некоторый закон природы, будучи выражено через координаты и время в различных инерциальных системах, имеет один и тот же вид.

В теории поля предполагается, что возмущение поля в некоторой точке распространяется с конечной скоростью. *Максимальная скорость распространения возмущения во всех инерциальных системах одинакова и равна скорости света в вакууме.*

Принцип относительности Эйнштейна объединяет принцип относительности с конечностью скорости распространения возмущения. Из этого принципа следует относительность одновременности событий.

Указание места и времени совершения события имеет смысл, когда даны численные значения координат места и времени, как ре-

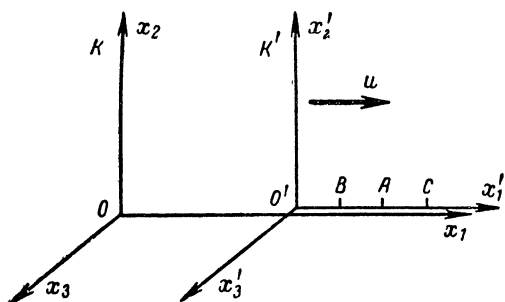


Рис. Д-12. Перемещение системы координат K' в положительном направлении оси x_1 со скоростью u .

зультат вполне определенных и принципиально выполнимых измерений, которые осуществляются с помощью обычных координатных масштабов и часов. Часы расставляются в исследуемые точки и в начало координат и регулируются следующим образом: из начала координат посылается сигнал к регулируемым часам, находящимся на расстоянии r от начала координат. Наблюдатель, находящийся у этих часов, ставит время $t - \frac{r}{c}$ в момент получения светового сигнала

(c — скорость света). При этих условиях два события, происходящие в разных точках системы, считаются одновременными, если находящиеся в этих точках часы показывают для этих событий одинаковое время. Однако в другой системе эти события будут неодновременными.

Рассмотрим системы координат K и K' , движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью u (рис. Д-12), причем система K' движется относительно системы K вправо, вдоль оси x_1 . Пусть из некоторой точки A на оси x'_1 системы K' посылаются сигналы со скоростью c в двух взаимно противоположных направлениях. В равноудаленные от точки A точки B и C системы K' сигналы приходят одновременно. Однако события эти (приход сигнала в точку B и в точку C) с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе K , не будут одновременными, так как согласно принципу относительности скорость сигнала в системе K будет также равна c , но точка B при движении системы K' движется навстречу сигналу, а точка C — в том же направлении, что и сигнал. Вследствие этого в точку B сигнал приходит раньше, чем в точку C .

Событие определяется тремя координатами и временем, поэтому удобно пользоваться понятием «четырёхмерное пространство», в котором три измерения — пространственные, а четвертое — время. Всякое событие изображается точкой, определяемой координатами x_1, x_2, x_3, t в системе K и x'_1, x'_2, x'_3, t' в системе K' . Пусть одно событие состоит в том, что из точки с координатами $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ в системе K в момент t_1 посылается сигнал со скоростью света, а второе событие в том, что сигнал приходит в точку с координатами $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$ в момент t_2 . Пройденное сигналом расстояние Δl определяется выражением

$$\Delta l^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2,$$

где Δx_i — разность координат.

Вместе с тем

$$\Delta l^2 = c^2 \Delta t^2.$$

Из этих выражений следует:

$$\sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 - c^2 \Delta t^2 = 0.$$

Так как скорость света в обеих системах одинакова, то в системе K'

$$\sum_{i=1}^3 \Delta x_i'^2 - c^2 \Delta t'^2 = 0.$$

Аналогично трехмерному евклидову пространству (см. § Д-2), величину, определяемую соотношением

$$\Delta s^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 - c^2 \Delta t^2,$$

называют интервалом между двумя событиями — интервалом четырехмерного пространства. Если два события бесконечно близки друг к другу, то для системы K

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 - c^2 dt^2; \quad (\text{Д-4-1})$$

аналогично в системе K' :

$$ds'^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i'^2 - c^2 dt'^2. \quad (\text{Д-4-1a})$$

Интервал является инвариантом, так как при переходе от системы K к K' определяющая его разность остается равной нулю. Однако если речь идет не об отправлении и получении сигнала, а о других событиях, эта разность, представляющая инвариант, может быть и не равна нулю.

Полагая $x_4 = jct$, выражение (Д-4-1) можно представить в таком виде:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^4 dx_i^2. \quad (\text{Д-4-2})$$

Заметим, что последнее равенство по своей структуре аналогично выражению (Д-2-1).

Если событие в четырехмерном пространстве характеризуется координатами x_i ($i=1, 2, 3, 4$), то величину Δs^2 можно считать квадратом расстояния между точками $x_i^{(1)}$ и $x_i^{(2)}$, ds^2 — квадратом элемента длины.

Только в евклидовой геометрии интервал равен сумме квадратов разностей координат и поэтому интервал ds^2 (Д-4-2) можно рассматривать как инвариант четырехмерной евклидовой геометрии.

Рассмотрим теперь две системы, движущиеся друг относительно друга со скоростью u так, что ось x_1 все время совпадает с осью x'_1 и в начальный момент $t=0$ начало координат одной системы совпадает с началом координат другой (рис. Д-12). С точки зрения классической механики время события абсолютно (от системы координат не зависит) и связь между координатами в системе K и K' определяется выражениями:

$$x_1 = x'_1 + ut; \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3; \quad t = t', \quad (\text{Д-4-3})$$

которые называются преобразованиями Галилея.

Согласно теории относительности эти преобразования можно заменить новыми, линейными преобразованиями, основанными на инвариантности скорости света, не предполагающими время абсолютным и не выделяющими одну инерциальную систему относительно другой

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= a(x_1 - ut); \\ x'_2 &= x_2; \\ x'_3 &= x_3; \\ t' &= bt + gx_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-4-4})$$

Найдем коэффициенты преобразования a , b и g . Пусть из начала координат системы K распространяется возмущение поля с одинаковой во всех направлениях скоростью c . Если в момент $t=0$ начала координат систем K и K' совпадают, то распространение фронта возмущения в системе K можно записать в виде

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 t^2, \quad (\text{Д-4-5})$$

а в системе K' — в виде

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = c^2 t'^2. \quad (\text{Д-4-6})$$

Подставляя выражения (Д-4-4) в (Д-4-6) и группируя подобные члены, получаем:

$$\begin{aligned} (c^2 b^2 - u^2 a^2) t^2 &= (a^2 - c^2 g^2) x_1^2 + x_2^2 + \\ &+ x_3^2 - 2(ua^2 + c^2 bg) x_1 t. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с уравнением (Д-4-5), имеем:

$$c^2 b^2 - u a^2 = c^2;$$

$$a^2 - c^2 g = 1;$$

$$a^2 u^2 + c^2 b g = 0.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} a = b &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \\ d &= \frac{1 - b^2}{ub} = -\frac{bu}{c^2}. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя последние равенства в уравнения системы (Д-4-4), получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \\ x_2' &= x_2; \\ x_3' &= x_3; \\ t' &= \frac{t - \frac{u}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-4-7})$$

Выражения (Д-4-7) называются преобразованиями Лоренца.

Решая их относительно x_1 , x_2 , x_3 и t , получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x_1' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \\ x_2 &= x_2'; \\ x_3 &= x_3'; \\ t &= \frac{t' + \frac{u}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-4-7a})$$

Выражения (Д-4-7a) можно получить из (Д-4-7) и путем изменения знака относительной скорости, так как при этом предполагается, что система K движется относительно K' со скоростью $-u$.

При $u > c$ координаты x_1 и t становятся мнимыми. Следовательно, движение со скоростью больше скорости света невозможно.

Преобразования Лоренца (Д-4-7) отличаются от преобразований Галилея (Д-4-3) следующим. Последние вытекают из постулата «дальнодействия», т. е. мгновенного распространения возмущений; при этом правые части выражений (Д-4-5) и (Д-4-6) всегда обращаются в бесконечность. Преобразования же Лоренца вытекают из постулата «близкодействия», т. е. конечной скорости распространения возмущений; при этом условии упомянутые два выражения однозначно определяют фронт возмущения. Действительно, если в уравнения (Д-4-7) подставить $c = \infty$, то они перейдут в преобразования Галилея (Д-4-3). То же получается и при «медленном» движении, т. е. когда $u \ll c$.

Изменение длины. Пусть в системе K покоится стержень, параллельный оси x_1 . Длина его, измеренная в этой системе,

$$\Delta x_1 = x_1^{(2)} - x_1^{(1)}, \quad (\text{Д-4-8})$$

где $x_1^{(2)}$ и $x_1^{(1)}$ — координаты концов стержня, измеренные в системе K . Длина стержня, наблюдаемая в момент t' в системе K' , движущейся относительно системы K , определяется выражением

$$\Delta x_1' = x_1^{(2)'} - x_1^{(1)'}, \quad (\text{Д-4-8a})$$

где $x_1^{(2)'}$ и $x_1^{(1)'}$ — координаты концов стержня в системе K' . Подставляя их значения из (Д-4-7) в выражение (Д-4-8a), получаем:

$$\Delta x_1' = \Delta x_1 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (\text{Д-4-9})$$

т. е. длина стержня, движущегося относительно наблюдателя со скоростью u , уменьшается в $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ раз. Этот эффект называется **Лоренцовым сокращением длины**.

«Собственной длиной» стержня называется его длина в той системе отсчета, в которой он покоится; из выражения (Д-4-9) видно, что это наибольшая длина.

Поперечные размеры тела при его движении не меняются и объем тела при его движении, следовательно, сокращается до величины, определяемой по формуле

$$V = V_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (\text{Д-4-10})$$

где V_0 — «собственный объем» тела.

Изменение времени. Пусть в системе K' покоятся часы. Рассмотрим два события, происшедших в одном и том же месте x_1' , x_2' , x_3' этой системы. Время, прошедшее в системе K' между этими событиями, $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Найдем время Δt , которое прошло между этими событиями в системе K , относительно которой движется система K' . Согласно последнему выражению преобразования (Д-4-7a) находим:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{u}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{u}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Вычитая t_1 из t_2 , получаем:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (\text{Д-4-11})$$

Таким образом, с точки зрения наблюдателя, расположенного в системе K , ход часов, находящихся в движущейся системе K' , оказывается замедленным в $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ раз. Кроме того, часы, размещенные в различных точках системы K' и наблюдаемые из системы K , будут показывать разное время в зависимости от их положения. Чем дальше по оси x'_1 от начала координат расположены часы, тем более

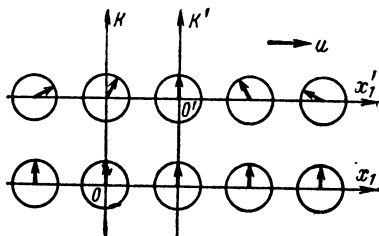


Рис. Д-13. Показания часов в движущейся системе K' и неподвижной K с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе K .

отстают их показания с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе K (рис. Д-13).

Вместе с тем ход часов, находящихся в системе K , можно рассматривать с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе K' . Тогда согласно последнему выражению преобразования (Д-4-7)

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

т. е. часы, находящиеся на положительной половине оси x_1 , опережают часы, помещенные в начале координат. Временной интервал

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (\text{Д-4-11a})$$

Следовательно, с точки зрения наблюдателя системы K' , часы в системе K оказываются также замедленными.

Время, которое показывают часы, движущиеся вместе с рассматриваемым телом, называется «собственным временем».

Сложение скоростей. Пусть система K' движется относительно системы K со скоростью u . Тогда с учетом выражений (Д-4-7а), получим:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx'_1 + u dt}{dt + \frac{u}{c^2} dx'_1} = \frac{v'_1 + u}{1 + \frac{v'_1 u}{c^2}}; \\ v_2 &= \frac{dx_2}{dt} = \frac{v'_2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_1 u}{c^2}}; \\ v_3 &= \frac{dx_3}{dt} = \frac{v'_3 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_1 u}{c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-4-12})$$

Формулы эти представляют закон сложения скоростей в теории относительности. В частном случае движения тела параллельно оси x_1 :

$$v_2 = v_3 = 0 \text{ и } v_1 = v.$$

При этом $v'_2 = v'_3 = 0$, $v' = v_1$ и, следовательно:

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{v' u}{c^2}}. \quad (\text{Д-4-12а})$$

Согласно этой формуле две скорости, меньшие или равные скорости света, дают при сложении скорость, не превышающую скорость света.

Радиус-вектор в четырехмерном пространстве (4-радиус-вектор, проведенный из начала координат) — совокупность четырех величин x_i , которые при повороте системы координат преобразуются аналогично (Д-2-8) по формулам:

$$\begin{aligned} x'_i &= \alpha_{ik} x_k; \\ x_k &= \alpha_{ki} x'_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

При преобразовании Лоренца согласно выражениям (Д-4-7) матрица преобразования имеет вид:

$$||\alpha_{ik}|| = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{ju/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-ju/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{array} \right\|. \quad (\text{Д-4-13})$$

Для обратного преобразования

$$x_k = \alpha_{ki} x'_i$$

матрица преобразования согласно выражениям (Д-4-7а) приобретает вид:

$$\|\alpha_{ki}\| = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{-ju/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{ju/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{array} \right\| \quad (\text{Д-4-13a})$$

и 4-радиус-вектор преобразуется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 - j(u/c)x'_4}{\sqrt{1-u^2/c^2}}; & x_2 &= x'_2; \\ x_3 &= x'_3; & x_4 &= \frac{x'_4 + j(u/c)x'_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-4-14})$$

Вектор в четырехмерном пространстве (4-вектор) — совокупность четырех величин A_i , преобразующихся при повороте координат аналогично (Д-2-7а) по формуле

$$A_k = \alpha_{ki} A'_i.$$

При преобразовании Лоренца согласно (Д-4-13а)

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{A'_1 - j(u/c)A'_4}{\sqrt{1-u^2/c^2}}; & A_2 &= A'_2; \\ A_3 &= A'_3; & A_4 &= \frac{A'_4 + j(u/c)A'_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-4-15})$$

Можно показать, что квадраты 4-векторов и их скалярные произведения инвариантны, т. е.

$$A_i^2 = A'^2_i, \quad A_i B_i = A'_i B'_i. \quad (\text{Д-4-16})$$

Тензор второго ранга в четырехмерном пространстве (4-тензор) — совокупность шестнадцати величин, преобразующихся при повороте системы координат согласно выражению (Д-2-9)

$$T'_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} T_{lm}.$$

При последовательном выполнении двух преобразований Лоренца соответствующие матрицы перемножаются по обычному правилу умножения матриц (Д-1-4). С учетом (Д-4-13а), получаем:

$$T_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{mk} T'_{lm},$$

или

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{T'_{11} - j \frac{u}{c} (T'_{14} + T'_{41}) - \left(\frac{u^2}{c^2}\right) T'_{44}}{1 - u^2/c^2} & \frac{T'_{12} - j \left(\frac{u}{c}\right) T'_{42}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ \frac{T'_{21} - j \frac{u}{c} T'_{24}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & T'_{22} \\ \frac{T'_{31} - j \frac{u}{c} T'_{34}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & T'_{32} \\ \frac{T'_{41} - j \frac{u}{c} (T'_{11} + T'_{44}) + \left(\frac{u^2}{c^2}\right) T'_{14}}{1 - u^2/c^2} & \frac{T'_{42} + j \left(\frac{u}{c}\right) T'_{12}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{pmatrix}$$

При обратном преобразовании величина u заменяется на $-u$.

Четырехмерный градиент — 4-вектор, проекции которого на оси координат имеют вид:

$$\text{Grad}_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{Д-4-18})$$

где φ — скалярная функция четырех переменных $\varphi = \varphi(x_i)$, ($i = 1, 2, 3, 4$).

Формально четырехмерный градиент можно представить как произведение четырехмерного векторного пространственно-временного оператора

$$\square_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{Д-4-19})$$

аналогичного оператору Гамильтона (Д-3-10) в трехмерном пространстве, на скаляр φ .

Четырехмерная дивергенция — аналогично (Д-3-12) — скалярное произведение четырехмерного оператора (Д-4-19) на 4-вектор \mathbf{A}_i .

$$\text{Div } \mathbf{A} = \square_i A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4}. \quad (\text{Д-4-20})$$

Приняв в этой формуле в качестве вектора \mathbf{A} четырехмерный градиент (Д-4-18), получим дифференциальное выражение

$$\square^2 \varphi,$$

где оператор

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \quad (\text{Д-4-21})$$

называется оператором Даламбера; он аналогичен оператору Лапласа в трехмерном пространстве (Д-3-15).

$$\begin{array}{cc}
 \frac{T'_{13} - j\left(\frac{u}{c}\right) T'_{43}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & \frac{T'_{14} - j\left(\frac{u}{c}\right) (T'_{44} - T'_{11}) + \left(\frac{u^2}{c^2}\right) T'_{41}}{1 - u^2/c^2} \\
 T'_{23} & \frac{T'_{24} + j\frac{u}{c} T'_{21}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\
 T'_{33} & \frac{T'_{34} + j\frac{u}{c} T'_{31}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\
 \frac{T'_{43} + j\left(\frac{u}{c}\right) T'_{13}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & \frac{T'_{44} + j\frac{u}{c} (T'_{14} + T'_{41}) - \left(\frac{u^2}{c^2}\right) T'_{11}}{1 - u^2/c^2}
 \end{array} \quad (D-4-17)$$

Четырехмерный ротор — антисимметричный 4-тензор второго ранга

$$\text{Rot}_{ik} \mathbf{A} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \quad (D-4-22)$$

Его пространственные компоненты ($i, k=1, 2, 3$) совпадают с компонентами $\text{rot } \mathbf{A}$ в трехмерном пространстве [см. формулу (D-3-13)].

Из выражения (D-4-22) следует:

$$\text{Rot}_{ii} \mathbf{A} = 0; \text{Rot}_{ik} \mathbf{A} = -\text{Rot}_{ki} \mathbf{A}. \quad (D-4-23)$$

Д-5. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Величина $z = x + jy$ называется *комплексной переменной*, если x и y , называемые соответственно вещественной и мнимой ее частью, являются независимыми вещественными переменными. Вещественная и мнимая части обозначаются соответственно $\text{Re } z$ и $\text{Im } z$.

Комплексное число можно представить графически точкой M с координатами x, y на плоскости xOy . Эту точку называют также изображением комплексного числа (рис. Д-14). Плоскость xOy называется плоскостью независимого комплексного переменного, так как каждой точке этой плоскости соответствует комплексное переменное z .

Из рис. Д-14 видно, что комплексное число $z = x + jy$ можно представить в виде

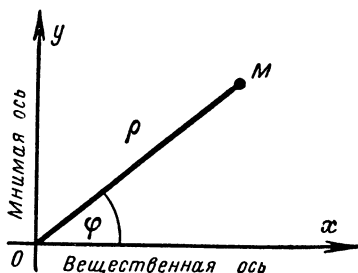


Рис. Д-14. Плоскость комплексного переменного.

$$z = \rho \cos \varphi + j \rho \sin \varphi = \rho (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Согласно формуле Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi. \quad (\text{Д-5-1})$$

Поэтому комплексное число z можно записать также в следующем виде:

$$z = \rho e^{j\varphi},$$

где $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль числа z ,
а $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$ — аргумент числа z .

Если φ заменить на $-\varphi$, то формула Эйлера (Д-5-1) примет вид:

$$e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi. \quad (\text{Д-5-1a})$$

Складывая и вычитая выражения (Д-5-1) и (Д-5-1a), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}; \\ \sin \varphi &= \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-5-2})$$

Согласно выражениям (Д-5-1) и (Д-5-1a)

$$e^{\pm j2\pi} = 1; \quad e^{\pm j\pi} = -1; \quad e^{\pm j\pi/2} = \pm j; \quad e^{\pm j\pi/4} = \frac{1 \pm j}{\sqrt{2}}. \quad (\text{Д-5-3})$$

Тригонометрические функции связаны с гиперболическими функциями

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \varphi &= \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}; \\ \operatorname{sh} \varphi &= \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-5-4})$$

следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \sin j \varphi &= j \operatorname{sh} \varphi; \quad \cos j \varphi = \operatorname{ch} \varphi; \\ \sin \varphi &= -j \operatorname{sh} j \varphi; \quad \cos \varphi = \operatorname{ch} j \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-5-5})$$

$$\left. \begin{aligned} \sin [(\beta - j \alpha) x] &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha x - \cos^2 \beta x} e^{-j\psi}; \\ \psi &= \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{ctg} \beta x \operatorname{th} \alpha x; \\ \cos [(\beta - j \alpha) x] &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha x - \sin^2 \beta x} e^{-j\psi}; \\ \psi &= \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{tg} \beta x \operatorname{th} \alpha x; \\ \operatorname{sh} [(\beta - j \alpha) x] &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 \beta x - \cos^2 \alpha x} e^{-j\psi}; \\ \psi &= \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{cth} \beta x \operatorname{tg} \alpha x; \\ \operatorname{ch} [(\beta - j \alpha) x] &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 \beta x - \sin^2 \alpha x} e^{-j\psi}; \\ \psi &= \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{th} \beta x \operatorname{tg} \alpha x. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-5-6})$$

Все вычисления с комплексными числами производятся по обычным правилам алгебры.

Комплексные числа $z = x + jy$ и $z^* = x - jy$ называют сопряженными.

Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел есть вещественные числа:

$$z + z^* = 2x;$$

$$zz^* = x^2 + y^2.$$

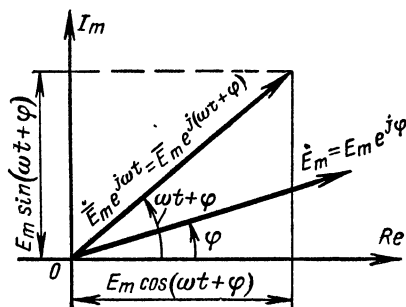


Рис. Д-15. К символическому методу.

Дифференцирование комплексного числа $z = \rho e^{j\varphi}$ по аргументу соответствует умножению на j или повороту отрезка OM на угол $\pi/2$ (рис. Д-14), т. е.

$$\frac{dz}{d\varphi} = j \rho e^{j\varphi} = \rho e^{j(\varphi + \pi/2)}. \quad (\text{Д-5-7})$$

Интегрирование по аргументу соответствует умножению на $-j$ или повороту отрезка OM на угол $-\pi/2$, т. е.

$$\int z d\varphi = -j \rho e^{j\varphi} = \rho e^{j(\varphi - \pi/2)}. \quad (\text{Д-5-8})$$

При изучении электромагнитных линейных процессов, изменяющихся во времени по гармоническому закону (по закону синуса или косинуса), описывающие эти процессы уравнения, а следовательно, и их решения значительно упрощаются при использовании символического метода. Сущность его заключается в следующем. Пусть некоторая электрическая величина (напряженность электромагнитного поля, напряжение или ток) изменяется по закону синуса или косинуса

$$A = A_m \sin(\omega t + \varphi); \quad (\text{Д-5-9})$$

$$A = A_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (\text{Д-5-10})$$

Введем вектор, имеющий длину A_m и вращающийся с угловой скоростью ω около начала координат O (рис. Д-15). В момент $t=0$ этот вектор образует с вещественной осью угол φ , а в момент $t \neq 0$ — угол $(\omega t + \varphi)$. Проекция вектора на вещественную ось определяет

мгновенное значение величины (Д-5-10), а проекция на мнимую ось — мгновенное значение величины (Д-5-9).

Таким образом, процесс, определяемый выражениями (Д-5-10) или (Д-5-9), можно характеризовать комплексной величиной

$$\dot{A} = A_m [\cos (\omega t + \varphi) + j \sin (\omega t + \varphi)] = A_m e^{j(\omega t + \varphi)},$$

или

$$\dot{A} = \dot{A}_m e^{j\omega t}, \quad (\text{Д-5-11})$$

где $\dot{A}_m = A_m e^{j\varphi}$ — комплексная амплитуда.

Косинусоидальный закон изменения электрического процесса соответствует действительной части величины \dot{A} , т. е.

$$A_m \cos (\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} \dot{A},$$

а синусоидальный — мнимой части \dot{A} , т. е.

$$A_m \sin (\omega t + \varphi) = \operatorname{Im} \dot{A}.$$

Линейные дифференциальные уравнения, переписанные в символической (комплексной) форме, имеют более простой вид, так как в этом случае

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= j\omega; \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= -\omega^2, \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-5-7a})$$

а интегрирование по времени соответствует делению на $j\omega$

$$\int \dot{A} dt = \int \dot{A}_m e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \dot{A}. \quad (\text{Д-5-8a})$$

Если комплексная величина удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению, то этому уравнению удовлетворяют его вещественная и мнимая части. Решив уравнения в комплексной форме и взяв от полученного результата действительную или мнимую части, получим искомое решение.

Множитель $e^{j\omega t}$, характеризующий изменение процесса во времени, часто опускают и тогда уравнения записываются для комплексных амплитуд. Поэтому символический метод называют также методом комплексных амплитуд.

Вместо комплексной амплитуды часто берут в $\sqrt{2}$ раза меньшую величину — комплексное действующее значение:

$$\dot{A}_d = \frac{\dot{A}_m}{\sqrt{2}}. \quad (\text{Д-5-12})$$

Символический метод пригоден во всех случаях, когда векторы напряженности поля (или ток и напряжение) связаны линейной зависимостью, однако непосредственно он не применим для вычисления энергетических характеристик (энергия, мощность, вектор Пойтинга и др.), которые определяются квадратами и произведениями значений полей, токов и напряжений.

Величины $A = A_m \cos(\omega t + \varphi_a)$ и $B = B_m \cos(\omega t + \varphi_b)$ являются вещественными частями комплексных величин:

$$\dot{A} = A_m e^{j(\omega t + \varphi_a)} = \dot{A}_m e^{j\omega t},$$

$$\dot{B} = B_m e^{j(\omega t + \varphi_b)} = \dot{B}_m e^{j\omega t}.$$

Очевидно, что $AB = \operatorname{Re} \dot{A} \operatorname{Re} \dot{B}$, но $AB \neq \operatorname{Re} (\dot{A} \dot{B})$. Однако произведение можно выразить через комплексные величины следующим образом:

$$AB = \operatorname{Re} \dot{A} \operatorname{Re} \dot{B} = \frac{\dot{A} + \dot{A}^*}{2} \cdot \frac{\dot{B} + \dot{B}^*}{2} \quad (\text{Д-5-13})$$

или представить в таком виде:

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{4} (\dot{A} \dot{B}^* + \dot{A}^* \dot{B}) + \frac{1}{4} (\dot{A} \dot{B} + \dot{A}^* \dot{B}^*) = \\ &= \frac{1}{4} (\dot{A}_m \dot{B}_m^* + \dot{A}_m^* \dot{B}_m) + \frac{1}{4} (\dot{A}_m \dot{B}_m e^{j2\omega t} + \dot{A}_m^* \dot{B}_m^* e^{-j2\omega t}). \end{aligned}$$

Здесь слагаемое

$$\frac{1}{4} (\dot{A}_m \dot{B}_m^* + \dot{A}_m^* \dot{B}_m)$$

представляет часть, постоянную во времени, а слагаемое

$$\frac{1}{4} (\dot{A}_m \dot{B}_m e^{j2\omega t} + \dot{A}_m^* \dot{B}_m^* e^{-j2\omega t})$$

— часть, изменяющуюся по закону косинуса.

Среднее за период значение $(AB)_0$, определяемое выражением

$$(AB)_0 = \frac{1}{T} \int_0^T AB \, dt,$$

равно постоянной во времени части, так как переменная часть в среднем за период равна нулю. Поэтому

$$(AB)_0 = \frac{1}{4} (\dot{A}_m \dot{B}_m^* + \dot{A}_m^* \dot{B}_m).$$

Так как

$$\begin{aligned} \dot{A}_m \dot{B}_m^* + \dot{A}_m^* \dot{B}_m &= A_m B_m [e^{j(\varphi_a - \varphi_b)} + e^{-j(\varphi_a - \varphi_b)}] = \\ &= 2A_m B_m \cos(\varphi_a - \varphi_b), \end{aligned}$$

то, следовательно,

$$(AB)_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\dot{A}_m \dot{B}_m^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\dot{A}_m^* \dot{B}_m). \quad (\text{Д-5-14})$$

Функция вида $w = w(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ называется функцией комплексной переменной, если вещественная

и мнимая части u и v есть функции независимых вещественных переменных x и y , т. е. $u = \operatorname{Re} w$ и $v = \operatorname{Im} w$.

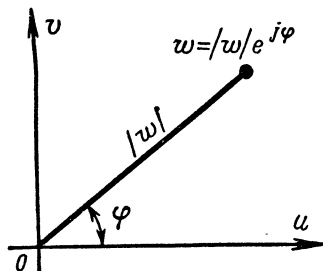
Функцию комплексной переменной можно представить в виде

$$w = |w| e^{j\varphi},$$

где

$$|w| = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}.$$

Плоскость, приведенная на рис. Д-16, называется плоскостью комплексной функции w , так как каждой точке этой плоскости соответствует комплексная функция w .



Уравнение $w = w(z)$ устанавливает функциональную зависимость между комплексными переменными в том смысле, что каждой точке на плоскости z соответствует точка на плоскости w (отображение плоскости z на плоскости w).

Под производной функции комплексного переменного понимается предел

Рис. Д-16. Плоскость комплексной функции.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z} = w'(z),$$

не зависящий от того, каким образом Δz стремится к нулю. Если $\Delta z \rightarrow 0$ по действительной оси ($\Delta z = \Delta x$), то

$$w'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w(z + \Delta x) - w(z)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (\text{Д-5-15})$$

а если по мнимой оси ($\Delta z = j \Delta y$), то

$$w'(z) = -j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}; \quad (\text{Д-5-15a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = -j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (\text{Д-5-16})$$

Последние два выражения называются уравнениями или условиями Коши — Римана. Функции, удовлетворяющие этим условиям, называются аналитическими. Если первое уравнение Коши — Римана продифференцировать по x , а второе — по y и полученные равенства сложить, получим уравнение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{Д-5-17})$$

Аналогично, дифференцируя первое уравнение по y , а второе по x , получим:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{Д-5-18})$$

Таким образом, мнимая и действительная части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа (Д-3-40) и являются гармоническими функциями. Зная гармоническую функцию u , можно с точностью до постоянной определить гармоническую функцию v из условий (Д-5-16), т. е.

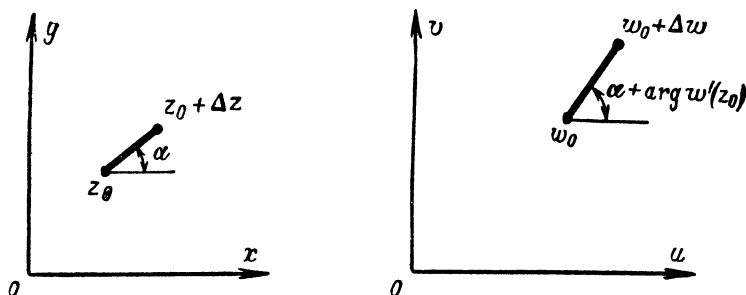


Рис. Д-17. Отображение двух близлежащих точек.

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \psi(x),$$

где

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

Аналогично, по v можно определить u .

Рассмотрим отображение двух близлежащих точек (рис. Д-17) с помощью аналитической функции $w(z)$. Пусть точка z_0 отображается в точку w_0 , а точка $z_0 + \Delta z$ — в точку $w_0 + \Delta w$.

Если Δz мало, то приближенно

$$\Delta w \approx w'(z_0) \Delta z,$$

т. е. производная $w'(z_0)$ показывает, на какой угол следует повернуть и как изменить элемент длины при отображении его с одной плоскости на другую (рис. Д-17). При этом аргумент $w'(z_0)$ определяет поворот, а модуль $w'(z_0)$ — изменение длины.

Если точку пересечения двух кривых взять за исходную и рассматривать отображение элементов длины каждой из кривых, то можно увидеть, что они изменяются и поворачиваются одинаковым образом, определяемым производной $w'(z_0)$ (рис. Д-18). Это верно для всех точек плоскости, в которых $w'(z) \neq 0$. Таким образом, при отображении малых элементов кривых имеет место полное подобие, т. е. заданные на одной плоскости пересекающиеся кривые должны пересекаться на другой плоскости под таким же углом, а элементы

длины при переходе к другой плоскости должны увеличиваться или уменьшаться в одном и том же отношении. Такое отображение плоскости z на плоскость w называется **конформным** (подобным).

Конформные отображения используются при отыскании силовых и эквипотенциальных линий электростатического и магнитостатического плоских полей. Решение может быть найдено путем использования такого преобразования, которое сводило бы данную задачу к более простой, решение для которой известно.

Примеры конформных отображений приведены в табл. Д-2.

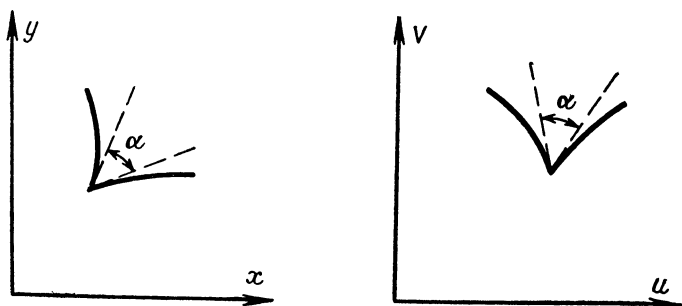


Рис. Д-18. Конформное отображение.

Д-6. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Электромагнитные процессы в средах описываются векторными неоднородными уравнениями в частных производных вида

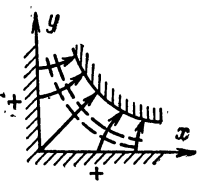
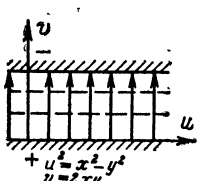
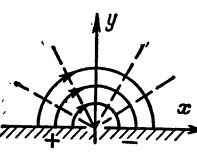
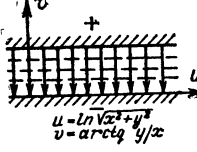
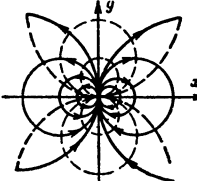
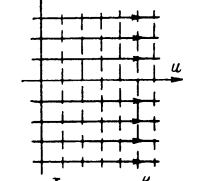
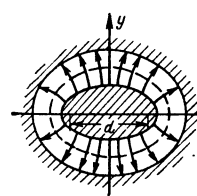
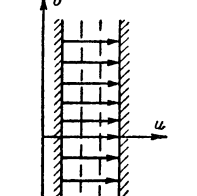
$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\bar{\chi},$$

называемыми **неоднородными волновыми уравнениями Даламбера**.

При решении векторные уравнения необходимо свести к независимым скалярным уравнениям для проекций векторов на координатные оси. Однако только в декартовой системе координат скалярное уравнение для каждой проекции будет иметь такой же вид, как и векторное. В криволинейной системе координат в проекцию лапласиана вектора на криволинейную ось будут входить проекции вектора как на данную, так и на другие оси. Исключение составляет цилиндрическая система, в которой согласно выражению (Д-3-53а) для z -компоненты можно написать скалярное уравнение, совпадающее с векторным и не содержащее других проекций вектора. В сферической системе координат согласно (Д-3-57а) такое разделение невозможно ни для одной компоненты. Однако структура электромагнитного поля такова, что векторы напряженности электромагнитного поля можно выразить через вспомогательные функции F , удовлетворяющие скалярным волновым уравнениям вида

$$\Delta F - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\chi. \quad (\text{Д-6-1})$$

Примеры конформных отображений

Плоскость z	Преобразование	Плоскость w
	$w = z^2$	
	$w = \ln z$	
	$w = \frac{1}{z}$	
	$w = A \operatorname{arch} \frac{z}{d}$	

Силловые линии —————

Эквипотенциальные линии - - - - -

В частности, уравнение вида (Д-6-1) описывает электромагнитное поле, создаваемое источником (током или зарядом), характеризуемым величиной χ . Решение этого уравнения равно сумме общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений.

Если пространство вокруг одного источника, сосредоточенного в малом объеме радиуса r_0 , изотропно, то решение уравнения (Д-6-1) следует искать как сферическо-симметричное, т. е. $F=F(r)$. Тогда для всех точек вне источника ($\chi=0$ при $r>r_0$) уравнение (Д-6-1) переходит в однородное волновое уравнение

$$\Delta F - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 F}{dt^2} = 0 \quad (\text{Д-6-2})$$

или с учетом (Д-3-57)

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 F}{dt^2} = 0. \quad (\text{Д-6-2a})$$

Решением этого уравнения является выражение

$$F(r, t) = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} + \frac{f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r}, \quad (\text{Д-6-3})$$

в котором функции f_1 и f_2 произвольны. Чтобы определить их явный вид, необходимо знать граничные и начальные условия. Первая функция $f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$, называемая запаздывающей, представляет собой сферическую волну, распространяющуюся от источника со скоростью v . Действительно, функция $f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$ в каждый данный момент t на данном расстоянии r от источника имеет то же значение, которое она имела в момент $(t-1)$ на расстоянии $(r-v)$, т. е. значение величины $f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$ распространяется от источника поля в виде сферической волны со скоростью v . Подобным образом можно убедиться, что и функция $f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$, называемая опережающей, представляет собой сферическую волну, сходящуюся из бесконечности к источнику с той же скоростью v (рис. Д-19).

В случае точечного источника или в случае, когда все источники расположены в области $r < r_0$, волны, сходящиеся к этой области, не имеют физического смысла и мы должны положить $f_2=0$, вследствие чего решением (Д-6-2) будет:

$$F(r, t) = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \quad (\text{при } r > r_0). \quad (\text{Д-6-4})$$

При $r=r_0$ функция (Д-6-4) вместе со своими производными должна плавно переходить в решение неоднородного уравнения с правой частью (Д-6-1). Для предельного случая точечного источника ($r_0 \rightarrow 0$) решение имеет вид:

$$F(r, t) = \frac{\chi \left(t - \frac{r}{v} \right)}{4\pi r} dV.$$

Учитывая принцип суперпозиции действия отдельных объемов источников, получаем:

$$F(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\chi \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r} dV. \quad (\text{Д-6-5})$$

В случае малости величины d^2F/dt^2 по сравнению с другими членами, уравнение Даламбера переходит в уравнение Пуассона

$$\Delta F = -\chi(t). \quad (\text{Д-6-6})$$

Решение этого уравнения получим из (Д-6-5), пренебрегая запаздыванием, т. е.

$$F(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\chi(t)}{r} dV. \quad (\text{Д-6-7})$$

Если F и χ не зависят от времени, то решение уравнения Пуассона имеет вид:

$$F(r) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\chi}{r} dV. \quad (\text{Д-6-7a})$$

При $\chi=0$ уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta F = 0. \quad (\text{Д-6-8})$$

В частном случае монохроматического поля функцию $\dot{F}(r, t)$, соответствующую напряженностям или электромагнитным потенциалам, согласно (Д-5-11) можно представить в символическом виде

$$\dot{F}(r, t) = F_m(r) e^{i\omega t},$$

а функцию $\chi(t)$, соответствующую плотности тока или заряда, в виде

$$\dot{\chi}(t) = \chi_m e^{i\omega t}.$$

При этом уравнение (Д-6-1) с учетом (Д-5-7a), будет иметь вид:

$$\Delta \dot{F} + k^2 \dot{F} = \dot{\chi}, \quad (\text{Д-6-9})$$

где $k = \omega/v$.

Решение этого уравнения, соответствующее решению (Д-6-5), имеет вид:

$$\dot{F}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\chi_m e^{i\omega \left(t - \frac{r}{v} \right)}}{r} dV. \quad (\text{Д-6-10})$$

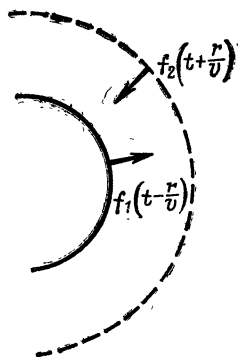


Рис. Д-19. Сферические волны (к решению уравнения Даламбера).

При $\chi=0$ уравнение (Д-6-9) переходит в однородное волновое уравнение, называемое уравнением Гельмгольца.

$$\Delta \dot{F} + k^2 \dot{F} = 0. \quad (\text{Д-6-11})$$

Это уравнение и уравнение Лапласа (Д-6-8) при решении задач электромагнитного поля в каждом конкретном случае записываются в той системе координат q_1, q_2, q_3 , в которой граничные поверхности совпадают с координатными поверхностями. При этом согласно методу Фурье частные решения этих уравнений представляются в виде произведения трех функций, каждая из которых является функцией только одной переменной, т. е.

$$\dot{\Phi} = \xi(q_1)\eta(q_2)\zeta(q_3). \quad (\text{Д-6-12})$$

Для каждой из этих трех функций получаются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, решение которых зависит от некоторого параметра и содержит произвольную постоянную. Варьируя параметр и постоянную, можно удовлетворить граничным условиям, но часто это не удается и приходится представлять решение в виде суммы частных решений вида (Д-6-12).

В прямоугольной системе координат уравнение Гельмгольца имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial x_3^2} + k^2 \dot{F} = 0. \quad (\text{Д-6-13})$$

Частное решение этого уравнения на основании (Д-6-12) представим в виде

$$\dot{\Phi} = X_1(x_1) X_2(x_2) X_3(x_3). \quad (\text{Д-6-12a})$$

Подставив (Д-6-12a) в (Д-6-13) и разделив полученное равенство на $X_1 X_2 X_3$, получим:

$$\frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{dx_1^2} + \frac{1}{X_2} \frac{d^2 X_2}{dx_2^2} + \frac{1}{X_3} \frac{d^2 X_3}{dx_3^2} = -k^2. \quad (\text{Д-6-14})$$

Это равенство возможно, если каждое из слагаемых представляет собой постоянную величину. Таким образом, уравнение (Д-6-14) распадается на три обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{dx_1^2} &= -k_1^2; & \frac{1}{X_2} \frac{d^2 X_2}{dx_2^2} &= -k_2^2, \\ \frac{1}{X_3} \frac{d^2 X_3}{dx_3^2} &= -k_3^2, \end{aligned} \quad (\text{Д-6-15})$$

где k_1, k_2 и k_3 связаны соотношением

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2. \quad (\text{Д-6-16})$$

Решения уравнений (Д-6-15) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= A_1 \cos k_1 x_1 + A_2 \sin k_1 x_1; \\ X_2 &= B_1 \cos k_2 x_2 + B_2 \sin k_2 x_2; \\ X_3 &= C_1 \cos k_3 x_3 + C_2 \sin k_3 x_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-17})$$

Таким образом, частные решения уравнений Гельмгольца в прямоугольной системе координат представляются в виде произведения тригонометрических синусов и косинусов.

Если поле, описываемое уравнением (Д-6-13), представляет волны, бегущие в направлении оси (например, x_3), то решение соответствующего дифференциального уравнения

$$\frac{1}{X_3} \frac{d^2 X_3}{dx_3^2} = -k_3^2,$$

представится в виде суммы экспоненциальных функций

$$X_3 = C_1 e^{-jk_3 x_3} + C_2 e^{jk_3 x_3}. \quad (\text{Д-6-18})$$

Если поле зависит только от одной из координат x_i , в направлении которой оно распространяется, и не зависит от других двух координат (так называемая плоская волна), то уравнение (Д-6-13) упрощается и принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial x_i^2} + k^2 \dot{F} = 0. \quad (\text{Д-6-19})$$

Частное решение этого уравнения представляется в виде суммы двух экспоненциальных функций

$$\dot{\varphi} = A_1 e^{-jkx_i} + A_2 e^{jkx_i}. \quad (\text{Д-6-19a})$$

Если плоская волна распространяется в произвольном направлении \mathbf{r} , не совпадающем ни с одной из осей координат x_i , то частное решение (Д-6-12) имеет вид:

$$\dot{\varphi} = A_1 e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}} + A_2 e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (\text{Д-6-19б})$$

где \mathbf{k} — волновой вектор, совпадающий с направлением распространения волны, \mathbf{r} — радиус-вектор.

Уравнение Лапласа (Д-6-8) в прямоугольной системе координат формально можно получить из (Д-6-13), положив $k=0$. Очевидно, решения при этом будут иметь вид выражений (Д-6-17), в которых k_1, k_2, k_3 связаны соотношением

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0. \quad (\text{Д-6-20})$$

Из этого равенства следует, что если все его слагаемые — вещественные числа, то хотя бы одно из них является отрицательным. Предположим, что $k_1^2 > 0$ и $k_2^2 > 0$, тогда $k_3^2 < 0$, т. е. k_3 — мнимое число. В этом случае

$$k_3 = j \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = j |k_3|$$

и согласно (Д-6-17) с учетом (Д-5-5)

$$\begin{aligned} X_3 &= C_1 \cos(j |k_3| x_3) + C_2 \sin(j |k_3| x_3) = \\ &= C_1 \operatorname{ch}(|k_3| x_3) + j C_2 \operatorname{sh}(|k_3| x_3). \end{aligned} \quad (\text{Д-6-21})$$

Таким образом, частные решения уравнения Лапласа в прямоугольной системе координат представляются в виде произведения тригонометрических и гиперболических синусов и косинусов.

В цилиндрической системе координат уравнение Гельмгольца (Д-6-11) согласно (Д-3-53) имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{F}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial z^2} + k^2 \dot{F} = 0. \quad (\text{Д-6-22})$$

Частное решение этого уравнения ищем в виде

$$\dot{\Phi}(r, \alpha, z) = R(r) \Phi(\alpha) Z(z). \quad (\text{Д-6-23})$$

Подставив это выражение в (Д-6-22) и поделив на $R\Phi Z$, получим:

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0. \quad (\text{Д-6-24})$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= -K^2; \\ \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} &= -n^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-25})$$

Решение этих уравнений имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= A_1 e^{-in\alpha} + A_2 e^{in\alpha}; \\ Z &= B_1 e^{-iKz} + B_2 e^{iKz}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-26})$$

Если K и n действительные числа, то

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= A_1 \cos(n\alpha) + A_2 \sin(n\alpha); \\ Z &= B_1 \cos(Kz) + B_2 \sin(Kz). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-26a})$$

Обычно первое из этих выражений записывается в таком виде :

$$\Phi = \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} n\alpha \quad (\text{Д-6-26б})$$

Учитывая равенства (Д-6-25), из (Д-6-24) получаем дифференциальное уравнение для функции R . После выполнения дифференцирования и подстановки $x = \sqrt{k^2 - K^2}r$ оно переходит в уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) R = 0, \quad (\text{Д-6-27})$$

решение которого равно сумме цилиндрических функций

$$R = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x), \quad (\text{Д-6-28})$$

или

$$R = D_1 H_n^{(1)}(x) + D_2 H_n^{(2)}(x), \quad (\text{Д-6-29})$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка;
 $N_n(x)$ — функция Неймана n -го порядка;
 $H_n^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода n -го порядка;
 $H_n^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля второго рода n -го порядка.

Таким образом, решение (Д-6-23) имеет вид:

$$\varphi = [C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x)]_{\sin}^{\cos} n\alpha \times \\ \times [B_1 \cos(Kz) + B_2 \sin(Kz)] \quad (\text{Д-6-23a})$$

или

$$\varphi = [D_1 H_n^{(1)}(x) + D_2 H_n^{(2)}(x)]_{\sin}^{\cos} n\alpha \times \\ \times [B_1 \cos(Kz) + B_2 \sin(Kz)] . \quad (\text{Д-6-23б})$$

Уравнение Лапласа (Д-6-8) в цилиндрической системе координат можно получить из уравнения (Д-6-22), положив $k=0$. Частные решения в этом случае равны произведению функций, определяемых выражениями (Д-6-26) и (Д-6-28) или (Д-6-29). В частном случае, когда решение не зависит от z ,

$$R = C_1 r^n + C_2 r^{-n}. \quad (\text{Д-6-28a})$$

и

$$\varphi = (C_1 r^n + C_2 r^{-n})_{\sin}^{\cos} n\alpha. \quad (\text{Д-6-23в})$$

Функцию Бесселя целого порядка n можно представить в виде степенного ряда

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+1)!} \quad (\text{Д-6-30})$$

или определенного интеграла

$$J_n(x) = \frac{j^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j(x \cos \theta + n\theta)} d\theta, \quad (\text{Д-6-30a})$$

функцию Неймана — в виде

$$N_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}, \quad (\text{Д-6-31})$$

а функцию Ханкеля первого и второго рода — соответственно в виде

$$\left. \begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + jN_n(x) = \\ &= \frac{j}{\sin(n\pi)} [e^{-jn\pi} J_n(x) - J_{-n}(x)]; \\ H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - jN_n(x) = \\ &= \frac{-j}{\sin(n\pi)} [e^{jn\pi} J_n(x) - J_{-n}(x)]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-32})$$

Модифицированными бesselевыми функциями первого и второго рода называются соответственно функции

$$I_n(x) = j^{-n} J_n(jx); \quad K_n(x) = j^{n+1} \frac{\pi}{2} H_n^{(1)}(jx). \quad (\text{Д-6-32a})$$

При достаточно больших $x \gg 1$ функции $J_n(x)$ и $N_n(x)$ приближенно можно выразить через тригонометрические, а $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$ — через экспоненциальные функции:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right];$$

$$N_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (\text{Д-6-33})$$

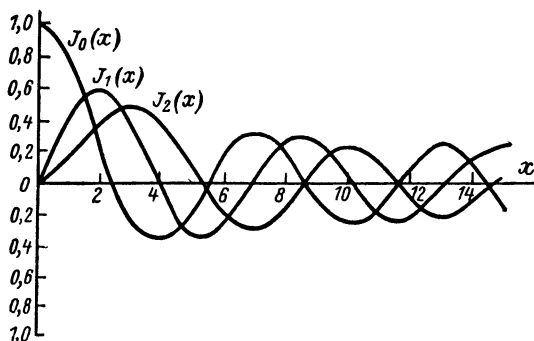


Рис. Д-20. Графики функций Бесселя.

$$H_n^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]};$$

$$H_n^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]}. \quad (\text{Д-6-33a})$$

При $x=0$

$$J_0(0)=1; J_n(0)=0 \text{ при } n \neq 0; N_n(0)=-\infty \text{ при любом } n. \quad (\text{Д-6-34})$$

Поэтому если в рассматриваемую область входит значение $x=0$, а по физическому смыслу решение должно иметь конечное значение, то функция Неймана из решения (Д-6-28) исключается. Функция Ханкеля второго рода при мнимом аргументе $x=-j\beta$ соответствует экспоненциально убывающей функции. Поэтому если при удалении от начала координат поле убывает по экспоненте, то решение (Д-6-29) содержит только функцию Ханкеля второго рода.

На рис. Д-20 и Д-21 приведены графики функции Бесселя и Неймана для различных n .

В табл. Д-3 приведены значения A_{nm} — корней уравнения

$$J_n(x) = 0,$$

а в табл. Д-4 — значения B_{nm} — корней уравнения

$$J'_n(x) = 0.$$

В обоих случаях m — номер корня.

Функции Бесселя и Неймана удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} J_{-n}(x) &= (-1)^n J_n(x); \\ N_{-n}(x) &= (-1)^n N_n(x). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-35})$$

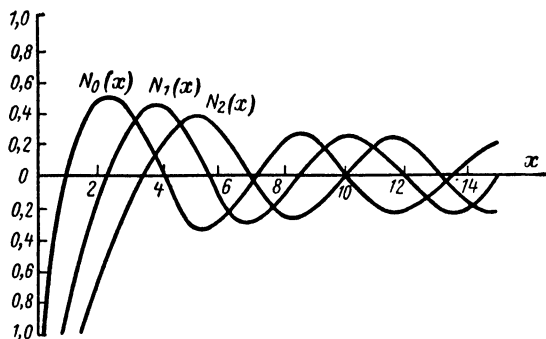


Рис. Д-21. Графики функций Неймана.

Т а б л и ц а Д-3

Корни A_{nm}

m	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	2,405	3,832	5,136	6,380
2	5,520	7,016	8,417	9,761
3	8,654	10,173	11,620	13,015
4	11,792	13,323	14,372	16,224

Т а б л и ц а Д-4

Корни B_{nm}

m	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	3,832	1,841	3,054	4,201
2	7,016	5,331	6,706	8,015
3	10,173	8,536	9,969	11,346
4	13,324	11,706	13,170	14,586

Любая цилиндрическая функция (Бесселя, Неймана или Ханкеля) удовлетворяет соотношениям

$$\left. \begin{aligned} Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} Z_n(x); \\ Z_{n-1}(x) - Z_{n+1}(x) &= 2 \frac{d}{dx} [Z_n(x)]; \\ x^{n+1} Z_{n+1}(x) &= \int x^{n+1} Z_n(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-36})$$

Экспоненциальную функцию $e^{ix \cos \theta}$ можно рассматривать как периодическую функцию θ и представить в виде ряда Фурье [см. ниже выражение (Д-7-8)]

$$e^{ix \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{in\theta},$$

где

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta} e^{-in\theta} d\theta.$$

С учетом выражений (Д-6-30а) и (Д-6-35)

$$e^{ix \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(x) e^{in\theta}. \quad (\text{Д-6-37})$$

Применив формулу Эйлера (Д-5-1) и разделив действительные и мнимые части, получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \cos \theta) &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \cos(2n\theta); \\ \sin(x \cos \theta) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n-1}(x) \cos(2n-1)\theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-38})$$

Заменив θ на $\pi/2 - \theta$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \sin \theta) &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\theta; \\ \sin(x \sin \theta) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin(2n-1)\theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-38а})$$

Также

$$\left. \begin{aligned} \cos(\alpha + x \cos \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos \left[\alpha + n \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right]; \\ \sin(\alpha + x \cos \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \sin \left[\alpha + n \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-38б})$$

Аналогично (Д-6-37) разлагаем в ряд функцию $e^{-jx \cos \theta}$:

$$\begin{aligned} e^{-jx \cos \theta} &= e^{jx \cos(\theta - \pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(x) e^{jn(\theta - \pi)} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{jn \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{Д-6-37а})$$

В сферической системе координат уравнение Гельмгольца согласно (Д-3-57) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \dot{F}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \dot{F}}{\partial \vartheta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial \alpha^2} + k^2 F = 0. \end{aligned} \quad (\text{Д-6-39})$$

Если ввести функцию

$$\varphi = r \dot{F}, \quad (\text{Д-6-40})$$

то, учитывая соотношение $\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \dot{F}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \dot{F}}{\partial r} \right)$, уравнение (Д-6-39) можно представить в таком виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right] + k^2 \varphi = 0. \quad (\text{Д-6-39а})$$

Последнее уравнение не является волновым, но оно проще решается методом разделения переменных, чем уравнение (Д-6-39). Используя метод Фурье, ищем частное решение в виде

$$\varphi = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\alpha). \quad (\text{Д-6-41})$$

После подстановки этого выражения в уравнение (Д-6-39а) и деления его на $R\Theta\Phi$ получим следующие уравнения. Для функции R

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{p^2}{r^2} \right) R = 0; \quad (\text{Д-6-42})$$

решение этого уравнения возможно только при $p^2 = n(n+1)$, где n — целое число. При подстановке $R = \sqrt{kr}\psi$ уравнение (Д-6-42) приводится к уравнению Бесселя (Д-6-27)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\psi}{dx} + \left[1 - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{x^2} \right] \psi = 0,$$

где $x = kr$. Решение этого уравнения имеет вид, аналогичный выражениям (Д-6-28) или (Д-6-29):

$$\psi = C_1 J_{n+\frac{1}{2}}(x) + C_2 N_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (\text{Д-6-43})$$

или

$$\psi = D_1 H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) + D_2 H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x). \quad (\text{Д-6-44})$$

Для функции Φ получается уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = -m^2 \Phi, \quad (\text{Д-6-45})$$

решение которого

$$\Phi(\alpha) = A_1 \cos m\alpha + A_2 \sin m\alpha = \frac{\sin}{\cos} m\alpha. \quad (\text{Д-6-46})$$

Для функции θ получается уравнение

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\theta}{d\vartheta} \right) + \left(p^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \theta = 0. \quad (\text{Д-6-47})$$

Обозначая $\cos \vartheta = x$ и учитывая, что

$$\frac{d\theta}{d\vartheta} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \frac{d\theta}{dx} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d\theta}{dx},$$

получим уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\theta}{dx} \right] + \left[p^2 - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \theta = 0$$

или

$$(1-x^2) \frac{d^2\theta}{dx^2} - 2x \frac{d\theta}{dx} + \left[p^2 - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \theta = 0. \quad (\text{Д-6-48})$$

При $m=0$ это уравнение обращается в уравнение Лежандра:

$$(1-x^2) \frac{d^2\theta}{dx^2} - 2x \frac{d\theta}{dx} + n(n+1)\theta = 0. \quad (\text{Д-6-49})$$

Решения последнего являются сферическими функциями, которые представляются степенным рядом, состоящим из конечного числа членов, или полиномом порядка n , называемого полиномом Лежандра,

$$\theta = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n. \quad (\text{Д-6-50})$$

Полиномы Лежандра первых четырех порядков имеют следующие значения:

$$\left. \begin{array}{l} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_0(\cos \vartheta) = 1, \\ P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta, \\ P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\vartheta + 1), \\ P_3(\cos \vartheta) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\vartheta + 3 \cos \vartheta). \end{array} \quad (\text{Д-6-51})$$

Графики полиномов Лежандра разных порядков приведены на рис. Д-22.

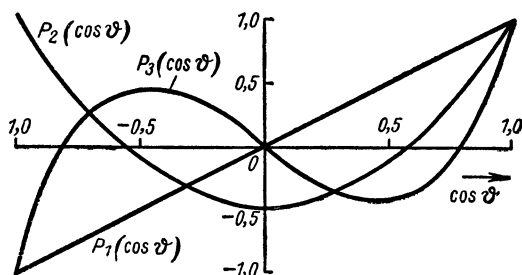


Рис. Д-22. Графики полиномов Лежандра.

Подставляя $\theta(x) = (1-x^2)^{m/2} Y(x)$ в уравнение (Д-6-48), получим уравнение

$$(1-x^2) \frac{d^2 Y}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{dY}{dx} + (n-m)(m+n+1)Y = 0,$$

совпадающее с уравнением Лежандра (Д-6-49), продифференцированным m раз. Решение этого уравнения

$$Y(x) = \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

Отсюда решения уравнения (Д-6-48) имеют вид:

$$\theta(x) = P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (\text{Д-6-52})$$

и называются присоединенными функциями Лежандра. Если $m > n$, то присоединенная функция равна нулю. Если $m < n$, то согласно выражениям (Д-6-52) и (Д-6-50)

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x). \quad (\text{Д-6-53})$$

Присоединенные функции имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 P_1^1(x) &= (1-x^2)^{1/2}, \\
 P_2^1(x) &= 3(1-x^2)^{1/2}x, \\
 P_2^2(x) &= 3(1-x^2), \\
 P_3^1(x) &= \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2} \times \\
 &\quad \times (5x^2-1), \\
 P_3^2(x) &= 15(1-x^2)x, \\
 P_3^3(x) &= 15(1-x^2)^{3/2}.
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 P_1^1(\cos \vartheta) &= \sin \vartheta, \\
 P_2^1(\cos \vartheta) &= \frac{3}{2} \sin 2\vartheta, \\
 P_2^2(\cos \vartheta) &= \frac{3}{2} (1 - \cos 2\vartheta), \\
 P_3^1(\cos \vartheta) &= \frac{3}{8} (\sin \vartheta + \\
 &\quad + 5 \sin 3\vartheta), \\
 P_3^2(\cos \vartheta) &= \frac{15}{4} (\cos \vartheta - \\
 &\quad - \cos 3\vartheta), \\
 P_3^3(\cos \vartheta) &= \frac{15}{4} (3 \sin \vartheta - \\
 &\quad - \sin 3\vartheta).
 \end{aligned} \quad (\text{Д-6-54})$$

Решения уравнения (Д-6-39а) с учетом (Д-6-52), (Д-6-46) и (Д-6-43) или (Д-6-44) имеют такой вид:

$$\begin{aligned}
 f &= \sqrt{kr} \left[C_1 J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + C_2 N_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right] \times \\
 &\quad \times P_n^m(\cos \vartheta) \frac{\cos}{\sin} \} m\alpha \quad (\text{Д-6-55})
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 f &= \sqrt{kr} \left[D_1 H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) + D_2 H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] \times \\
 &\quad \times P_n^m(\cos \vartheta) \frac{\cos}{\sin} \} m\alpha. \quad (\text{Д-6-55a})
 \end{aligned}$$

Уравнение Лапласа в сферической системе координат получим, положив в уравнении (Д-6-39) $k=0$. Используя метод Фурье, ищем решение в виде (Д-6-41). При этом получим уравнения,

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = p^2 R; \quad (\text{Д-6-56})$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} = -m^2 \Phi; \quad (\text{Д-6-57})$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\vartheta} \right) + p^2 \vartheta = 0. \quad (\text{Д-6-58})$$

Решение уравнения (Д-6-56) имеет вид:

$$R = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}. \quad (\text{Д-6-59})$$

Первое слагаемое обращается в бесконечность, когда $r=\infty$, а второе — если $r=0$. Поэтому в зависимости от того, входит в исследуемую область точка с $r=0$ или с $r=\infty$, необходимо соответственно положить C_2 или C_1 равными нулю. Решение (Д-6-57) имеет вид (Д-6-46), а (Д-6-58) — (Д-6-50). Таким образом, частное решение уравнения Лапласа в сферической системе координат имеет вид:

$$F = [C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}] P_n^m(\cos \vartheta) \frac{\cos}{\sin} \Big\} m\alpha. \quad (\text{Д-6-556})$$

Экспоненциальная скалярная функция e^{-jkx_3} в сферической системе координат аналогично (Д-6-37а) может быть представлена рядом

$$e^{-jkx_3} = e^{-jkr \cos \vartheta} = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n (2n+1) J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n(\cos \vartheta).$$

Векторные экспоненциальные функции $e_1 e^{-jkx_3}$ и $e_2 e^{-jkx_3}$ в сферической системе координат (рис. Д-10) представляются выражениями

$$e_1 e^{-jkx_3} = (e_r \sin \vartheta \cos \alpha + e_\vartheta \cos \vartheta \cos \alpha - e_\alpha \sin \alpha) e^{-jkr \cos \vartheta} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} -(-j)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [M_{n+}^1 - jN_{n-}^1]; \quad (\text{Д-6-60})$$

$$e_2 e^{-jkx_3} = (e_r \sin \vartheta \sin \alpha + e_\vartheta \cos \vartheta \sin \alpha + e_\alpha \cos \alpha) e^{-jkr \cos \vartheta} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [M_{n-}^1 + jN_{n+}^1], \quad (\text{Д-6-61})$$

где

$$M_{n\mp}^1 = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \left[\mp e_\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n^1(\cos \vartheta) \frac{\sin}{\cos} \Big\} \alpha - \right. \\ \left. - e_\alpha Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \frac{\partial P_n^1}{\partial \vartheta} \frac{\cos}{\sin} \Big\} \alpha \right]; \\ N_{n\mp}^1 = e_r \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \frac{n(n+1)}{kr} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n'(\cos \vartheta) \frac{\sin}{\cos} \Big\} \alpha + \left. \right]$$

(Д-6-62)

$$\left. \begin{aligned} & + e_{\vartheta} \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{\frac{\pi kr}{2}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right] \frac{\partial}{\partial \vartheta} [P_n^1(\cos \vartheta)] \frac{\cos}{\sin} \alpha \mp \\ & \mp e_{\alpha} \frac{1}{kr \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{\frac{\pi kr}{2}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right] P_n^1(\cos \vartheta) \frac{\sin}{\cos} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-62})$$

Выражения

$$z_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad (\text{Д-6-62a})$$

называются сферическими функциями Бесселя.

Полиномы Чебышева первого рода $T_n(x)$ и второго рода $U_n(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения

$$(1-x^2) \frac{d^2 f}{dx^2} - x \frac{df}{dx} + n^2 f = 0,$$

где n — целое число.

Эти полиномы используются при расчете электрических фильтров с распределенными постоянными. Они определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} T_n(x) &= (-1)^n 2^n \frac{n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}; \\ U_n(x) &= (-1)^{n-1} 2^n \cdot n \cdot \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-63})$$

и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) &= 0; \\ U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-64})$$

При $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$ полиномы Чебышева выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} T_0(x) &= 1, & U_0(x) &= 0, \\ T_1(x) &= x, & U_1(x) &= \sqrt{1-x^2}, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, & U_2(x) &= 2x \sqrt{1-x^2}, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, & U_3(x) &= (4x^2 - 1) \times \\ & & & \times \sqrt{1-x^2}, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, & U_4(x) &= (8x^3 - 4x) \times \\ & & & \times \sqrt{1-x^2}, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, & U_5(x) &= (16x^4 - 12x^2 + 1) \times \\ & & & \times \sqrt{1-x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-65})$$

Графики $T_n(x)$ приведены на рис. Д-23. В интервале от -1 до $+1$ график $T_n(x)$ представляет собой проекцию синусоиды с периодом $2\pi/n$ и единичной амплитудой, находящейся на цилиндре единичного радиуса, на плоскость, параллельную оси цилиндра. В интервале от -1 до $+1$ функция совершает $n-1$ колебаний от 0 до 1 . При $x > 1$ функция быстро стремится к бесконечности.

При исследовании некоторых линейных электромагнитных процессов используется δ -функция (функция Дирака), определяемая интегральным соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad (\text{Д-6-66})$$

где $f(x)$ — любая непрерывная функция.

Из этого определения видно, что из всех значений $f(x)$ δ -функция удерживает лишь одно, соответствующее $x=0$. Это возможно,

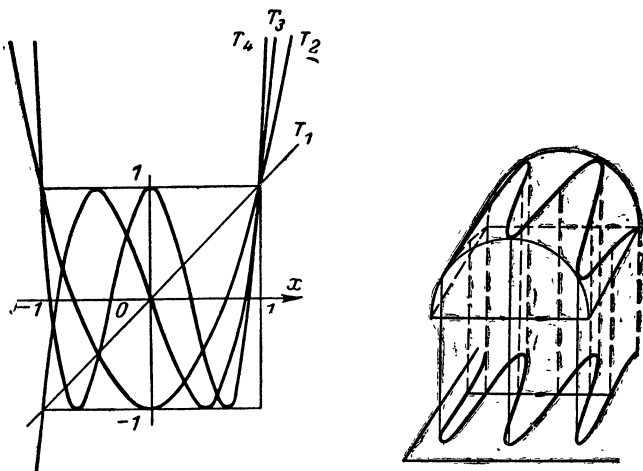


Рис. Д-23. Графики полиномов Чебышева первого рода.

если на любом сколь угодно малом интервале $(-\epsilon, +\epsilon)$, содержащем внутри точку $x=0$,

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x) \delta(x) dx = f(0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = f(0).$$

Следовательно, для того, чтобы выполнялось уравнение (Д-6-66), δ -функция должна иметь следующие свойства:

$$\left. \begin{aligned} \delta(x) &= \begin{cases} \infty & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0, \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-6-66a})$$

Примером функции обладающей свойствами (Д-6-66а), может служить выражение

$$J_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} e^{ikx} dk, \quad (\text{Д-6-67})$$

которое после интегрирования с учетом (Д-5-1) и (Д-5-1а) принимает вид

$$J_l(x) = \frac{\sin(lx)}{\pi x}. \quad (\text{Д-6-68})$$

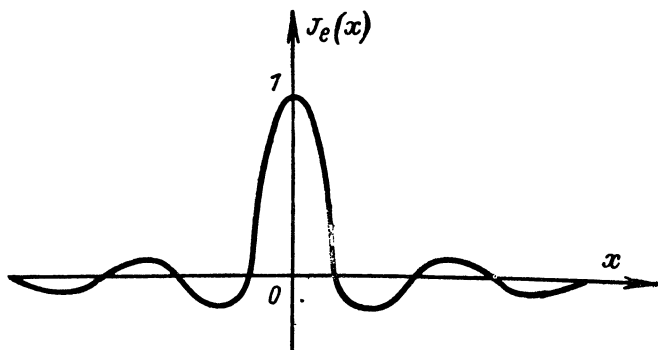


Рис. Д-24. Представление δ -функции.

Эта функция представлена на рис. Д-24.

При $l \rightarrow \infty$

$$J_l(0) \rightarrow \infty, \quad J_l(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} J_l(x) dx = 1 \quad (\text{Д-6-69})$$

δ -функция является четной, т. е.

$$\delta(x) = \delta(-x). \quad (\text{Д-6-70})$$

δ -функция, аргументом которой служит функция $f(x)$ от независимой переменной x , может быть преобразована следующим образом:

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \delta(x - x_0), \quad (\text{Д-6-71})$$

где x_0 — значение x , для которого $f(x_0) = 0$.

При $a > 0$

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x). \quad (\text{Д-6-71a})$$

Учитывая (Д-6-71), получаем:

$$\int g(x) \delta[f(x) - a] dx = \left[\frac{g(x)}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \right]_{f(x)=a} \quad (\text{Д-6-72})$$

δ -функция от радиус-вектора определяется следующим выражением:

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3). \quad (\text{Д-6-73})$$

Функции $\varphi_i(x)$ ($i=1,2,\dots$) образуют систему ортогональных функций, если в некотором интервале (a, b) при $n \neq k$ удовлетворяется условие

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) \rho(x) dx = 0, \quad (\text{Д-6-74})$$

где $\rho(x)$ — так называемый вес функции.

Так, система

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots$$

удовлетворяет условию ортогональности в интервале от $-\pi$ до $+\pi$ с $\rho(x)=1$.

Система функций Бесселя

$$J_n\left(\frac{A_{n1}x}{a}\right), J_n\left(\frac{A_{n2}x}{a}\right), J_n\left(\frac{A_{n3}x}{a}\right), \dots,$$

где

$$0 < A_{n1} < A_{n2} \dots$$

— корни функции $J_n(x)$, ортогональна в интервале от 0 до a с $\rho(x)=x$.

Последовательность полиномов Лежандра

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x) \dots$$

ортогональна в интервале от -1 до 1 с $\rho(x)=1$.

Последовательность присоединенных функций Лежандра

$$P_n^m(x), P_{n+1}^m(x), P_{n+2}^m(x) \dots$$

ортогональна в интервале от -1 до 1 с $\rho(x)=1$.

Полиномы Чебышева первого и второго рода ортогональны в интервале от -1 до 1 с $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Если функция зависит от многих переменных, то интегрирование производится по области многомерного пространства.

Условие (Д-6-74) является условием ортогональности и для векторных функций. В этом случае интеграл берется от скалярного произведения векторных функций.

Д-7. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Спектральный метод анализа в применении к радиоэлектронике состоит в замене сложной функции времени $E(t)$, описывающей какой-либо линейный электромагнитный процесс суммой простых гармонических колебаний, образующих частотный спектр этой функции. Этот метод основан на использовании рядов и интеграла Фурье.

Изучаемые методом спектрального анализа электромагнитные процессы могут быть как установившимися, так и переходными. К первым относятся токи и напряжения в электрических цепях или напряженности электромагнитного поля в средах, изменяющиеся по периодическому закону или постоянные в практически бесконечном интервале времени. Переходные процессы возникают при переходе от одного установившегося состояния к другому, т. е. при включении и выключении источника энергии или при изменении параметров цепи. К переходным процессам относятся также электрические сигналы, служащие для передачи сообщений.

Установившийся процесс может быть выражен периодической функцией, т. е. удовлетворяющей соотношению

$$f(t) = f(t + T),$$

которое действительно для любого значения t . Наименьшая постоянная величина T , удовлетворяющая этому соотношению, называется периодом (рис. Д-25).

Характеризующая электромагнитный процесс периодическая функция может быть представлена тригонометрическим рядом Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \omega_1 t + b_k \sin k \omega_1 t) \quad (\text{Д-7-1})$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k \omega_1 t - \varphi_k), \quad (\text{Д-7-2})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2\pi}{T}; \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \\ \operatorname{tg} \varphi_k &= \frac{b_k}{a_k}; \\ a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt; \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k \omega_1 t dt; \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-7-2a})$$

$$\left. \begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k \omega_1 t dt; \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-7-2a})$$

Физический смысл выражения (Д-7-2) состоит в том, что периодический процесс может быть представлен суммой синусоидальных колебаний с частотами, кратными основной частоте ω_1 , амплитудами

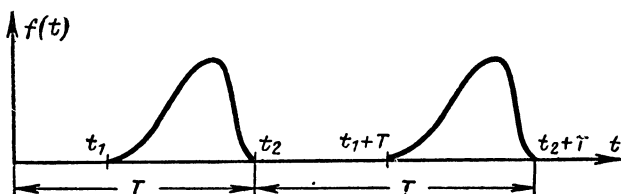


Рис. Д-25. Периодическая функция $f(t)$.

A_k и начальными фазами φ_k , которые определяются выражениями (Д-7-2a). Отдельные слагаемые суммы в формуле (Д-7-2) называют гармониками. Число k является номером гармоники. Первая гармоника ($k=1$) называется основной, так как она имеет тот же период, что и функция $f(t)$. Гармоники следующих номеров ($k=2, 3, 4, \dots$) имеют частоты $k\omega_1$, кратные основной частоте ω_1 . Нулевая гармоника равна среднему значению во времени или постоянной составляющей.

Совокупность величин A_k называется спектром амплитуд (рис. Д-26, а), совокупность величин φ_k — спектром фаз (рис. Д-26, б). Графически спектр амплитуд представляют в координатах A_k и ω . Вертикальные отрезки представляют амплитуды гармоник и называются спектральными линиями. Спектр такого вида называется линейчатым или дискретным. Каждая периодическая функция имеет единственные и вполне определенные амплитудный и фазовый спектры.

Учитывая, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(k\omega_1 t - \varphi_k) dt = \frac{1}{2};$$

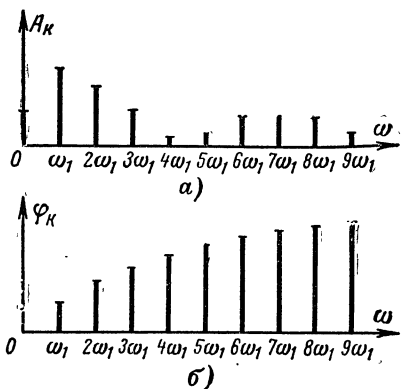


Рис. Д-26. Линейчатый или дискретный спектр амплитуд (а) и фаз (б).

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(m\omega_1 t - \varphi_m) \cos(n\omega_1 t - \varphi_n) dt = 0;$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega_1 t - \varphi_k) dt = 0,$$

где m и n — целые числа, представляющие частные значения числа k , можно показать:

$$\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2. \quad (\text{Д-7-3})$$

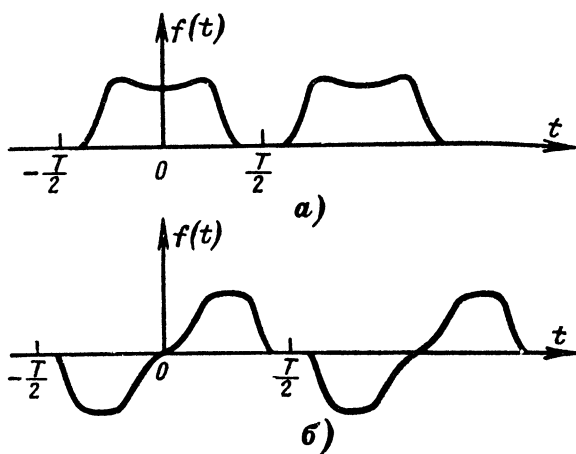


Рис. Д-27. Четная (а) и нечетная (б) функции.

Если функция $f(t)$ представляет, например, ток в электрической цепи, то это выражение согласно закону Джоуля — Ленца, пропорционально средней мощности, поглощаемой в этой цепи. Следовательно, средняя мощность в цепи, в которой протекает ток, являющийся сложной периодической функцией времени, равна сумме средних мощностей всех гармоник.

Сумма в правой части выражения (Д-7-2) представляет бесконечный ряд, но, начиная с некоторого номера, амплитуды гармоник настолько малы, что ими можно пренебречь и практически реальный периодический процесс представляется функцией с ограниченным спектром. Интервал частот, соответствующий ограниченному спектру, называется шириной спектра.

Если периодическая функция $f(t)$ является четной (рис. Д-27, а), т. е. удовлетворяет условию $f(t) = f(-t)$, то в выражении (Д-7-1)

$b_k=0$ и это выражение будет содержать только косинусоидальные функции, т. е.,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t), \quad (\text{Д-7-1a})$$

где

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt$$

и

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega_1 t) dt.$$

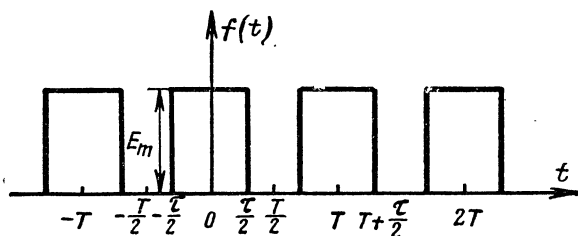


Рис. Д-28. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов.

Если $f(t)$ — нечетная функция (рис. Д-27, б), т. е. $f(t) = -f(-t)$, то $a_0 = a_k = 0$ и выражение (Д-7-1) будет содержать только синусоидальные составляющие:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_1 t), \quad (\text{Д-7-1б})$$

где

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega_1 t) dt.$$

Последовательность прямоугольных импульсов (рис. Д-28) при выбранном начале отсчета является четной функцией; спектр ее содержит только постоянную и косинусоидальные составляющие и

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} E_m dt = 2 \frac{\tau}{T} E_m = 2pE_m;$$

$$a_k = \frac{A}{T_0} \int_0^{\tau/2} E_m \cos(k\omega_1 t) dt = 2p E_m \frac{\sin(k\pi p)}{(k\pi p)}.$$

Поэтому ряд Фурье такой функции имеет вид

$$f(t) = E_m \left[p + 2p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi p)}{k\pi p} \cos(k\omega_1 t) \right], \quad (\text{Д-7-4})$$

в котором

$$p = \frac{\tau}{T} \quad (\text{Д-7-4a})$$

— скважность импульсов.

Спектр амплитуд данной функции определяется выражением

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| = \left| \frac{\sin(k\pi p)}{k\pi p} \right|, \quad (\text{Д-7-5})$$

а спектр фаз (рис. Д-29, б) — выражением

$$\sin(k\pi p). \quad (\text{Д-7-5a})$$

При значениях $k\pi p = \frac{k\omega_1 \tau}{2} = m\pi$ ($m=1, 2, 3 \dots$) амплитуды соответствующих гармоник равны нулю, т. е. в спектре последовательности прямоугольных импульсов частоты $k\omega_1 = \frac{2m\pi}{\tau}$ отсутствуют.

При длительности импульса $\tau = T/2$, т. е. когда $p=1/2$, выражение (Д-7-4) принимает следующий вид:

$$f(t) = E_m \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos[(2n-1)\omega_1 t] \right\}. \quad (\text{Д-7-6})$$

Этот ряд содержит только нечетные гармоники, амплитуды которых убывают по закону

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2n-1} \quad (n=1, 2, 3 \dots), \quad (\text{Д-7-7})$$

где k — номер гармоники.

На рис. Д-29 представлены амплитудный и фазовый спектры последовательности прямоугольных импульсов длительности $\tau = \frac{1}{10} T$.

Последовательность знакопеременных прямоугольных импульсов одинаковой длительности (рис. Д-30). Рассматривая последовательность такого вида, как сумму последовательностей положительных

и отрицательных импульсов, сдвинутых по времени на $\tau = T/2$, из выражения (Д-7-6) получим:

$$f(t) = \frac{4E_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(2n-1)\omega_1 t}{2n-1}. \quad (\text{Д-7-6a})$$

Как и в предыдущем случае, амплитуды гармоник также убывают по закону (Д-7-7).

Форма импульсов, показанная на рис. Д-30, получается при суммировании бесконечно большого числа гармоник; приближение

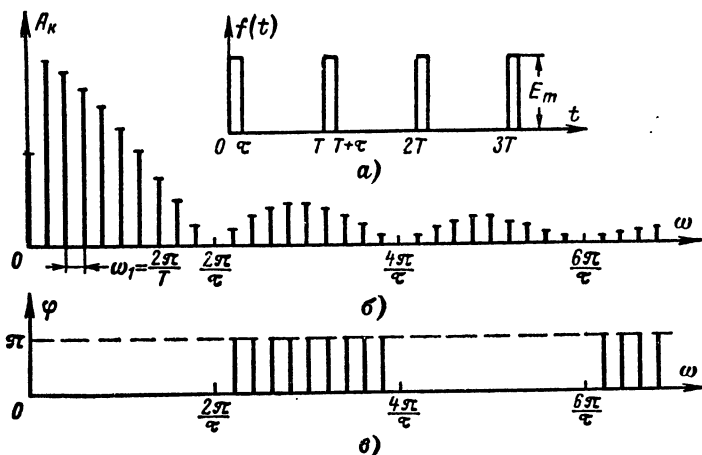


Рис. Д-29. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов длительностью $\tau = T/10$ (а), ее амплитудный (б) и фазовый (в) спектры.

к прямоугольной форме тем лучше, чем больше число учитываемых гармоник. На рис. Д-31 дано сравнение импульсов, получаемых в результате суммирования только первой и третьей гармоник, с импульсами идеально прямоугольной формы.

Комплексный вид ряда Фурье. Используя выражение (Д-5-2), общий член разложения (Д-7-1)

$$a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} &= \\ = \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_1 t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_1 t}. \end{aligned}$$

Если обозначить $a_k - jb_k = \dot{A}_k$ и $a_k + jb_k = A_{-k}$, то выражение (Д-7-1) примет такой вид:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (\text{Д-7-8})$$

где \dot{A}_k — комплексная амплитуда k -й гармоники.

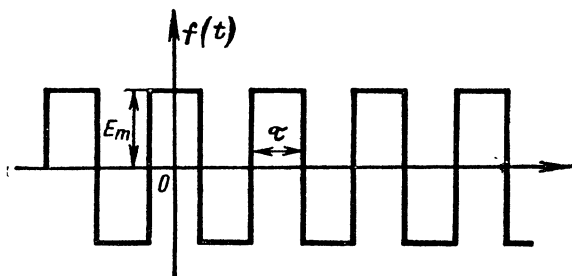


Рис. Д-30. Знакопеременная периодическая последовательность прямоугольных импульсов.

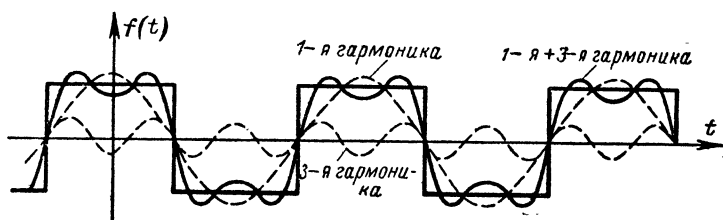


Рис. Д-31. Сравнение знакопеременной периодической последовательности прямоугольных импульсов с суммой двух гармоник.

Учитывая выражения (Д-7-2а), получаем:

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (\text{Д-7-9})$$

Комплексная амплитуда характеризует не только величину амплитуды, но и фазу гармоники.

Переход от тригонометрического к комплексному ряду Фурье можно интерпретировать как замену вещественной величины

$$A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$$

двумя векторами длиной $A_k/2$, вращающимися навстречу друг другу с угловыми скоростями $k\omega_1$ и $-k\omega_1$ (знак указывает направление

вращения вектора). Мгновенное значение гармонической составляющей в этом случае равно геометрической сумме вращающихся векторов (рис. Д-32). Действительная частота каждой гармонической составляющей будет положительной.

Используя выражение (Д-7-9), найдем комплексные амплитуды гармоник для последовательности импульсов, показанной на рис. Д-28:

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_0^{\tau} E_m e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{E_m}{\pi k} \{ \sin k\omega_1 \tau - j [1 - \cos (k\omega_1 \tau)] \}.$$

Амплитуды $|\dot{A}_k|$ образуют линейчатый спектр, расстояния между линиями которого $\omega_1 = 2\pi/T$. При увеличении T эти расстояния

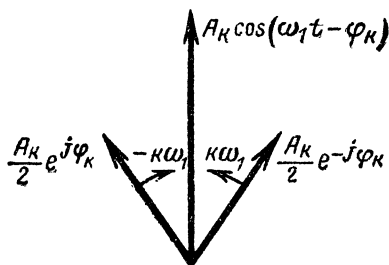


Рис. Д-32. К переходу от тригонометрического к комплексному ряду Фурье.

уменьшаются, т. е. плотность линий спектра увеличивается. Но произведение

$$\frac{1}{2} \dot{A}_k T = S_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt, \quad (\text{Д-7-10})$$

соответствующее гармоникам с одинаковой частотой, остается неизменным, т. е. с увеличением T амплитуды их уменьшаются (рис. Д-33).

При $T \rightarrow \infty$ периодическая последовательность импульсов превращается в одиночный импульс, расстояния между линиями стремятся к $d\omega$, S_k переходит в непрерывное распределение

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (\text{Д-7-11})$$

характеризующее сплошной спектр.

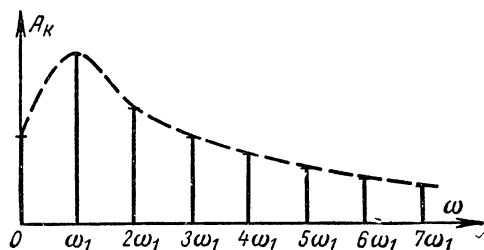
Величина $S(j\omega)$ называется спектральной плотностью или спектральной характеристикой функции $f(t)$.

Огибающая сплошного спектра (модуль спектральной характеристики $|S(j\omega)|$ одиночного импульса совпадает с огибающей линейчатого спектра $|\dot{S}_k|$ периодической функции, представляющей периодическое повторение этого импульса.

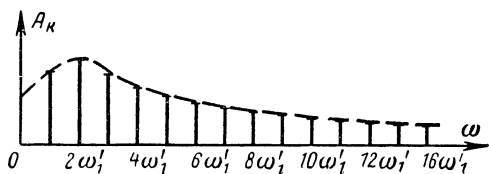
При $T \rightarrow \infty$ ряд (Д-7-8) переходит в интеграл Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{Д-7-12})$$

Это выражение позволяет любую периодическую функцию $f(t)$, определенную в интервале $-\infty \leq t \leq \infty$, представить в виде суммы бес-



а)



б)

Рис. Д-33. Увеличение плотности спектральных линий при увеличении периода последовательности импульсов.

$$a - T_1 = T = 2\pi/\omega_1; \quad б - T'_1 = 2T = 2\pi/\omega'_1.$$

конечного числа гармоник с бесконечно малыми комплексными амплитудами $\frac{1}{\pi} S(j\omega) d\omega$ и с бесконечно малым интервалом $d\omega$ по частоте.

Формулы (Д-7-11) и (Д-7-12) имеют симметричное строение и называются соответственно прямым и обратным преобразованием Фурье. Преобразования эти имеют смысл, если функция $f(t)$ является абсолютно интегрируемой, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ имеет конечное значение. Формула (Д-7-11) позволяет

найти $S(j\omega)$ по заданной $f(t)$, а формула (Д-7-12) позволяет найти $f(t)$ по заданной $S(j\omega)$.

Практически время изменяется в интервале $0 \leq t \leq \infty$; при этом выражения (Д-7-11) и (Д-7-12) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} S(j\omega) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega &= \begin{cases} f(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-7-13})$$

Итак, рядом Фурье может быть представлен любой реальный периодический процесс, а интегралом Фурье — непериодический, определяемый функцией $f(t)$ и удовлетворяющий условию абсолютной интегрируемости. Заметим, что последнему условию удовлетворяют не все применяемые на практике формы сигналов.

Средняя мощность каждой гармоники пропорциональна половине ее амплитуды

$$P_{0k} \sim \frac{A_k^2}{2}$$

или согласно выражению (Д-7-10)

$$P_{0k} \sim \frac{S_k^2}{T}.$$

Следовательно, отдаваемая всеми гармониками за период энергия

$$W_{(T)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{0k} T \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{S_k^2}{T}.$$

Из предыдущего выражения находим выражение, определяющее энергию одиночного импульса ($T \rightarrow \infty$, $\omega_1 \rightarrow d\omega$):

$$W \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(j\omega) d\omega. \quad (\text{Д-7-14})$$

Отсюда следует, что спектральная плотность $S(j\omega)$ определяет распределение энергии в спектре одиночного импульса. В общем случае распределение энергии в спектре неоднородно; однородное распределение имеет место лишь в хаотическом процессе в так называемом «белом шуме», когда амплитуды и фазы составляющих частот изменяются по случайному закону.

Одиночный импульс описывается выражениями

$$\begin{aligned} f(t) &\neq 0 \text{ при } t_1 \leq t \leq t_2, \\ f(t) &= 0 \text{ при } t > t_2 \text{ и } t < t_1 \end{aligned}$$

и согласно (Д-7-13) спектральная плотность энергии одиночного импульса

$$S(j\omega) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (\text{Д-7-15})$$

Отсюда следует, что распределение энергии в спектре одиночного импульса зависит от его длительности $\tau = t_2 - t_1$. Приблизительно 90% энергии одиночного прямоугольного импульса сосредоточено в спектре, ширина которого определяется приближенно выражением

$$\Delta f \approx \frac{1}{\tau}. \quad (\text{Д-7-16})$$

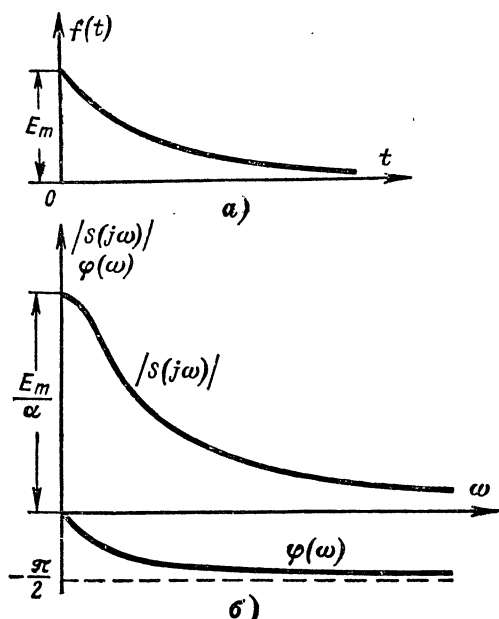


Рис. Д-34. Экспоненциальный одиночный импульс (а), его спектральная плотность и распределение фазы (б).

Спектральная плотность экспоненциального импульса (рис. Д-34, а), описываемого уравнениями:

$$f(t) = E_m e^{-\alpha t} \text{ при } t > 0,$$

$$f(t) = 0 \text{ при } t < 0,$$

согласно (Д-7-13) определяется выражением

$$S(j\omega) = \int_0^{\infty} E_m e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{E_m}{\alpha + j\omega},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} |S(j\omega)| &= \frac{E_m}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \\ \varphi &= -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-7-17})$$

Графики $|S(j\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ приведены на рис. Д-34, б.

Если функция $f(t)$ не обладает свойством абсолютной интегрируемости, ее нельзя представить в виде интеграла Фурье. Чтобы обойти это затруднение, умножим $f(t)$ на $e^{-\sigma_0 t}$, выбрав величину $\sigma_0 > 0$ такой, чтобы произведение $e^{-\sigma_0 t} f(t)$ удовлетворяло условию абсолютной интегрируемости. Тогда преобразования Фурье (Д-7-13) принимают вид:

$$\begin{aligned} e^{-\sigma_0 t} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \\ S(j\omega) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma_0 t} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma_0 + j\omega) e^{(\sigma_0 + j\omega)t} d\omega; \\ S(j\omega + \sigma_0) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma_0 + j\omega)t} dt. \end{aligned}$$

Введя обозначение

$$p = \sigma_0 + j\omega, \quad (\text{Д-7-18})$$

получим:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} S(p) e^{pt} dp; \quad (\text{Д-7-19})$$

$$S(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (\text{Д-7-20})$$

Переход от переменной ω к переменной p означает изменение пути интегрирования. В первом случае интегрирование ведется по вещественной оси ω , во втором — по прямой, лежащей в плоскости комплексного переменного $p = \sigma_0 + j\omega$ и расположенной параллельно мнимой оси $j\omega$ при $\sigma_0 = \text{const}$ (рис. Д-35).

Соотношения (Д-7-20) и (Д-7-19), преобразующие функцию $f(t)$ вещественного переменного t в функцию $S(p)$ комплексного

переменного p и обратно, называются соответственно прямым и обратным преобразованиями Лапласа. Функция $S(p)$ называется преобразованной по Лапласу функцией $f(t)$ или изображением функции $f(t)$. Функция $f(t)$ называется оригиналом.

Если функция $f(t)$ является абсолютно интегрируемой ($\sigma_0=0$), то преобразования Лапласа переходят в преобразования Фурье (Д-7-13).

Каждой функции пространства оригиналов соответствует определенная функция в пространстве изображений. Переход от оригинала к изображению осуществляется с помощью

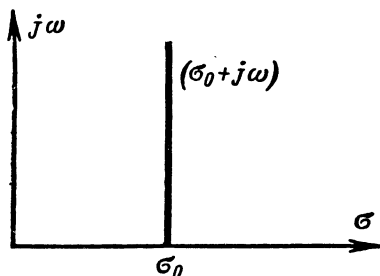


Рис. Д-35. Путь интегрирования в плоскости комплексного переменного p .

таблиц соответствия (табл. Д-5). Обычно изображения представляют собой более простые функции, чем оригиналы. Символически этот переход записывается выражением

$$f(t) \div S(p).$$

Каждой операции над функциями в пространстве оригиналов соответствует определенная операция в пространстве изображений. На практике наиболее часто используют следующие операции.

Сложение. Если функция $f(t)$ равна сумме нескольких функций

$$f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t),$$

то изображение функции $f(t)$ равно сумме изображений слагаемых:

$$S(p) = \sum_{k=1}^n S_k(p). \quad (\text{Д-7-21})$$

Если функции $f_k(t)$ являются абсолютно интегрируемыми ($\sigma_0=0$), то

$$S(j\omega) = \sum_{k=1}^n S_k(j\omega). \quad (\text{Д-7-22})$$

Отсюда следует, что спектр суммы функций равен сумме спектров слагаемых. При нахождении спектра сложной функции целесообразно разложить ее на сумму простых функций, найти их спектры и сложить.

Умножение оригинала на постоянный множитель a соответствует умножению на тот же множитель изображения:

$$af(t) \div aS(p) \quad (\text{Д-7-23})$$

т. е. при изменении амплитуды сигнала во столько же раз изменяется спектральная плотность.

Умножение аргумента оригинала на постоянную величину $a > 0$ приводит к делению аргумента изображения и самого изображения на эту величину, т. е.

$$f(at) \div \frac{1}{a} S\left(\frac{p}{a}\right). \quad (\text{Д-7-24})$$

В случае абсолютной интегрируемости функции

$$\int_0^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a} S\left(\frac{j\omega}{a}\right). \quad (\text{Д-7-25})$$

Из этого выражения следует, что при «сжатии» импульсов ($a > 1$) спектр сигнала расширяется, а при их «растягивании» ($a < 1$), т. е. при замедлении передачи сигналов, спектр сжимается.

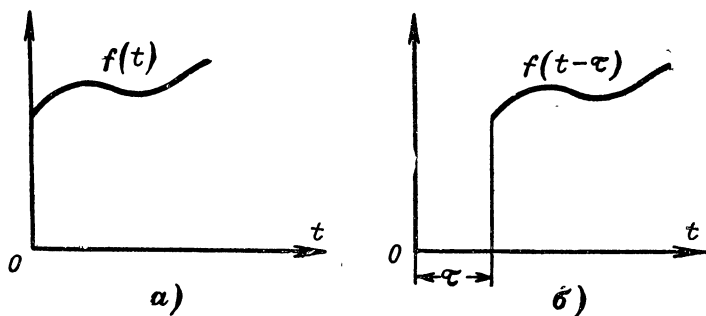


Рис. Д-36. К определению запаздывающей функции.

a — функция $f(t)$; *б* — запаздывающая функция.

Смещение (запаздывание). Запаздывающей функцией называется функция $f(t-\tau)$, определяемая условием

$$f(t-\tau) \neq 0 \text{ при } t \geq \tau;$$

$$f(t-\tau) = 0 \text{ при } t < \tau,$$

где τ — время запаздывания.

График функции $f(t-\tau)$ (рис. Д-36, б) можно получить из графика функции $f(t)$ (рис. Д-36, а), смещая его вправо на величину τ . Изображение функции, запаздывающей на время τ , определяется произведением изображения этой функции без учета запаздывания на величину $e^{-p\tau}$, т. е.

$$f(t-\tau) \div e^{-p\tau} S(p), \quad (\text{Д-7-26})$$

где $f(t) \div S(p)$.

Очевидно также, что

$$f(t+\tau) \div e^{p\tau} S(p), \quad (\text{Д-7-26a})$$

где $f(t+\tau)$ — опережающая функция.

В случае абсолютно интегрируемой функции

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t-\tau) e^{-j\omega t} dt &= e^{-j\omega\tau} S(j\omega); \\ \int_0^{\infty} f(t+\tau) e^{-j\omega t} dt &= e^{j\omega\tau} S(j\omega), \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-7-27})$$

где $S(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$.

Отсюда следует, что запаздывание сигнала во времени приводит к изменению спектра фаз при неизменном спектре амплитуд.

Дифференцирование оригинала. Изображение первой производной функции $f(t)$ определяется выражением

$$f'(t) \div pS(p) - f(0), \quad (\text{Д-7-28})$$

где $S(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$.

В этом случае изображение первой производной определяется выражением

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt.$$

Интегрируя его по частям, получаем:

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = pS(p) - f(0),$$

что совпадает с выражением (Д-7-28).

Обобщая полученный результат на производные высших порядков, получаем:

$$f^n(t) \div p^n S(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{n-1}(0), \quad (\text{Д-7-29})$$

где $f'(0) \dots f^{n-1}(0)$ — производные соответствующих порядков при $t=0$. В частном случае при нулевых начальных условиях

$$f^{(n)}(t) \div p^n S(p), \quad (\text{Д-7-29a})$$

т. е. операции дифференцирования оригинала соответствует в пространстве изображений умножение изображения на степень комплексного переменного p .

Интегрирование оригинала от нуля до t соответствует в пространстве изображений делению изображения на p . Действительно, если

$$\psi(t) = \int_0^t f(t) dt,$$

то

$$f(t) = \frac{d\psi}{dt}; \quad \psi(0) = 0.$$

Воспользовавшись формулой (Д-7-29а), получим:

$$f(p) = p \psi(p),$$

где

$$f(t) \div f(p), \quad \psi(t) \div \psi(p).$$

Отсюда

$$\psi(p) = \frac{f(p)}{p}$$

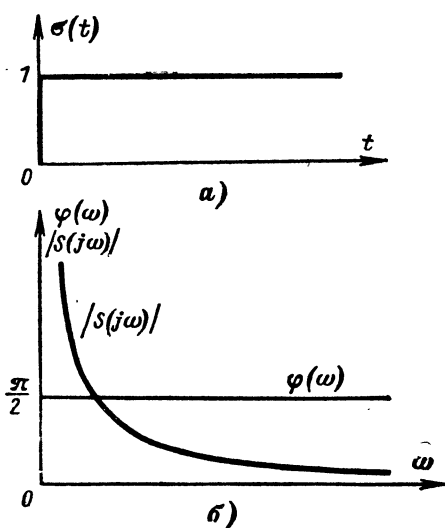


Рис. Д-37. Единичная функция (а), ее спектральная плотность и распределение фазы (б).

или

$$\int_0^t f(t) dt \div \frac{S(p)}{p}, \quad (\text{Д-7-30})$$

где $f(t) \div S(p)$.

Изображение n -кратного интеграла имеет вид:

$$\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t f(t) dt \div \frac{1}{p^n} S(p). \quad (\text{Д-7-31})$$

Рассмотрим спектры некоторых наиболее распространенных функций (сигналов).

Спектр единичной функции, определяемой условием

$$\sigma(t) = 1 \text{ при } t \geq 0,$$

$$\sigma(t) = 0 \text{ при } t < 0$$

и не являющейся абсолютно интегрируемой, можно исследовать с помощью преобразования Лапласа (Д-7-20):

$$S(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}. \quad (\text{Д-7-32})$$

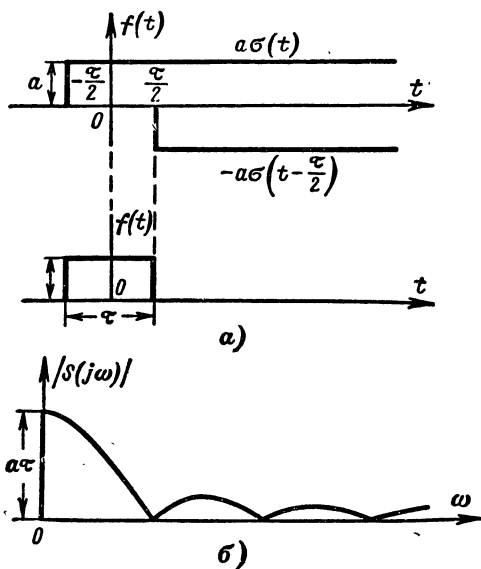


Рис. Д-38. Представление одиночного прямоугольного импульса (а) и его спектральная плотность (б).

При $\sigma_0 \rightarrow 0$ получим:

$$S(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

т. е.

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{\omega}; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{Д-7-32a})$$

Графики единичной функции и ее спектров приведены на рис. Д-37. Из этого рисунка видно, что при нулевой частоте кривая спектраль-

ной плотности уходит в бесконечность. Следовательно, величина $|S(j\omega)| d\omega$ имеет конечное значение, т. е. в составе сплошного спектра имеется дискретная составляющая.

Спектр прямоугольного одиночного импульса найдем, воспользовавшись принципом суперпозиции. Представим прямоугольный импульс с амплитудой a длительностью τ с помощью разности двух единичных функций, включаемых в моменты $t = -\tau/2$ и $t = \tau/2$ (рис. Д-38)

$$f(t) = a \left[\sigma \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - \sigma \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right].$$

Пусть $a\sigma \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \div S_1(p)$, $a\sigma(t - \tau/2) \div S_2(p)$. На основании выражения (Д-7-21) спектр импульса

$$S(p) = S_1(p) - S_2(p).$$

Согласно выражениям (Д-7-32), (Д-7-26), (Д-7-26, а) и (Д-7-23)

$$S_1(p) = \frac{ae^{\frac{p\tau}{2}}}{p} \quad \text{и} \quad S_2(p) = \frac{ae^{-\frac{p\tau}{2}}}{p}.$$

Отсюда

$$S(p) = \frac{a}{p} \left(e^{\frac{p\tau}{2}} - e^{-\frac{p\tau}{2}} \right). \quad (\text{Д-7-33})$$

При $\sigma_0 \rightarrow 0$ спектральная плотность

$$\left. \begin{aligned} S(j\omega) &= \frac{2a}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2}; \\ |S(j\omega)| &= a\tau \left| \frac{\sin \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д-7-33a})$$

При $\omega = 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} = 1$$

и, следовательно,

$$|S(0)| = a\tau. \quad (\text{Д-7-34})$$

Итак, спектральная плотность одиночного прямоугольного импульса на нулевой частоте равна его площади, а огибающая спектральной плотности (рис. Д-38, б) совпадает с огибающей амплитудного спектра последовательности прямоугольных импульсов той же длительности (рис. Д-29, б).

Изображения наиболее часто встречающихся функций приведены в табл. Д-5.

Таблица соответствия функций

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$\sigma(t)$	$1/p$	$\cos \omega t$	$p/p^2 + \omega^2$
$\sigma(t-\tau)$	$e^{-p\tau}/p$	$\sin \omega t$	$\omega/p^2 + \omega^2$
$e^{-\alpha t}$	$1/p + \alpha$	t	$1/p^2$

Нахождение оригинала по изображению сводится к нахождению решения интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = S(p).$$

При этом функция $S(p)$ известна, а искомой является подынтегральная функция $f(t)$. Однако если

$$S(p) = \frac{H_1(p)}{pH_2(p)}, \quad (\text{Д-7-35})$$

где $H_1(p)$ и $H_2(p)$ — полиномы, причем степень $H_1(p)$ меньше степени $H_2(p)$, то можно показать, что

$$f(t) = \frac{H_1(0)}{H_2(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{H_1(p_i)}{p_i H_2'(p_i)} e^{p_i t}; \quad (\text{Д-7-36})$$

здесь p_i — корни уравнения $H_2(p) = 0$, n — число этих корней, $H_2'(p_i)$ — производная dH_2/dp при $p = p_i$.

Выражение (Д-7-36) называется формулой Хевисайда. Она применяется только в случаях, когда $H_2(p)$ не имеет кратных корней.

Д-8. СПЕКТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Электрический сигнал является величиной (ток, напряжение, напряженность поля), изменяющейся во времени в соответствии с передаваемой информацией.

Простейшим видом электрического сигнала является нерегулярная последовательность прямоугольных импульсов. Они имеют постоянную длительность в случае передачи информации, закодированной в двоичной системе исчисления, или неодинаковую длительность, когда передача информации производится азбукой Морзе. Электрический сигнал может представлять и регулярную (периодическую) последовательность импульсов (рис. Д-39, а), один из параметров которых (амплитуда, длительность, фаза или частота повторения) изменяется в соответствии с передаваемой информацией.

Изменение параметра называется модуляцией; сигнал, содержащий закодированную информацию, под действием которого изменяются параметры импульсов, называется управляющим или модулирующим.

В соответствии с модулируемым параметром периодической последовательности импульсов модуляция называется амплитудно-импульсной (АИМ), фазоимпульсной (ФИМ), частотно-импульсной (ЧИМ), модуляцией длительности импульсов (ДИМ).

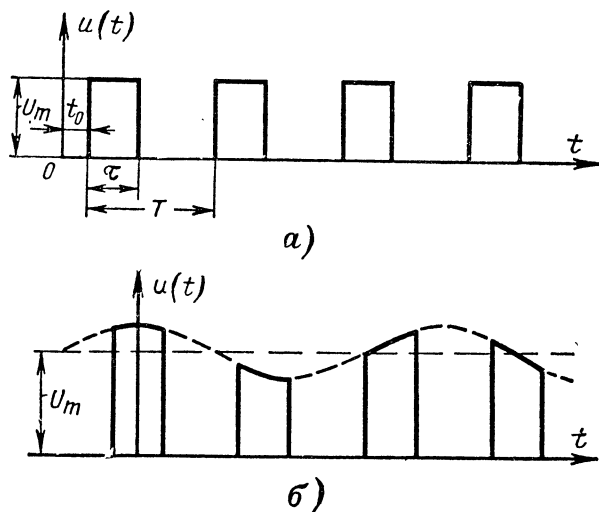


Рис. Д-39. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов с неизменной во времени амплитудой (а) и амплитудно-модулированных (б).

Спектр модулированных импульсов при АИМ. Последовательность прямоугольных импульсов, модулированных по амплитуде косинусоидальным управляющим сигналом, показана на рис. Д-39, б. Периодическую последовательность немодулированных импульсов амплитуды U_m согласно выражению (Д-7-2) можно представить в виде

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k \omega_1 t - \varphi_k).$$

Если модулирующий сигнал имеет вид $e(t) = E_m \cos \Omega t$, причем $\Omega < \omega_1$, то модулированная последовательность импульсов описывается выражением

$$u_M(t) = (1 + m \cos \Omega t) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k \omega_1 t - \varphi_k) \right]. \quad (\text{Д-8-1})$$

После соответствующих тригонометрических преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 u_M(t) = & \frac{x_0}{2} + \frac{m}{2} a_0 \cos \Omega t + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos (k \omega_1 t - \varphi_k) + \\
 & + \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos [(k \omega_1 + \Omega) t - \varphi_k] + \\
 & + \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos [(k \omega_1 - \Omega) t - \varphi_k]. \quad (\text{Д-8-2})
 \end{aligned}$$

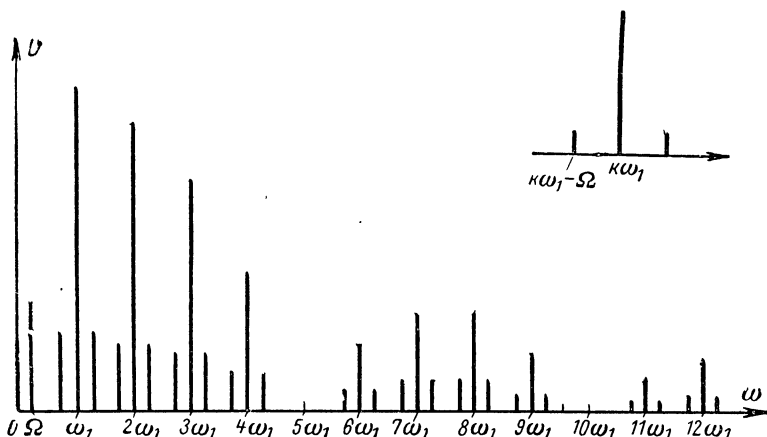


Рис. Д-40. Спектр периодической последовательности импульсов при АИМ.

Коэффициент $m = \Delta U_m / U_m$, выражающий отношение максимального изменения амплитуды импульса к амплитуде немодулированного импульса, называется коэффициентом модуляции; он определяет глубину модуляции.

Из выражения (Д-8-2) следует, что при АИМ в спектре последовательности импульсов около каждой гармонической составляющей спектра немодулированной последовательности имеются боковые частоты: верхняя $k\omega_1 + \Omega$ и нижняя $k\omega_1 - \Omega$. Кроме того, в спектре модулированных импульсов имеется также и частота Ω управляющего сигнала (рис. Д-40).

Спектр периодической последовательности импульсов, модулированных по длительности. Односторонней ДИМ называется модуляция по длительности, при которой фронт (или спад) импульса перемещается в процессе модуляции на величину, пропорциональную модулирующему напряжению, а спад (или фронт) сохраня-

ет фиксированное положение. Двусторонней ДИМ называется модуляция, при которой смещаются как фронт, так и спад импульса.

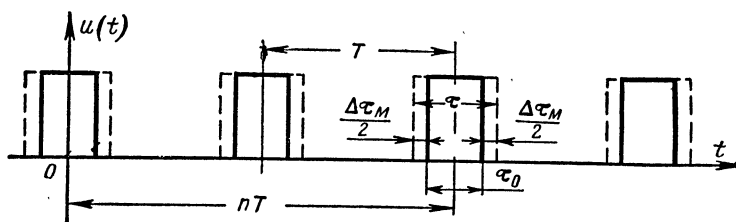


Рис. Д-41. К определению двусторонней ДИМ.

Если модулирующий сигнал имеет вид $e(t) = E_m \cos \Omega t$, то модулированная последовательность импульсов при двусторонней ДИМ (рис. Д-41) определяется условиями:

$$u(t) = \begin{cases} U_m & \text{если } t_n \leq t \leq t'_n, \\ 0 & \text{если } t'_n < t < t_{n+1}, \end{cases} \quad (\text{Д-8-3})$$

где

$$t'_n = nT + \frac{\tau_0}{2} + \frac{\Delta \tau_M}{2} \cos \Omega t;$$

$$t_n = nT - \frac{\tau_0}{2} - \frac{\Delta \tau_M}{2} \cos \Omega t;$$

t_n — момент времени, соответствующий фронту и t'_n — спаду n -го импульса;

$\Delta \tau_M / 2$ — максимальное отклонение фронта и спада импульса от первоначального положения;

τ_0 — длительность немодулированного импульса.

Мгновенное значение длительности импульсов при модуляции

$$\tau = (t'_n - t_n) = (\tau_0 + \Delta \tau_M \cos \Omega t).$$

Подставляя эту величину в ряд (Д-7-4), получаем выражение, представляющее модулированный сигнал при ДИМ:

$$u_M(t) = U_m \left\{ \frac{\tau_0}{T} + \frac{m_i}{\pi k} \cos \Omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \left\{ \sin \left[k \omega_1 \left(t + \frac{\tau_0}{2} \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + m_i \cos \Omega t \right] - \sin \left[k \omega_1 \left(t - \frac{\tau_0}{2} \right) - m_i \cos \Omega t \right] \right\} \right\},$$

которое с использованием (Д-6-386) можно переписать в виде

$$u_M(t) = U_m \left(\frac{\tau_0}{T} + \frac{m_i}{\pi k} \cos \Omega t + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi k} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_i) \sin[(k \omega_1 + n \Omega) t + \varphi_{kn}] - \right. \\ \left. - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-m_i) \sin[(k m_1 - n \Omega) t + \varphi_{kn}] \right\}, \quad (\text{Д-8-4})$$

где $\varphi_{kn} = k \omega_1 \tau_0 / 2 + n \pi / 2$,

а $m_i = k \omega_1 \Delta \tau_m / 2$ — индекс модуляции по длительности.

Из последнего выражения следует, что спектр модулированного сигнала при ДИМ (как и при АИМ) имеет боковые частоты около каждой гармоники, входящей в спектр немодулированной последовательности импульсов, однако, в отличие от АИМ, амплитуды колебаний боковых частот при ДИМ определяются функциями Бесселя.

Согласно свойству беселевых функций (рис. Д-20) при $m_i \ll 1$ (т. е. когда $\omega_1 \Delta \tau_m \ll 2/k$) боковыми частотами в спектре ДИМ можно пренебречь.

Рассмотренные примеры электрических сигналов относятся к «низкочастотным» и «видеочастотным» сигналам, основные частоты которых $f_1 = \omega_1 / 2\pi$ находятся в диапазоне от единиц герц до 10 МГц. Вместе с тем эти сигналы имеют весьма большую относительную ширину спектра, т. е. отношение ширины полосы используемого спектра к основной частоте велико (рис. Д-42):

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_1} = \frac{n \omega_1}{\omega_1} = n \gg 1.$$

Это свойство низкочастотных сигналов и видеосигналов затрудняет их передачу по про-

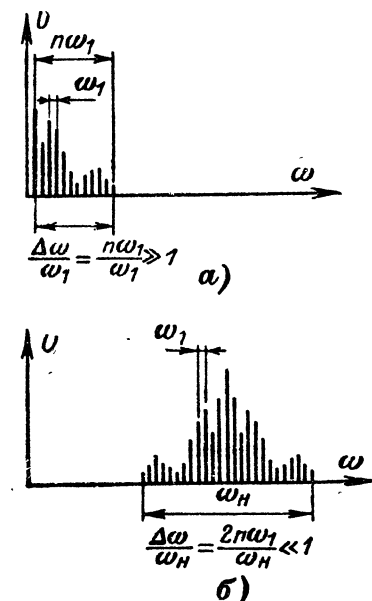


Рис. Д-42. Спектры низкочастотного сигнала (видеосигнала) (а) и радиосигнала (б).

водам на дальние расстояния, а передачу их без проводов делает неосуществимой.

При беспроводной передаче сигналов и одновременной передаче нескольких сообщений по одной двухпроводной линии электрический сигнал, содержащий информацию, используется для модуляции высокочастотного электромагнитного колебания, например, напряжения $u(t) = U_m \cos(\omega_n t + \varphi_n)$. В этом случае, как и при модуляции периодической последовательности импульсов, модулирующий сигнал изменяет амплитуду (АМ), либо частоту ω_n , называемую в этом случае несущей (ЧМ), либо фазу (ФМ) (рис. Д-43).

Далее будет показано, что спектр таких сигналов, называемых радиосигналами, в общем случае состоит из несущей частоты и ряда боковых частот, отличающихся от несущей на величину $\pm n\Omega$ ($n=1, 2, 3, \dots$), где Ω угловая частота, с которой изменяется параметр U_m , ω_H или φ_H . Так как $\Omega \ll \omega_H$, то относительная ширина спектра радиосигналов всегда много меньше единицы (рис. Д-42):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_H} = \frac{2n\Omega}{\omega_H} \ll 1.$$

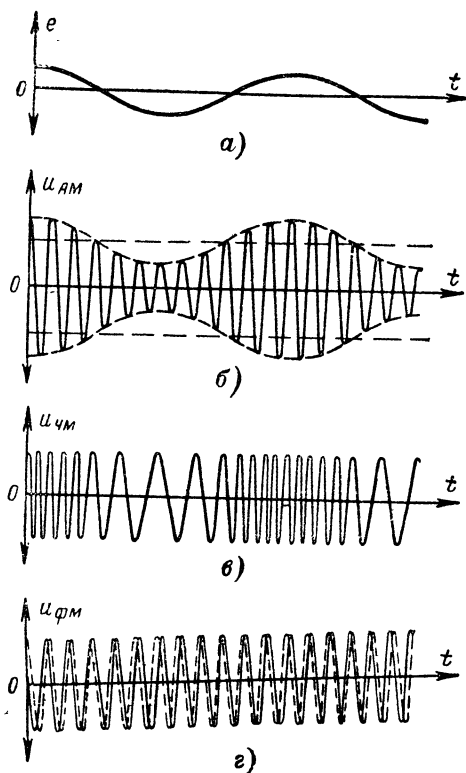


Рис. Д-43. Управляющий гармонический сигнал (а); радиосигнал при амплитудной (б), частотной (в) и фазовой (г) модуляции.

Амплитудная модуляция. При АМ изменение амплитуды колебания пропорционально управляющему модулирующему сигналу $e(t)$. В простейшем случае управляющий сигнал может быть гармоническим колебанием

$$e(t) = E_m \cos \Omega t. \quad (\text{Д-8-5})$$

При этом радиосигнал (рис. Д-44) описывается выражением

$$u_M(t) = U_m (1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (\text{Д-8-6})$$

где m — глубина модуляции.

Если $m > 1$, то для некоторых интервалов времени значения $1 + m \cos \Omega t$ становятся отрицательными, огибающая модулированных колебаний искажается (рис. Д-45). Это явление называют пере-модуляцией. Обычно $m \leq 1$, т. е. амплитуда модулированного колебания изменяется в пределах

$$U_{m \text{ мин}} \leq U_m \leq U_{m \text{ макс}},$$

где

$$U_{m \text{ мин}} = U_m (1 - m), \quad U_{m \text{ макс}} = U_m (1 + m). \quad (\text{Д-8-7})$$

Спектр радиосигнала при амплитудной модуляции. В простейшем случае гармонической модуляции спектр можно найти, раскрывая скобки в выражении (Д-8-6) и производя соответствующие тригонометрические преобразования

$$u_M(t) = U_m \left[\cos \omega_n t + \frac{m}{2} \cos(\omega_n - \Omega) t + \frac{m}{2} \cos(\omega_n + \Omega) t \right]. \quad (\text{Д-8-8})$$

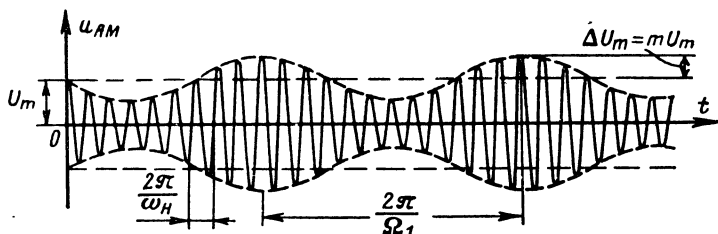


Рис. Д-44. Амплитудно-модулированное колебание.

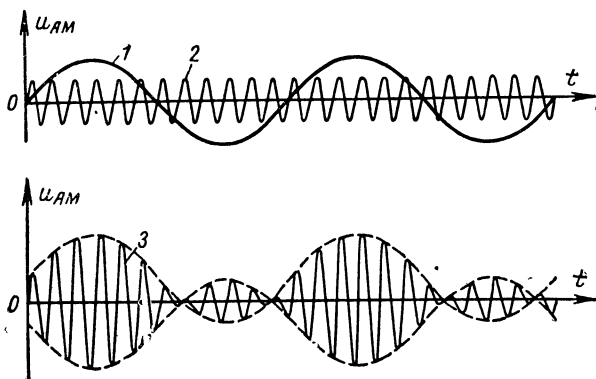


Рис. Д-45. Перемодуляция.

1 — модулирующий сигнал; 2 — немодулированное колебание;
3 — модулированное колебание.

Следовательно, при гармонической амплитудной модуляции спектр радиосигнала состоит из несущей частоты ω_n и двух боковых — нижней $\omega_n - \Omega$ и верхней $\omega_n + \Omega$ (рис. Д-46, а), амплитуды которых пропорциональны глубине модуляции m .

Если модулирующий сигнал является периодической сложной функцией, то его можно представить рядом Фурье:

$$e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_1 t - \varphi_k).$$

При амплитудной модуляции имеем:

$$u_M(t) = U_m \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos(k\Omega_1 t - \varphi_k) \right] \cos \omega_n t.$$

Следовательно,

$$u_M(t) = U_m \left\{ \cos \omega_n t + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos[(\omega_n - k\Omega_1)t + \varphi_k] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos[(\omega_n + k\Omega_1)t - \varphi_k] \right\}, \quad (\text{Д-8-9})$$

т. е. спектр радиосигнала при сложной АМ состоит из несущей частоты и нескольких пар боковых частот $\omega_n - k\Omega_1$ и $\omega_n + k\Omega_1$ (рис. Д-46, б). В формуле (Д-8-9) m_k — парциальный коэффициент модуляции $m_k =$

$$= \frac{\Delta A_k}{U_m}.$$

На рис. Д-46, в даны спектры радиосигналов при модулирующем сигнале в виде регулярной последовательности прямоугольных импульсов, которая согласно (Д-7-4) может быть представлена рядом

$$e(t) = mE_m \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi m)}{k\pi m} \cos(k\Omega t) \right];$$

здесь $m = \tau/T$ и $\Omega = 2\pi/T$.

Если колебание несущей частоты выражается косинусоидальной функцией $u(t) = U_m \cos \omega_n t$ и $U_m = E_m$, то радиосигнал описывается выражением

$$u_M(t) = U_m \left\{ 1 + m \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi m)}{k\pi m} \cos k\Omega t \right] \right\} \cos \omega_n t$$

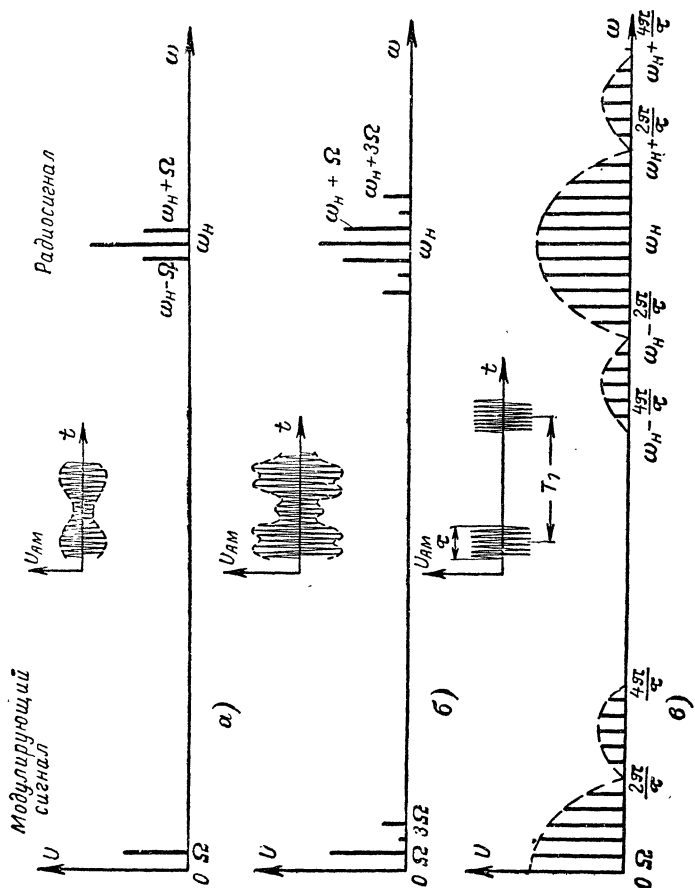


Рис. Д-46. Спектры модулирующих сигналов и радиосигналов при АМ.

а — модуляция гармоническим сигналом; б — модуляция сложным сигналом; в — модуляция сложным сигналом в виде последовательности прямоугольных импульсов.

или

$$u_M(t) = U_m (1 + m) \left(\cos \omega_n t + \frac{2}{1 + m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi m)}{k\pi m} \times \right. \\ \left. \times [\cos(\omega_n + k\Omega)t + \cos(\omega_n - k\Omega)t] \right). \quad (\text{Д-8-10})$$

При $\tau = T/2$ выражение (Д-8-10) принимает вид:

$$u_M(t) = U_m \frac{3}{2} \left(\cos \omega_n t + \frac{8}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \times \right. \\ \left. \times [\cos[\omega_n + (2n-1)\Omega]t + \cos[\omega_n - (2n-1)\Omega]t] \right). \quad (\text{Д-8-11})$$

Описываемый этим выражением радиосигнал применяют, в частности, для передачи знаков 0 и 1 двоичной системы исчисления.

Как следует из выражений (Д-8-8) — (Д-8-11), ширина спектра радиосигнала при АМ в 2 раза больше ширины спектра модулирующего сигнала.

Угловая модуляция. Если по закону сообщения изменяется аргумент высокочастотного колебания

$$u(t) = U_m \cos \{\vartheta(t)\}, \quad (\text{Д-8-12})$$

то модуляция называется **угловой**. В этом случае колебание можно представить вектором, вращающимся с переменной скоростью. При этом мгновенное значение частоты

$$\omega_M = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad (\text{Д-8-13})$$

а мгновенное значение аргумента

$$\vartheta = \int_0^t \omega_M dt + \varphi_M. \quad (\text{Д-8-14})$$

Частотная модуляция. При ЧМ амплитуда радиосигнала постоянна, а изменение его частоты пропорционально управляющему сигналу. Вследствие этого радиосигнал при этом виде модуляции в общем случае описывается согласно (Д-8-12) и (Д-8-14) выражением

$$u_M(t) = U_m \cos \left\{ \int_0^t [\omega_n + K_{\text{ЧМ}} e(t)] dt + \varphi_n \right\}; \quad (\text{Д-8-15})$$

здесь $K_{\text{ЧМ}}$ — коэффициент пропорциональности, определяющий связь между управляющим сигналом и изменением частоты.

В случае гармонического управляющего сигнала мгновенное значение частоты определяется выражением

$$\omega_M = \omega_n + K_{\text{ЧМ}} E_m \cos \Omega t = \omega_n + \Delta \omega_M \cos \Omega t, \quad (\text{Д-8-16})$$

в котором $\Delta \omega_M = K_{\text{ЧМ}} E_m$ — максимальное изменение частоты (амплитуда частотного отклонения), пропорциональное амплитуде управляющего сигнала; называется **она де в и а ц и е й ч а с т о т ы**. Мгно-

венное значение аргумента высокочастотного колебания в этом случае определяется согласно (Д-8-14) при $\varphi_n=0$ выражением

$$\vartheta(t) = \int_0^t \omega_M(t) dt = \left(\omega_n t + \frac{\Delta\omega_M}{\Omega} \sin \Omega t \right), \quad (\text{Д-8-17})$$

из которого следует, что модуляция частоты вызывает модуляцию фазы, причем максимальное отклонение фазы

$$\Delta\varphi_M = \Delta\omega_M / \Omega. \quad (\text{Д-8-18})$$

Подставляя выражение (Д-8-17) в (Д-8-12), определим радиосигнал при синусоидальной частотной модуляции

$$u_M(t) = U_m \cos(\omega_n t + m_f \sin \Omega t). \quad (\text{Д-8-19})$$

Здесь коэффициент

$$m_f = \frac{\Delta\omega_M}{\Omega} = \Delta\varphi_M, \quad (\text{Д-8-19a})$$

представляющий отношение девиации частоты к частоте модулирующего сигнала, равное амплитуде изменения фазы, называется индексом частотной модуляции.

Фазовая модуляция. Амплитуда радиосигнала при ФМ остается постоянной, а пропорционально управляющему сигналу изменяется фаза высокочастотного колебания. Вследствие этого радиосигнал при ФМ в общем случае при $\varphi_n=0$ описывается следующей функцией времени

$$u_M(t) = U_m \cos[\omega_n t + K_{\text{ФМ}} e(t)]; \quad (\text{Д-8-20})$$

здесь $K_{\text{ФМ}}$ — коэффициент пропорциональности, определяющий связь между управляющим сигналом и изменением фазы.

В случае гармонического управляющего сигнала мгновенное значение фазы определяется выражением

$$\varphi_M = K_{\text{ФМ}} e(t) = K_{\text{ФМ}} E_m \sin \Omega t = \Delta\varphi_M \sin \Omega t, \quad (\text{Д-8-21})$$

в котором $\Delta\varphi_M = K_{\text{ФМ}} E_m$ — девиация фазы — максимальное изменение фазы, пропорциональное амплитуде управляющего сигнала (амплитуда фазового отклонения).

Подставляя (Д-8-21) в (Д-8-20), получаем выражение

$$u_M(t) = U_m \cos(\omega_n t + \Delta\varphi_M \sin \Omega t), \quad (\text{Д-8-22})$$

которое аналогично выражению (Д-8-19), описывающему радиосигнал при синусоидальной ЧМ.

Очевидно, при ФМ происходит модуляция частоты, так как на основании (Д-8-13) производная аргумента в выражении (Д-8-22) описывающем радиосигнал при ФМ, может быть представлена в виде

$$\omega_M = \frac{d}{dt} [\omega_n t + \Delta\varphi_M \sin \Omega t] = \omega_n + \Delta\omega_M \cos \Omega t.$$

Правая часть этого выражения совпадает с (Д-8-16), причем

$$\Delta\omega_M = \Delta\varphi_M \Omega.$$

Девияция частоты при ФМ определяется подобно отклонению фазы при ЧМ (см. выражение (Д-8-18)).

Сравнивая выражения, характеризующие частотную и фазовую модуляции, легко видеть, что ЧМ можно рассматривать как разновидность ФМ и наоборот. Если ЧМ создается косинусоидальным управляющим напряжением, а ФМ — синусоидальным, то в обоих случаях радиосигнал определяется одной и той же функцией времени (Д-8-19).

Спектры при частотной и фазовой модуляции можно найти, в частности, переписав выражение (Д-8-19) в следующем виде:

$$u_M(t) = U_m [\cos \omega_n t \cos (m_f \sin \Omega t) - \sin \omega_n t \sin (m_f \sin \Omega t)];$$

с учетом (Д-6-38a)

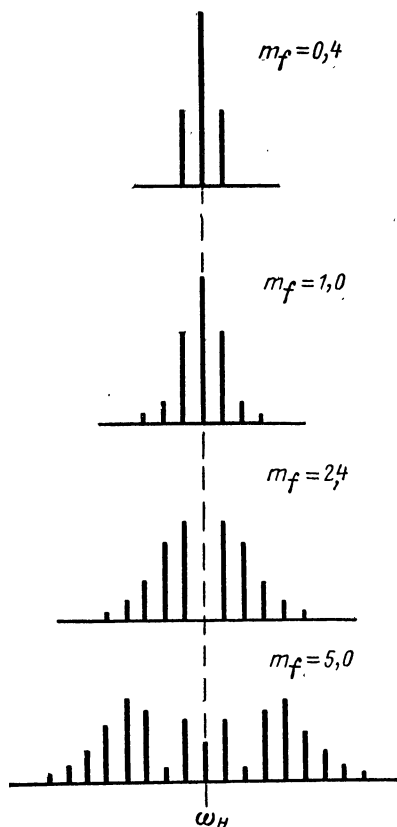


Рис. Д-47. Спектр ЧМ колебания при различных индексах частотной модуляции.

$$u_M(t) = U_m \left\{ J_0(m_f) \cos \omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m_f) \times \right. \\ \left. \times [\cos(\omega_n + n\Omega)t + (-1)^n \cos(\omega_n - n\Omega)t] \right\}, \quad (\text{Д-8-23})$$

т. е. спектр ЧМ и ФМ радиосигнала при гармоническом управляющем сигнале состоит из несущей частоты и ряда боковых частот, амплитуды колебаний которых определяются функцией Бесселя $J_n(m_f)$ (рис. Д-47).

При больших значениях m_f , что имеет место при низких модулирующих частотах, амплитуды спектральных составляющих очень быстро уменьшаются и, когда $n \gg m_f + 1$, ими можно пренебречь. В этом случае ширина спектра ЧМ и ФМ радиосигнала определяется выражением

$$\Delta\omega \approx 2(m_f + 1)\Omega;$$

с учетом (Д-8-19а)

$$\Delta\omega \approx 2(\Delta\omega_M + \Omega). \quad (\text{Д-8-24})$$

Когда $\Delta\omega_M \gg \Omega$, то

$$\Delta\omega \approx 2\Delta\omega_M, \quad (\text{Д-8-24а})$$

т. е. ширина спектра простейшего ЧМ колебания равна удвоенной девиации частоты.

Если величина m_f равна значению A_{0m} (табл. Д-3), т. е. $J_0(m_f) = 0$, то амплитуда колебаний несущей частоты равна нулю и вся энергия распределяется между колебаниями боковых частот.

Если $m_f \ll 1$, то следует учитывать только пару боковых частот с $n=1$. При этом $J_0(m_f) \approx 1$, $J_1(m_f) \approx m_f/2$ и выражение (Д-8-23) упрощается, принимая следующий вид:

$$u_M(t) = U_m \left[\cos \omega_n t + \frac{m_f}{2} \cos(\omega_n + \Omega)t - \right. \\ \left. - \frac{m_f}{2} \cos(\omega_n - \Omega)t \right]. \quad (\text{Д-8-23а})$$

Из сравнения этого выражения с выражением (Д-8-8), видно, что спектр ЧМ или ФМ радиосигнала при малом значении m_f , как и спектр АМ радиосигнала, состоит из несущей частоты ω_n и двух боковых частот — верхней $\omega_n + \Omega$ и нижней $\omega_n - \Omega$. Отличие лишь в том, что колебание нижней боковой частоты при ЧМ и ФМ сдвинуто по сравнению с соответствующим колебанием при АМ на 180° .

Приведенные выводы о ширине спектра справедливы и для фазовой модуляции, однако при ЧМ с увеличением частоты модулирующего сигнала m_f уменьшается, а интервал между боковыми частотами увеличивается; в результате ширина спектра ЧМ радиосигнала при $m_f > 1$ остается почти неизменной. При фазовой же модуляции m_f от частоты Ω не зависит и по мере роста Ω ширина полосы частот увеличивается.

Следует отметить, что вследствие неизменности амплитуды радиосигналов при ЧМ и ФМ мощности радиопередатчиков используются более полно, а сигналы более помехоустойчивы по сравнению с амплитудно-модулированными радиосигналами.

Фазовая манипуляция. Большой практический интерес представляет радиосигнал с фазовой манипуляцией (ФМ), при которой фаза колебаний несущей частоты скачкообразно изменяется в пределах от нуля до π . Такой радиосигнал применяют, в частности, при передаче знаков 0 и 1 двоичной системы исчисления.

На основании выражений (Д-7-6) и (Д-8-22) радиосигнал с фазовой манипуляцией представляется следующей функцией времени:

$$u_M(t) = U_m \cos \left\{ \omega_n t + \pi \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \cos (2n-1) \Omega t \right] \right\}; \quad (\text{Д-8-25})$$

здесь $\Omega = \pi/\tau$.

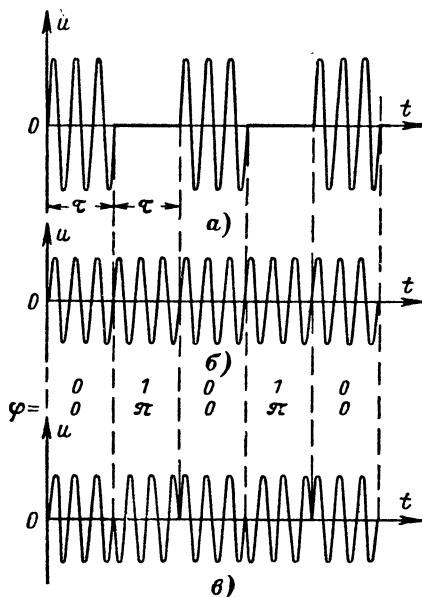


Рис. Д-48. Образование фазоманипулированного радиосигнала.

a — амплитудно-модулированное колебание;
б — немодулированное колебание (несущая частота); *в* — фазоманипулированное колебание.

Чтобы найти спектр фазоманипулированного радиосигнала, можно переписать выражение (Д-8-25) на основе (Д-6-386), представив его как сумму простых гармонических колебаний. Или, учитывая, что согласно рис. Д-48 спектр фазоманипулированного радиосигнала отличается от спектра радиосигнала амплитудно-модулированного

прямоугольными импульсами, отсутствием колебания с несущей частотой, из выражения (Д-8-11) находим:

$$u_M(t) = U_m \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \{ \cos [\omega_H + (2n-1) \Omega] t + \cos [\omega_H - (2n-1) \Omega] t \}, \quad (\text{Д-8-26})$$

=====

Классификация электромагнитных волн

Наименование волн	Длины волн	Частоты
Сверхдлинные (СДВ)	$>10\,000\text{ м}$	$<30\text{ кгц}$
Длинные (ДВ)	$10\,000\text{—}1\,000\text{ м}$	$30\text{—}300\text{ кгц}$
Средние (СВ)	$1\,000\text{—}100\text{ м}$	$300\text{—}3\,000\text{ кгц}$
Короткие (КВ)	$100\text{—}10\text{ м}$	$3\text{—}30\text{ Мгц}$
Ультракороткие (УКВ):		
метровые	$10\text{—}1\text{ м}$	$30\text{—}300\text{ Мгц}$
дециметровые	$10\text{—}1\text{ дм}$	$300\text{—}3\,000\text{ Мгц}$
сантиметровые	$10\text{—}1\text{ см}$	$3\text{—}30\text{ Ггц}$
миллиметровые	$10\text{—}1\text{ мм}$	$30\text{—}300\text{ Ггц}$
Субмиллиметровые	$1\text{—}0,4\text{ мм}$	$300\text{—}750\text{ Ггц}$
Инфракрасные (ИКЛ)	$0,4\text{ мм—}0,76\text{ мкм}$	$0,75\text{—}395\text{ Тгц}$
Световые	$0,76\text{ мкм—}0,4\text{ мкм}$	$395\text{—}750\text{ Тгц}$
Ультрафиолетовые		750 Тгц—
(УФЛ)	$0,4\text{ мкм—}20\text{ Å}$	$1,5 \cdot 10^5\text{ Тгц—}$
Рентгеновские	$20\text{ Å—}0,06\text{ Å}$	$5 \cdot 10^7\text{ Тгц—}$
Гамма-лучи	$<0,06\text{ Å}$	$>5 \cdot 10^7\text{ Тгц}$

Примечание. Частоты $300\text{ Мгц—}300\text{ Ггц}$ называются сверхвысокими (СВЧ).

Таблица П-2

Приставки для образования кратных и дольных единиц
по ГОСТ 7663—55

Кратность	Наименование приставок	Сокращенные обозначения		Дольность	Наименование приставок	Сокращенные обозначения	
		Русскими буквами	Латинскими или греческими буквами			Русскими буквами	Латинскими или греческими буквами
10^{12}	тера	Т	T	10^{-1}	деци	д	d
10^9	гига	Г	G	10^{-2}	сант	с	s
10^6	мега	М	M	10^{-3}	милли	м	m
10^3	кило	К	K	10^{-6}	микро	мк	μ
10^2	гекто	г	h	10^{-9}	нано	н	n
10	дека	да	da	10^{-12}	пико	п	p

Единицы измерения физических величин по международной системе единиц СИ

Наименование величины	Обозначение	Единица измерения	Сокращенное обозначение	Размерность
Длина	l	метр	m	m
Масса	m	килограмм	$кг$	$кг$
Время	t	секунда	$сек$	$сек$
Сила	F	ньютон	$н$	$кг \cdot м \cdot сек^{-2}$
Энергия	W	джоуль	$дж$	$кг \cdot м^2 \cdot сек^{-2}$
Мощность	P	ватт	$вт$	$кг \cdot м^2 \cdot сек^{-3}$
Ток	I	ампер	a	a
Заряд	q	кулон	$к$	$a \cdot сек$
Плотность тока	J	ампер на квадратный метр	$a/м^2$	$a \cdot м^{-2}$
Плотность заряда объемная	ρ	кулон на кубический метр	$к/м^3$	$a \cdot сек \cdot м^{-3}$
Плотность заряда поверхностная	κ	кулон на квадратный метр	$к/м^2$	$a \cdot сек \cdot м^{-2}$
Сопротивление	R	ом	$ом$	$кг \cdot м^2 \cdot a^{-2} \cdot сек^{-3}$
Проводимость	G	сименс	$сим$	$a^2 \cdot сек^3 \cdot кг^{-1} \cdot м^{-2}$
Удельная электрическая проводимость	σ	сименс на метр	$сим/м$	$a^2 \cdot сек^3 \cdot кг^{-1} \cdot м^{-3}$
Электрический потенциал, падение напряжения, электродвижущая сила	Φ U E	} вольт	$в$	$кг \cdot м^2 \cdot a^{-1} \cdot сек^{-3}$
Напряженность электрического поля	E			
Электрическая индукция	D	кулон на квадратный метр	$к/м^2$	$a \cdot сек \cdot м^{-2}$
Емкость	C	фарада	ϕ	$a^2 \cdot сек^4 \cdot кг^{-1} \cdot м^{-2}$
Диэлектрическая проницаемость абсолютная	ϵ_a	фарада на метр	$\phi/м$	$a^2 \cdot сек^4 \cdot кг^{-1} \cdot м^{-3}$
То же относительная	ϵ	безразмерная		нулевая
Электрический дипольный момент	p_ϵ	кулон-метр	$к \cdot м$	$a \cdot м \cdot сек$
Магнитный поток	Φ	вебер	$вб$	$кг \cdot м^2 \cdot a^{-1} \cdot сек^{-2}$
Магнитная индукция	B	тесла	$тл$	$кг \cdot a^{-1} \cdot сек^{-2}$
Напряженность магнитного поля	H	ампер на метр	$вб/м^2$ $a/м$	$a \cdot м^{-1}$
Индуктивность	L	} генри	$гн$	$кг \cdot м^2 \cdot a^{-2} \cdot сек^{-2}$
Взаимная индуктивность	L_{12} M			

Наименование величины	Обозначение	Единица измерения	Сокращенное обозначение	Размерность
Магнитная проницаемость абсолютная	μ_a	генри на метр	гн/м	$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{а}^{-2} \cdot \text{сек}^{-2}$
То же относительная	μ	безразмерная		нулевая
Частота	f	герц	гц	сек^{-1}
Круговая частота	ω	радиан в секунду	рад/сек	сек^{-1}

Таблица П-4

Удельные проводимости некоторых металлов при 20° С

Металл	Удельная проводимость, сим/м	Металл	Удельная проводимость, сим/м
Алюминий	$3,54 \cdot 10^7$	Нихром	$1,0 \cdot 10^6$
Висмут	$8,34 \cdot 10^5$	Олово	$8,9 \cdot 10^6$
Вольфрам	$1,82 \cdot 10^7$	Палладий	$9,35 \cdot 10^6$
Железо	$1,0 \cdot 10^7$	Платина	$9,5 \cdot 10^6$
Золото	$4,14 \cdot 10^7$	Свинец	$3,8 \cdot 10^6$
Инвар	$1,28 \cdot 10^6$	Ртуть	$1,04 \cdot 10^6$
Иридий	$1,63 \cdot 10^7$	Серебро	$6,2 \cdot 10^7$
Кобальт	$1,76 \cdot 10^7$	Сталь легированная	$2,2 \cdot 10^6$
Константан	$2,0 \cdot 10^3$	Сталь мягкая	$6,6 \cdot 10^6$
Латунь	$1,25 \cdot 10^7$	Сталь струнная	$8,3 \cdot 10^6$
Магний	$2,24 \cdot 10^7$	Сурьма	$2,38 \cdot 10^6$
Манганин	$2,3 \cdot 10^6$	Тантал	$6,45 \cdot 10^6$
Медь	$5,8 \cdot 10^7$	Фосфористая бронза	$1,25 \cdot 10^7$
Молибден	$1,8 \cdot 10^7$	Цинк	$1,69 \cdot 10^7$
Никель	$1,38 \cdot 10^7$		

Таблица П-5

Удельные проводимости электролитов в сим/м при 18° С

P	KCl	KNO ₃	NaCl	AgNO ₃	CuSO ₄	HCl	H ₂ SO ₄	KOH
5	6,9	4,6	6,7	2,6	1,9	39,5	20,9	17,2
10	13,6	9,4	12,1	4,8	3,2	63,0	39,2	31,5
15	20,2	12,5	16,4	6,8	4,2	74,5	54,3	42,5
20	26,8	14,4	19,6	8,7	—	76,2	65,3	49,9

P — количество безводного вещества.

Т а б л и ц а П-6

Удельные проводимости полупроводников при 20° С

<i>p</i> -полупроводники	Удельная проводимость, <i>сим/м</i>	<i>n</i> -полупроводники	Удельная проводимость, <i>сим/м</i>
CuI+I	10 ⁻¹ —2,5·10 ⁴	ZnO—O	10 ⁻¹⁰ —2,3
CuO+O	10 ⁻⁸ —2,0	TiO ₂ —O	10 ⁻¹⁰ —2·10 ²
NiO+O	10 ⁻⁶ —10 ⁻¹	WO ₃ —O	5,5·10 ⁻⁴ —5,5·10 ²
CoO+O	10 ⁻⁶ —1,0	FeO ₃ —O	10 ⁻¹⁰ —2,9·10 ²
UO ₂ +O	6,3·10 ⁻⁴ —31	UO ₂ —O	6,3·10 ⁻⁴ —10 ³
PbS+S	1,1·10 ⁻² —8·10 ²	PbS—S	1,1·10 ⁻² —7,6·10 ³
PbSe+Se	80—2,0·10 ⁴	PbSe—Se	80—4,0·10 ⁴

Т а б л и ц а П-7

Температуры перехода сверхпроводящих элементов, °К

Tc 11,2	Nb 8	Pb 7,22	V 5,1	Ta 4,4	La 4,37	Hg 4,15	
Sn 3,73	In 3,37	Tl 2,38	Th 1,39	Al 1,20	Ga 1,10	Re 1,10	
Zn 0,91	U 0,8	Os 0,71	Zr 0,70	Cd 0,56	Ti 0,53	Rr 0,47	Hf 0,35

Т а б л и ц а П-8

Удельные проводимости диэлектриков при 18° С

Диэлектрик	Удельная проводимость, <i>сим/м</i>	Диэлектрик	Удельная проводимость, <i>сим/м</i>
Бакелит (чистый без наполнителя) . . .	5·10 ⁻¹⁵	Сера	10 ⁻¹⁵

Диэлектрик	Удельная проводим- ность, сим/м	Диэлектрик	Удельная проводим- ность сим/м
Кварц (параллельно оси)	10^{-15}	Слюда (чистая) . . .	$2 \cdot 10^{-15}$
Кварц (перпендику- лярно оси)	$3,3 \cdot 10^{-15}$	Фибра	$5 \cdot 10^{-9}$
Листовое стекло . .	$5 \cdot 10^{-12}$	Целлулоид	$5 \cdot 10^{-9}$
Неглазурованный фар- фор	$3,3 \cdot 10^{-13}$	Шеллак	10^{-14}
Парафин	$3,3 \cdot 10^{-17}$	Шифер	10^{-6}
Плавленный кварц . .	$2 \cdot 10^{-17}$	Эбонит	$5 \cdot 10^{-14}$
		Янтарь	$2 \cdot 10^{-15}$

Т а б л и ц а П-9

Электрическая прочность диэлектриков

Материал	Электри- ческая прочность, кв/мм	Материал	Электри- ческая прочность, кв/мм
Бумага конденсатор- ная	300	Плексиглас . . .	40
Воздух	3	Полихлорвинил .	32
Гетинакс	15—25	Резина	15—25
Картон электроизоля- ционный	8	Слюда	80—150
Масло изоляционное .	16—20	Текстолит . . .	10—15
Парафин	20—30	Эбонит	60—80

Таблица П-10

Диэлектрическая проницаемость некоторых диэлектриков

Материал	ϵ	Материал	ϵ
Бакелит	3—5	Мрамор	7—8
Бумага	1,2—3,0	Парафин	1,9—2,2
Вода	80,0	Плексиглас	3,4
Воздух	1,0	Полихлорвинил	3,2
Гетинакс	4—7	Резина	3—6
Дерево	2—3	Слюда	6—8
Лакоткань	3—4	Текстолит	4—8
Масло изоляционное .	2,2	Эбонит	3—3,5

Таблица П-11

Магнитная восприимчивость некоторых магнетиков

Материал	χ_m	Материал	χ_m
<i>Диамагнетики</i>		Свинец	$-1,69 \cdot 10^{-5}$
Аргон	$-0,95 \cdot 10^{-8}$	Серебро	$-2,64 \cdot 10^{-5}$
Висмут	$-16,7 \cdot 10^{-5}$	<i>Парамагнетики</i>	
Вода	$-0,88 \cdot 10^{-5}$	Алюминий	$2,14 \cdot 10^{-5}$
Водород	$-0,21 \cdot 10^{-8}$	Воздух	$3,65 \cdot 10^{-7}$
Кварц	$-1,51 \cdot 10^{-5}$	Кислород	$1,79 \cdot 10^{-6}$
Медь	$-0,94 \cdot 10^{-5}$	Палладий	$8,25 \cdot 10^{-4}$
Неон	$-0,35 \cdot 10^{-8}$	Платина	$2,93 \cdot 10^{-4}$
Ртуть	$-3,23 \cdot 10^{-5}$		

Материал	χ_m начальная	χ_m максимальная
Ферромагнетики		
Железо (очень чистое)	1 100	22 000
Никель	12	80
Пермалой	800	8 000
Трансформаторная сталь	40	475
Армко-железо	300	14 300

**Численные значения некоторых констант
(результаты измерений или определения)**

Скорость света в вакууме $c = 299792,5 \pm 0,4$ км/сек $\approx 3 \cdot 10^8$ м/сек (измерение).

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м (определение).

Электрическая постоянная $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ ф/м (следствие).

Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ к (измерение).

Масса электрона $m = 9,106 \cdot 10^{-31}$ кг (измерение).

Постоянная Больцмана $k = 1,38$ вт · сек/град (измерение).

Постоянная Планка (квант действия) $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ вт · сек (измерение).

ЛИТЕРАТУРА

- Слетер Дж., Передача ультракоротких радиоволн, ОГИЗ, 1946.
- Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
- Смайт В., Электростатика и электродинамика, Изд-во иностр. лит. 1954.
- Тамм И. Е., Основы теории электричества, ГИТТЛ, 1954.
- Зоммерфельд А., Электродинамика, Изд-во иностр. лит., 1958.
- Вайнштейн Л. А., Электромагнитные волны, изд-во «Советское радио», 1957.
- Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, 1960.
- Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, 1957.
- Тоннела М. А., Основы электромагнетизма и теории относительности, Изд-во иностр. лит., 1962.
- Пановский В. И., Филиппс М., Классическая электродинамика, Физматгиз, 1963.
- Семенов А. А., Теория электромагнитных волн, изд-во МГУ, 1962.
- Никольский В. В., Теория электромагнитного поля, изд-во «Высшая школа», 1964.
- Харвей А. Ф., Техника сверхвысоких частот, т. I и II, изд-во «Советское радио», 1965.
- Джексон Дж., Классическая электродинамика, изд-во «Мир», 1965.
- Лавров В. М., Теория электромагнитного поля и основы распространения радиоволн, Связьиздат, 1964.
- Пистолькорс А. А., Антенны, Связьиздат, 1947.
- Айзенберг Г. З., Антенны УКВ, Связьиздат, 1957.
- Введенский Б. А. и Аренберг А. Г., Радиоволноводы, Гостехиздат, 1946.
- Линии передачи сантиметровых волн, т. I и II, под ред. Г. А. Ремеза, изд-во «Советское радио», 1951.
- Теория линий передачи сверхвысоких частот, т. I и II, под ред. А. И. Шпунтова, изд-во «Советское радио», 1951.
- Гуревич А. Г., Полые резонаторы и волноводы, изд-во «Советское радио», 1952.
- Фельд Я. Н. (ред.), Справочник по волноводам, изд-во «Советское радио», 1952.

Саусворт Дж. К., Принципы и применения волноводной передачи, изд-во «Советское радио», 1955.

Ширман Я. Д., Радиоволны и объемные резонаторы, Связьиздат, 1959.

Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р., Смирнов В. П., Справочник по элементам волноводной техники, Госэнергоиздат, 1963.

Ефимов И. Е., Радиочастотные линии передачи, изд-во «Советское радио», 1964.

Фок В. А., Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд-во АН СССР, 1946.

Белкина М. Г., Таблица для вычисления электромагнитного поля в области тени для различных почв, изд-во «Советское радио», 1949.

Введенский Б. А. и Аренберг, Вопросы распространения ультракоротких волн, изд-во «Советское радио», 1948.

Щукин А. Н., Распространение радиоволн, Связьиздат, 1940.

Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л. и Фейнберг Е. Л., Распространение радиоволн, Гостехиздат, 1953.

Долуханов М. П., Распространение радиоволн, Связьиздат, 1960.

Гуревич А. Г., Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, 1960.

Микаэлян А. Л., Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах, Госэнергоиздат, 1963.

Леонтович М. А., Вопросы теории плазмы, Сборник статей, 1963.

Арцимович Л. А., Элементарная физика плазмы, Госатомиздат, 1963.

Пилькинер С. Б., Основы космической электродинамики, изд-во «Наука», 1966.

Бремер Дж., Сверхпроводящие устройства, изд-во «Мир», 1964.

Сверхпроводимость и ее применения в электротехнике. Сборник статей под редакцией Б. К. Буль и Б. М. Тареева, изд-во «Энергия», 1964.

Нейман М. С., Обобщение теории цепей на волновые системы, Госэнергоиздат, 1955.

Котельников В. А., Основы радиотехники, Связьиздат, 1950.

Шимони К., Теоретическая электротехника, изд-во «Мир», 1964.

Мэзон С. и Циммерман Г., Электронные цепи, сигналы и системы, Изд-во иностр. лит., 1963.

Харкевич А. А., Основы радиотехники, Связьиздат, 1962.

Гоноровский И. С., Радиотехнические цепи и сигналы, изд-во «Советское радио», 1963.

Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В. и Страхов С. В., Основы теории цепей, изд-во «Энергия», 1965.

Атабеков Г. И., Теория линейных электрических цепей, изд-во «Советское радио», 1960.

Сешу С. и Балабанян Н., Анализ линейных цепей, Госэнергоиздат, 1963.

Стьюарт Дж., Теория и синтез электрических цепей, Изд-во иностр. лит., 1962.

Реза Ф. и Сили С., Современный анализ электрических цепей, изд-во «Энергия», 1964.

Зернов Н. С. и Карпов В. Г., Теория радиотехнических цепей, изд-во «Энергия», 1965.

Робинот Л., Буавер М., Роберт Ж., Направленные графы и их применение к электрическим цепям и машинам, изд-во «Энергия», 1964.

Бурдун Г. Д., Калашников Н. В., Стоцкий Л. Р., Международная система единиц, изд-во «Высшая школа», 1964.

Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд-во АН СССР, 1951.

Анго А., Математика для электро- и радиоинженеров, изд-во «Наука», 1964.

Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, т. I и II, Изд-во иностр. лит. 1960:

Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций, Гостехиздат, 1948.

Маделунг Э., Математический аппарат физики, Физматгиз, 1960.

Мак-Конел А. Дж., Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике, Физматгиз, 1963.

Розет Т. А., Элементы теории цилиндрических функций с приложениями к радиотехнике, изд-во «Советское радио», 1956.

Шостак Р. Я., Операционное исчисление, изд-во «Высшая школа».

К истории развития радиоэлектроники

Петровский А. А., Научные основания беспроволочной телеграфии, С.-Петербург, 1913.

Фрейман И. Г., Курс радиотехники, Госиздат, 1924.

Берг А. И., Общая теория радиотехники, Ленинград, 1925.

Бонч-Бруевич М. А., Основы радиотехники, Связьтехиздат, 1936.

«Изобретение радио А. С. Поповым», Сборник документов и материалов под редакцией А. И. Берга, Изд-во АН СССР, 1945.

Рытов С. М., Из предыстории радио, Сборник оригинальных статей и материалов под редакцией Л. И. Мандельштама, Изд-во АН СССР, 1948.

«60 лет радио», Научно-технический сборник под ред. А. Д. Фортушенко, Связьиздат, 1955.

Шамшур В. И., Первые годы советской радиотехники и радиолобительства, Госэнергоиздат, 1954.

Бонч-Бруевич М. А., Собрание трудов, изд-во АН СССР, 1956.

Кугушев А. М., Радиоэлектроника, Физматгиз, 1959.

«Очерки истории радиотехники», Изд-во АН СССР, 1960.

Шулейкин М. В., Сборник статей под редакцией академика Б. А. Введенского, изд-во АН СССР, 1952.

Миц А. Л., Радиоэлектроника, Изд-во АН СССР, 1963.

Остроумов Б. А., В. И. Ленин и Нижегородская радиолaborатория, Л., изд-во «Наука», 1967.

Кугушев А. М., Радиоэлектроника за 50 лет, «Известия вузов СССР», т. X, № 12, 1967.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Основные обозначения	6
Общие математические обозначения	12
Символы математических операций	12
Введение	14
 Глава первая. Основные уравнения электромагнитного поля	 17
1-1. Основные характеристики поля	17
1-2. Основные характеристики среды	19
1-3. Интегральные уравнения электромагнитного поля..	29
1-4. Дифференциальные уравнения электромагнитного поля	33
1-5. Граничные условия	37
1-6. Энергия и силы электромагнитного поля.....	42
1-7. Волновые уравнения электромагнитного поля.....	50
1-8. Уравнения электромагнитного поля движущихся сред	59
1-9. Излучение электромагнитной энергии	72
 Глава вторая. Монохроматическое поле в неограниченной среде	 83
2-1. Уравнения монохроматического поля	83
2-2. Баланс энергии монохроматического поля.....	92
2-3. Поле провода с переменным током	96
2-4. Поле излучения простейших антенн.....	107
2-5. Направленное радиоизлучение	112
2-6. Уравнения радиопередачи и радиосигнализации . .	123
2-7. Плоская однородная электромагнитная волна в неограниченной среде	130
2-8. Поляризация электромагнитных волн	145
2-9. Монохроматическая волна в анизотропной среде..	151
 Глава третья. Монохроматическое поле в ограниченной среде	 167
3-1. Дифракция	167
3-2. Переход электромагнитных волн через поверхность раздела двух сред	185
3-3. Нормальное падение плоской электромагнитной волны	224

	Стр.
3-4. Электромагнитные волны между проводящими параллельными плоскостями	240
3-5. Направляющие системы. Волноводы	249
3-6. Объемные электрические резонаторы.	277
3-7. Неоднородности в волноводах и резонаторах.	297
3-8. Распространение электромагнитных волн около Земли	316
Глава четвертая. Статические поля	336
4-1. Уравнения электростатического поля	336
4-2. Электростатическое поле точечных зарядов.	340
4-3. Электростатическое поле заряженных проводников	345
4-4. Электрическая емкость	351
4-5. Электрический конденсатор	354
4-6. Электростатическое поле в среде с неоднородностями	367
4-7. Энергия и силы электростатического поля.	377
4-8. Магнитостатическое поле	386
Глава пятая. Стационарное поле	391
5-1. Уравнения стационарного поля	391
5-2. Поле провода с постоянным током.	396
5-3. Магнитное поле кругового тока.	407
5-4. Энергия магнитного поля постоянного тока. Собственная и взаимная индуктивности.	416
5-5. Индуктивность и взаимоиндуктивность простейших проводников	421
5-6. Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде. Электрическое сопротивление.	426
5-7. Стационарное поле в анизотропной среде.	434
5-8. Пондеромоторные силы в стационарном магнитном поле	439
5-9. Передача энергии стационарным полем.	448
5-10. Электрическая цепь. Основные законы цепи постоянного тока	451
Глава шестая. Цепи переменного тока.	460
6-1. Основные характеристики цепей переменного тока	460
6-2. Основные уравнения цепей переменного тока.	465
6-3. Взаимная индуктивность в цепях переменного тока	478
6-4. Мощность и пондеромоторные силы в цепи переменного тока	486
6-5. Теоремы теории электрических цепей.	495
Глава седьмая. Цепи с сосредоточенными постоянными	506
7-1. Основные схемы цепей с сосредоточенными постоянными	506
7-2. Простые цепи	510
7-3. Методы анализа сложных цепей.	535
7-4. Связанные контуры	586
7-5. Электрические фильтры	602

	Стр.
Глава восьмая. Цепи с распределенными постоянными..	628
8-1. Параметры цепей с распределенными постоянными	628
8-2. Электромагнитные волны в длинной линии.....	640
8-3. Линия конечной длины.....	646
8-4. Мощность переменного тока в двухпроводной линии	655
8-5. Входное сопротивление линии.....	660
8-6. Волновые матрицы .	669
8-7. Неоднородности в линиях.....	675
Глава девятая. Переходные процессы в электрических цепях	685
9-1. Методы исследования переходных процессов.....	685
9-2. Переходные процессы в простых цепях.....	695
9-3. Переходные процессы в четырехполюсниках.....	719
9-4 Переходные процессы в линиях с распределенными постоянными	745
Глава десятая. Математические дополнения	763
Д-0. Математический аппарат	763
Д-1. Элементы матричного исчисления.....	763
Д-2. Преобразование координат. Тензоры.....	768
Д-3. Векторный анализ	779
Д-4. Элементы специальной теории относительности	795
Д-5. Функции комплексной переменной.....	805
Д-6. Специальные уравнения и функции.....	812
Д-7. Ряды и интеграл Фурье. Преобразование Лапласа	832
Д-8. Спектры электрических сигналов.....	850
Приложения	865
Литература	872
Предметный указатель	878



Предметный указатель

- Ампера закон 29
Амплитудно-фазовые характеристики 499
- Баланс действительной мощности 94
— реактивной мощности 94
- Био—Савара закон 394, 395
Брюстера угол 201
- Вектор-потенциал четырехмерный 60
Вибратор линейный электрический 108, 109
- Взаимности теорема 90, 127, 420, 502, 503
- Возбуждение волноводов, резонаторов 304—307
- Возмущения метод 307—315
Волна замедленная 196—217
— земная 316—325
— необыкновенная 163, 332
— неоднородная 87, 185—188, 216
— обыкновенная 162, 332
— однородная 87, 130—132
— отраженная 168
— падающая 168
— поверхностная 195, 196, 204
— пространственная 316, 325
— прошедшая 168
— ускоренная 217
- Волноводы 250—267
Волновое уравнение 814, 815
— — для вектора Герца 51, 53
— — векторного и скалярного потенциалов 50, 88, 89
— — напряженностей поля 50, 87
- Вращение плоскости поляризации 157—161, 165, 166
- Время релаксации 26, 35, 42, 49
— когерентности 84
- Гаусса теорема 37, 349
Генераторы напряжения и тока 459
Герца вектор 51
Гиромагнитное отношение 152
Групповая скорость 136, 137
- Двойное лучепреломление 161—166
Двойственности принцип 90, 91
Джоуля — Ленца закон 427, 431, 450
Диаграмма излучения 100, 121
Диамагнетик 28
Диполь магнитный 28, 386, 410
— электрический 25
Дисперсия в ионосфере 331
— — системе 244
— — среде 22, 136, 137, 222
Дифракция 167—169
— на отверстии 184, 185
— от цилиндра 178—184
— — шара 169—178
Дифференцирующая цепь 533, 719
Диэлектрики 22, 25—27, 868, 869
Диэлектрическая проницаемость 19, 20, 22, 27, 85, 870
- Длина волны в среде 88
— — — системе 243, 247
- Добротность резонатора 287—289
Допплера эффект 239
- Единственности теорема 57—59
Емкость электрическая 351
— — взаимная 353
- Зеркальных изображений метод 314
- Избирательность 523
Излучатель поверхностный 118—121
— электрический элементарный 96—103
Излучение неравномерно движущегося заряда 72—79
Инвариантность заряда 62
Инварианты электромагнитного поля 67
Индуктивность 418
— — взаимная 419
Индуктивностей соединение 425, 481—483
Индукция магнитного поля 18, 27
— электрического поля 19
Интегрирующая цепь 533—535, 725
Интервал когерентности 126, 127
- Кирхгофа законы 455, 456, 476
— формула 123
Коаксиальный кабель с переменным током, индуктивность погонная 631
— — — — сопротивление погонное 630
— — — — постоянным током, индуктивность погонная 421, 422
— — — — проводимость изоляции погонная 431
— — — — — поля 401, 402
- Колебания вынужденные и собственные 294, 295
- Конденсатор 354—356
Конденсаторов соединение 365—367
Контур резонансный параллельный 508, 524—532, 737
— — последовательный 507, 510—524, 730
- Контурных токов метод 535—539
Контуры связанные 586—590
Коэффициент бегущей волны по напряжению 303, 634
— — — — мощности 490
— — — — взаимной индукции 419, 420
— — — — деполяризации 376
— — — — емкости 353
— — — — магнитного рассеяния 415
— — — — мощности 490
— — направленного действия излучателя 102
— — отражения по магнитному полю 194
— — — — по напряжению 647, 648
— — — — электрическому полю 193, 194
— — — — — передачи 499
— — — — проникновения 235
— — — — происхождения по магнитному полю 194
— — — — по электрическому полю 193, 194
— — — — — размагничивания 376, 389
— — — — — самондукции 418, 420
— — — — — стоячей волны по напряжению 227, 303, 654
— — — — — мощности 227
— — — — — электростатической индукции 353
- Кулона закон 30
- Лиенара — Вихерта потенциалы 74
Линия двухпроводная 358—361, 402—405, 422

Линия длинная 631, 639—665
 — задержки 740—744
 — передачи 249, 658, 659
 — полосковая с переменным током 638, 639
 — связи 249, 658, 659

Магнетик 22, 27—25
 Магнитная восприимчивость 19
 — постоянная 19, 871
 — проницаемость 19, 22, 29
 Магнитодиэлектрик 22
 Максвелла уравнения 33—37, 67
 — — для квазистационарного поля 460
 — — — магнитостатического поля 380
 — — — монохроматического поля 85, 86

— — — стационарного поля 391
 — — — электростатического поля 337
 Моделирование электростатическое 427, 428

Мощность действительная 94, 490
 — комплексная 490
 — мгновенная 486, 491
 — полная или кажущаяся 487
 — реактивная 92—94, 490, 491

Намагниченности вектор 27
 Направляющая система 249, 251
 Напряжение электрическое 338
 Напряженность магнитного поля 18, 19, 63
 — электрического поля 18, 19, 62

Ома закон 20, 429, 455, 464
 Ортогональности функций условие 277, 280, 831
 Отражение полное 196, 211—224
 Отсекающая система 579

Падения плоскость 188
 Парамагнетик 28
 Переходная характеристика 692
 — — связь с коэффициентом передачи 694

Переходный процесс 48, 686—688
 Пинч-эффект 441, 442, 445
 Плазма 141

— в магнитном поле 164—166, 436
 — — — проводимость 434
 — постоянная затухания 144
 — проводимость 432
 — фазовая постоянная 144

Плотности тока 4-вектор 60
 Поверхностный эффект 235
 Пойнтинга вектор 43, 92
 Поле в медленно движущейся среде 140

— дифрагированное 167
 — излучения 75
 — индукции 75
 — квазистационарное 36
 — когерентное во времени 84
 — монохроматическое 84
 — нестационарное 36
 — однородное 18
 — пространственно когерентное 84
 — скалярное 781
 — статическое 36, 37
 — стационарное 36, 391
 — стороннее 20
 — TE и TM в обобщенной криволинейной системе координат 55—57, 91, 92

Поле электростатическое 36, 336
 — — двух нитей заряженных 342—344
 — — диполя электрического 341
 — — заряда точечного 340, 341
 — — нити заряженной 341
 — — — параллельной проводящей плоскости 341, 342, 344, 345
 — — пондеромоторные силы 382—386
 — — шара проводящего заряженно-го 347—350

Полоса непрозрачности 602
 — прозрачности 602
 — пропускания 297
 Полупроводники 22, 868
 Поляризации вектор 25, 27
 — плоскость 146

Поляризация поля 145—151
 — — вертикальная 189
 — — горизонтальная 189
 — — ионная 26
 — — круговая 147, 148
 — — линейная 146, 147, 150
 — — ориентационная 26
 — — спонтанная 27
 — — среды индуцированная 25—27
 — — электронная 26
 — — эллиптическая 148—151

Пондеромоторные силы стационарно-го магнитного поля 439—448
 — — электромагнитного поля 45—48
 — — электростатического поля 382—386

— — цепи переменного тока 494, 495
 Постоянная времени 500, 688
 — распространения 87

Потенциалы векторные 19, 51—53
 — запаздывающие 52, 53, 89
 — скалярные 19, 51—53, 787

Потокоцепление 421
 Провод ленточный с переменным током, индуктивность погонная 639

— — — сопротивление погонное 633, 634
 — — — прямой с переменным током, излучение 96—107

— — — — индуктивность погонная 630
 — — — — сопротивление погонное 629, 630

— — с постоянным током при сверх-проводимости 399—401

— — — — поле 396—399
 — — — — полный с постоянным током, магнитное поле 405—407

Проводимость 429
 Проводники 22, 23, 867
 Прохождение полное 196—210

Распространение в ионосфере и тро-посфере 329—335

Расстройка 296
 Резонанс напряжений 477, 512—515
 — токов 526—528

— условие 507
 — ферромагнитный 151—156
 — электрический в системе 277, 492
 — — — среде 95

Резонансная кривая 296
 Резонатор 277, 667, 669
 — диэлектрический 293, 294
 — — — — полный металлический 278—293
 — — — — открытый 292—294

Рефракция береговая 323
— в тропосфере 326—328

Сверхпроводник 24, 868

Световод 273, 275

Сегнетоэлектрик 27

Система двух активных полупроводниковых вибраторов 116, 117
— — параллельных проводящих плоскостей 240—249

Снеллиуса законы 193

Собственные функции волновода 277
— — резонатора 280

Согласование волновода 304

— длинной линии 662—664, 666

— сопротивлений 230

Согласованная нагрузка 459

Сопротивление волновое волновода 302

— — среды 75

— взаимной индукции 480

— вносимое 588

— действительное 474

— излучения 101

— комплексное 474

— омическое 429

Сопротивлений соединение 457

Среда анизотропная 21, 27

— диэлектрическая 137

— гиротропная 161

— изотропная 21

— линейная 21

— однородная 21

— параметрическая 22

— проводящая 22

Суперпозиции принцип 36, 83

Тевенина теорема 503

Тензор 772, 803

— индукции электромагнитного поля 65, 66

— натяжений векторного поля 784

— — магнитного поля 46

— электромагнитного поля 46

— электрического поля 46

— поляризации электромагнитного поля 66

— самосопряженный 773

Теорема о передаче максимальной мощности 504, 505

Ток квазистационарный 96, 461

— поляризации 31

— смещения 31, 32

Торонд с постоянным током 412—414, 423

Трансформатор 556—560

— четвертьволновый 229—231

Угол падения 188

— полного прохождения 197

— полной поляризации 201

— поляризации 146

— потеря 85, 86

— преломления 191

— отражения 193

Умова — Пойнтинга теорема 42—45, 92—95, 449

Уравнение радиолокации 129, 130

— радиопередачи энергии 124

— радиосвязи 128, 129

Уравнения магнитной гидродинамики 70, 71

— электромагнитного поля интегральные 31, 33

Установившийся процесс 49

Фарадея закон 30

— эффект 161, 165

Ферромагнетик 28, 29

Ферромагнитная среда в магнитном поле 151—163

Фильтр волноводный 678, 684

— электрический 602—606

— — верхних частот 611—613

— — заградительный 618—622

— — многозвенный 622

— — нижних частот 606—611

— — полосовой 613—618

— — типа К 606

— — — М 623

— — — — — нижних частот 624—627

Френкеля формулы 194, 195

Ханкеля функции 269, 818—820

Хевисайда формула 695, 850

Холла эффект 435, 436

Цилиндр диэлектрический в однородном электростатическом поле 373—376

— проводящий в однородном электростатическом поле 375

— — в однородном магнитостатическом поле 388

Частота резонансная 278, 507

— связи 589, 590

— собственная 277, 295

— — комплексная 294, 295

Четырехполюсник 495, 499

— линейные графы 583—586

— матрицы 554—556, 561

— неискажающий 499, 500

— постоянная передачи 573—577

— симметричный 544

— согласованное включение 573

— характеристическое сопротивление 571—573

Четырехполюсников соединение 551—554

Шар диэлектрический 431, 371

— проводящий 351, 368—371

Экранирование 236

— магнитостатическое 389, 390

— электростатическое 345

Электрическая постоянная 19

— цепь переменного тока с распределенными постоянными 461, 462, 470—473, 478

— — — сосредоточенными постоянными 461, 466—468

— — — постоянного тока 451, 452

— — — RC 533—535

— — — — — переходный процесс 700—703

— — — — — RL 533—535

— — — — — переходный процесс 695—700

— — — — — RLC, переходный процесс 703—719

Электродвижущая сила 428, 453

— — взаимной индукции 479, 480

Эллипсоид проводящий 351, 376

Эллиптический интеграл 407

Энергия магнитного поля 45

— — — постоянного тока 416—420, 448—451

— — — магнитостатического поля 390

— — — электрического поля 45

— — — электромагнитного поля 44

— — — электростатического поля в диэлектрике 384, 385

— — — — — конденсатора 379—382

